REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

REVUE
DE
MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

RÉDIGÉE PAR MM.

E. HUMBERT
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE LOUIS-LE-GRAND

ET

G. PAPELIER
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE D'ORLÉANS

AVEC LA COLLABORATION DE MM.

P. LAMAIRE
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES, PROFESSEUR AU COLLÈGE CHAPTAL.

J. LEBEL
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES, DOCTEUR ÈS SCIENCES
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE DE DIJON.

CH. RIVIÈRE
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR AGRÉGÉ DE PHYSIQUE AU LYCÉE SAINT-LOUIS

H. VUIBERT
RÉDACTEUR DU *Journal de Mathématiques élémentaires.*

TOME XIII.

année 30-31 —
1919-21

291739
9.
30. 33

PARIS
LIBRAIRIE VUIBERT
63, Boulevard Saint-Germain, 63

QA
1
R486
année 30-
31

30e Année. Octobre 1919. N° 1.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LA SOMME DES PUISSANCES SEMBLABLES DES n PREMIERS NOMBRES ENTIERS

par M. R. Dontot, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de jeunes filles de Grenoble.

I. — Désignons par $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_p$ les sommes

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n,\\
S_2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2,\\
S_3 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
S_p &= 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + (n-1)^p + n^p.
\end{aligned}$$

On calcule d'ordinaire S_p par une formule, qui contient à la fois $S_p, S_{p-1}, \ldots, S_2, S_1$, obtenue en partant de l'identité

$$(n+1)^{p+1} - n^{p+1} = C_{p+1}^1 n^p + C_{p+1}^2 n^{p-1} + \ldots + C_{p+1}^{p+1}.$$

Nous nous proposons de donner une expression de S_p, qui permette très rapidement d'effectuer son calcul, sans avoir préalablement à calculer $S_{p-1}, \ldots, S_1$; de plus, nous nous proposons d'établir cette formule par une méthode élémentaire et en particulier sans nous servir de la formule du binome.

Posons

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n,$$

et calculons $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)$ par la condition que

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= x f'(x),\\
f_2(x) &= x f'_1(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\\
f_p(x) &= x f'_{p-1}(x).
\end{aligned}$$

Il est aisé de faire les calculs. On trouve

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= x + 2x^2 + \ldots + nx^n,\\
f_2(x) &= x + 2^2x^2 + \ldots + n^2x^n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f_p(x) &= x + 2^p x^2 + \ldots + n^p x^n.
\end{aligned}$$

On voit donc que

$$\begin{aligned}
f_1(1) &= S_1,\\
f_2(1) &= S_2,\\
&\ldots\ldots\\
f_p(1) &= S_p.
\end{aligned}$$

Calculer S_p, revient donc à trouver $f_p(1)$.

Pour simplifier l'écriture, posons

$$y_1 = xy', \qquad y_2 = xy_1, \quad \ldots \quad y_p = xy_{p-1}$$

(y' désigne, comme d'ordinaire, la dérivée de y par rapport à x).

On aura

$$y_2 = x(xy'' + y') = x^2y'' + xy'.$$

Soient y'', y''', ..., y^{p} les dérivées successives de y par rapport à x; y_p est de la forme

$$(1) \qquad y_p = A_1xy' + A_2x^2y'' + \ldots + A_px^py^{p},$$

$A_1, A_2, \ldots, A_p$ étant des constantes.

En effet, y_1 et y_2 sont bien de la forme annoncée; supposons que y_p le soit aussi, nous allons démontrer que

$$(2) \qquad y_{p+1} = B_1xy' + B_2x^2y'' + \ldots + B_px^py^{p} + B_{p+1}x^{p+1}y^{p+1}.$$

Il en résultera évidemment que, quel que soit p, l'expression (1) de y_p en fonction de x et de y', y'', ..., y^{p} est valable.

En dérivant les deux membres de l'équation (1), on obtient

$$y'_p = A_1y' + (A_1 + 2A_2)xy'' + (A_2 + 3A_3)x^2y''' + \ldots + (A_{p-1} + pA_p)x^{p-1}y^{p} + A_px^py^{p+1},$$

et, par suite,

$$y_{p+1} = A_1xy' + (A_1 + 2A_2)x^2y'' + \ldots + (A_{p-1} + pA_p)x^py^{p} + A_px^{p+1}y^{p+1}.$$

Pour obtenir l'équation (2), il suffit de prendre

$$(3) \qquad \begin{cases} B_1 = A_1, \\ B_2 = A_1 + 2A_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ B_p = A_{p-1} + pA_p, \\ B_{p+1} = A_p. \end{cases}$$

Il est aisé, en profitant des formules (3), de former un tableau (T) donnant les valeurs des coefficients de xy', x^2y'', ..., x^py^{p} dans $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_p(x)$. Pour construire ce tableau, affectons les lignes, dans leur ordre, aux coefficients de $f_1(x)$ (1re ligne), $f_2(x)$ (2e ligne), etc., et les colonnes numérotées aux coefficients de xy' (1re colonne), x^2y'' (2e colonne), etc. Sur la première ligne, écrivons la suite des coefficients

$$1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0. \quad . \quad .$$

Tous les chiffres de la première colonne sont égaux à 1 : on obtient un nombre quelconque du tableau, ligne α, colonne β, en ajoutant au nombre de la ligne $\alpha - 1$, colonne $\beta - 1$, le nombre, multiplié par β, de la ligne $\alpha - 1$, colonne β.

Ex. : Pour la deuxième colonne,

$$3 = 1 + 2 \times 1,$$
$$7 = 1 + 2 \times 3,$$
$$15 = 1 + 2 \times 7,$$
etc.

Pour la troisième,

$$6 = 3 + 3 \times 1,$$
$$25 = 7 + 3 \times 6,$$
$$90 = 15 + 3 \times 25,$$
etc.

Pour la quatrième,

$$10 = 6 + 4 \times 1,$$
$$65 = 25 + 4 \times 10,$$
etc.

(T)

	1	2	3	4	5	6
	xy'	x^2y''	x^3y'''	x^4y^{iv}	x^5y^{v}	x^6y^{vi}
$f_1(x)$	1	0	0	0	0	0
$f_2(x)$	1	1	0	0	0	0
$f_3(x)$	1	3	1	0	0	0
$f_4(x)$	1	7	6	1	0	0
$f_5(x)$	1	15	25	10	1	0
$f_6(x)$	1	31	90	65	15	1

On aura ainsi

$$f_1(x) = xy',$$
$$f_2(x) = xy' + x^2y'',$$
$$f_3(x) = xy' + 3x^2y'' + x^3y''',$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$f_6(x) = xy' + 31x^2y'' + 90x^3y''' + 65x^4y^{\text{iv}} + 15x^5y^{\text{v}} + x^6y^{\text{vi}},$$

et, par suite, en remplaçant y par $f(x)$ et x par 1,

$$S_1 = f'(1),$$
$$S_2 = f'(1) + f''(1),$$
$$S_3 = f'(1) + 3f''(1) + f'''(1),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$S_6 = f'(1) + 31f''(1) + 90f'''(1) + 65f^{\text{iv}}(1) + 15f\ (1) + f^{\text{vi}}(1).$$

Calcul de $f'(1), f''(1), \dots, f^{(p)}(1)$.

On a évidemment

$$f(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1},$$

c'est-à-dire

$$(x-1)f(x) = x^{n+1} - 1. \tag{4}$$

Dérivons l'identité (4) :

$$(x-1)f'(x) + f(x) = (n+1)x^n;$$

en dérivant encore, on obtient successivement

$$(x-1)f''(x) + 2f'(x) = (n+1)nx^{n-1},$$
$$(x-1)f'''(x) + 3f''(x) = (n+1)n(n-1)x^{n-2},$$
etc.

La loi de formation du premier membre est évidente et, d'une façon générale, on a

$$(x-1)f^{(p+1)}(x) + (p+1)f^{(p)}(x) = (n+1)n(n-1)\dots(n-p+1)x^{n-p} \qquad (n > p).$$

Par suite,

$$f^{(p)}(1) = \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-p+1)}{p+1}.$$

Connaissant $f'(1), f''(1), \dots, f^{(p)}(1)$, il est possible au moyen du tableau (T) d'obtenir l'expression de S_p.

Applications. — Calculs de S_1, S_2, S_3.

Nous avons

$$f'(1) = \frac{(n+1)n}{2},$$

$$f''(1) = \frac{(n+1)n.(n-1)}{3},$$

$$f'''(1) = \frac{(n+1)n.(n-1)(n-2)}{4}.$$

Le coefficient $(n+1)n$ est en évidence dans f', f'', f''' et d'ailleurs dans les dérivées suivantes; nous le désignerons par k pour simplifier :

$$(n+1)n = k.$$

$$S_1 = \frac{k}{2}, \qquad S_1 = \frac{(n+1)n}{2},$$

$$S_2 = k\left(\frac{1}{2} + \frac{n-1}{3}\right) = k.\frac{2n+1}{6}, \qquad S_2 = \frac{(n+1)n(2n+1)}{6}.$$

$$S_3 = k\left(\frac{1}{2} + \frac{3(n-1)}{3} + \frac{(n-1)(n-2)}{4}\right)$$

$$= \frac{k}{4}[2 + 4(n-1) + (n-1)(n-2)] = \frac{k(n+1)n}{4}, \qquad S_3 = \left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2,$$

$$S_4 = k\left(\frac{1}{2} + 7\frac{n-1}{3} + 6\frac{(n-1)(n-2)}{4} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{5}\right)$$

$$= \frac{k}{30}[15 + 70(n-1) + 45(n-1)(n-2) + 6(n-1)(n-2)(n-3)]$$

$$= \frac{k}{30}(6n^3 + 9n^2 + n - 1) = \frac{k}{30}(2n+1)(3n^2 + 3n - 1), \qquad S_4 = \frac{(n+1)n(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

(*A suivre.*)

ALGÈBRE ET ANALYSE

2141. — 1° *Condition pour que l'équation*

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \tag{1}$$

ait une racine égale au carré d'une autre.

2° *Soit* $\varphi(p, q, r) = 0$ *cette condition. On suppose que* p, q, r *soient les coordonnées d'un point quelconque de l'espace; étudier la surface* (S) *représentée par l'équation*

$$\varphi(p, q, r) = 0.$$

a) Construire ses sections par les plans de coordonnées.

b) Montrer que (S) *est réglée et chercher les équations des génératrices rectilignes en fonction d'un paramètre.*

c) (S) *est unicursale; on exprimera les coordonnées de l'un quelconque de ses points en fonction rationnelle de deux des racines* α *et* β *de l'équation* (1).

3° *Soient* $x = f_1(\alpha, \beta)$, $y = f_2(\alpha, \beta)$, $z = f_3(\alpha, \beta)$ *les formules obtenues. Supposant alors que* α, β *soient les coordonnées courantes d'un point dans le plan, on demande d'étudier succinctement les courbes*

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad f_3 = 0.$$

4° *Points multiples de* (S).

1 et 2. Pour que l'équation $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ ait une racine égale au carré d'une autre, il faut et il suffit qu'il existe un nombre t vérifiant les deux équations

$$t^4 + pt^2 + qt + r = 0, \qquad t^8 + pt^4 + qt^2 + r = 0;$$

on aura donc la condition cherchée en éliminant t entre ces deux équations. Ce calcul est extrêmement

pénible, et il n'est pas nécessaire de le faire pour étudier la surface (S). Si nous remplaçons p, q, r respectivement par x, y, z, on voit que cette surface est engendrée par la droite variable définie par les équations

$$(1) \qquad t^4 + xt^2 + yt + z = 0, \qquad t^8 + xt^4 + yt^2 + z = 0,$$

où t est un paramètre variable. Par suite, cette surface est réglée. On peut résoudre les équations (1) par rapport à y et z; on a

$$(2) \qquad \begin{cases} y = -x(t^2 + t) - (t^6 + t^5 + t^4 + t^3), \\ z = xt^3 + t^7 + t^6 + t^5, \end{cases}$$

ce qui montre que la surface est unicursale;

Cherchons maintenant les sections de cette surface par les plans de coordonnées.

Dans les équations (1) faisons $z = 0$, puis résolvons les équations par rapport à x et y; nous obtenons

$$x = -(t^4 + t^3 + t^2), \qquad y = t^5 + t^4.$$

Ce sont les équations paramétriques de la section par le plan des xy. Cette courbe est unicursale et du cinquième degré, et sa construction ne présente aucune difficulté.

On trouve de même, sur le plan des xz,

$$x = -(t^4 + t^2), \qquad z = t^6,$$

et, sur le plan des yz,

$$y = -(t^6 + t^5 + t^4 + t^3), \qquad z = t^7 + t^6 + t^5.$$

3. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les racines de l'équation $t^4 + xt^2 + yt + z = 0$; la somme $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ est nulle, et l'une des racines, γ par exemple, est égale au carré d'une autre, α; on peut donc dire que les quatre racines sont de la forme α, α^2, β $-(\alpha + \alpha^2 + \beta)$. En écrivant les relations entre les coefficients et les racines, on a

$$\begin{aligned} x &= \Sigma\alpha\beta = -\alpha^2 - \alpha^3 - \alpha^4 - \beta(\alpha + \alpha^2) - \beta^2, \\ y &= -\Sigma\alpha\beta\gamma = \alpha(\alpha + 1)(\beta + \alpha)(\beta + \alpha^2), \\ z &= \alpha\beta\gamma\delta = -\alpha^3\beta(\alpha + \alpha^2 + \beta). \end{aligned}$$

On construira aisément les courbes représentées par les équations

$$\begin{gathered} \beta^2 + \beta(\alpha^2 + \alpha) + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 = 0, \\ \alpha(\alpha + 1)(\beta + \alpha)(\beta + \alpha^2) = 0, \\ \alpha^3\beta(\alpha^2 + \alpha + \beta) = 0. \end{gathered}$$

Les deux dernières se décomposent en droites et parabole.

4. Etant donnée une surface définie par ses équations paramétriques $x = f(u, v)$, $y = \varphi(u, v)$, $z = \psi(u, v)$, on sait que les u et v des points multiples sont définis par les équations

$$\frac{f'_u}{f'_v} = \frac{\varphi'_u}{\varphi'_v} = \frac{\psi'_u}{\psi'}.$$

Reportons-nous aux équations (2) qui définissent x, y, z en fonction des paramètres x et t. Les points multiples seront déterminés par

$$\frac{x'_t}{x'_x} = \frac{y'_t}{y'_x} = \frac{z'_t}{z'_x}$$

ou, comme x'_t est nul,

$$y_t = 0, \qquad z'_t = 0,$$

ou enfin

$$\begin{gathered} x(2t + 1) + 6t^5 + 5t^4 + 4t^3 + 3t^2 = 0, \\ 3t^2x + 7t + 6t^5 + 5t^4 = 0. \end{gathered}$$

En éliminant x entre ces deux équations, on obtient

$$t^2(t-1)^2(t+1) = 0.$$

Les solutions $t = 0$ et $t = 1$ ne sont pas à considérer ; car pour ces valeu sont confondus

Il reste seulement la solution $t = -1$, à laquelle correspond le point double

$$x = -2, \quad y = 0, \quad z = 1.$$

MÉCANIQUE

2140. — *Dans un triangle variable* OAM *de sommet fixe* O *et dont le côté* OA *fa* Ox, *on donne*

$$OA = a, \qquad AM = b, \qquad \widehat{OAM} = \pi - \theta.$$

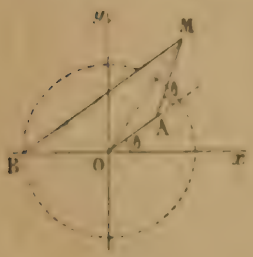
1° *On demande le lieu de* M *lorsque* θ *varie, le lieu du centre du cercle circonscrit, du triangle* OAM *et l'enveloppe de* AM.

2° *Si* θ *est proportionnel au temps, déterminer l'hodographe du mouvement et le l vecteurs vitesse et accélération.*

3° *Si l'accélération de* M *passe constamment par* O, *construire l'hodographe dans*

Solution analytique. — 1. *a) Lieu de* M. — Les coordonnées de M sont

$$x = a\cos\theta + b\cos 2\theta, \qquad y = a\sin\theta +$$



Nous allons démontrer que ces équations représen Pascal. Pour cela nous portons les axes au point B d'ordonnée 0 :

$$x = a\cos\theta + b(1 + \cos 2\theta) = \cos\theta(a + 2b\cos\theta), \qquad y =$$

et en passant en coordonnées polaires on obtient $\operatorname{tg}\omega =$

$$\rho = a + 2b\cos\theta.$$

C'est bien un limaçon de Pascal relatif au cercle don le rayon b ; le pôle est B et la longueur ajoutée est égale à a.

b) Lieu du centre du cercle circonscrit au triangle OAM. — Soient x et y les coo nous écrivons qu'il est à égale distance des trois points A, M et O :

$$x^2 + y^2 = (x - a\cos\theta)^2 + (y - a\sin\theta)^2 = (x - a\cos\theta - b\cos 2\theta)^2 + (y - a\sin$$

La première égalité nous donne

c) *Lieu du centre de gravité.* — Les coordonnées du centre de gravité sont

$$x = \frac{2a\cos\theta + b\cos 2\theta}{3}, \qquad y = \frac{2a\sin\theta + b\sin 2\theta}{3};$$

ce sont des équations de la même forme que dans le premier cas ; le lieu est d
Pascal.

d) *Enveloppe de* AM. — L'équation de AM est

$$(y - a\sin\theta) = \operatorname{tg} 2\theta(x - a\cos\theta).$$

Dérivons par rapport à θ :

$$-a\cos\theta = \frac{2x}{\cos^2 2\theta} - \frac{2a\cos\theta}{\cos^2 2\theta} + a\sin\theta\operatorname{tg} 2\theta,$$

d'où

$$2x = 2a\cos\theta - a\cos 2\theta(\cos\theta\cos 2\theta + \sin\theta\sin 2\theta),$$
$$2x = a\cos\theta(2 - \cos 2\theta) = a\cos\theta(3 - 2\cos^2\theta),$$

et, en portant dans l'équation de AM,

$$y = a\sin\theta - a\frac{\cos\theta\sin 2\theta}{2} = a\sin^3\theta.$$

Ce sont les équations paramétriques d'une épicycloïde à deux rebrousser
pour centre O et pour rayon $\frac{a}{2}$.

2. *a*) Lorsque $\theta = \alpha t$, nous avons

$$x = a\cos\alpha t + b\cos 2\alpha t, \qquad y = a\sin\alpha t + b\sin 2\alpha t$$

Pour avoir l'hodographe, cherchons les composantes de la vitesse :

$$x' = -a\alpha\sin\alpha t - 2b\alpha\sin 2\alpha t, \qquad y' = a\alpha\cos\alpha t + 2b\alpha c$$

ce sont encore les équations paramétriques d'un limaçon de Pascal : le cercle di
le point par lequel on mène toutes les droites est sur l'axe des y et son ordon

b) Cherchons le lieu de l'extrémité du vecteur vitesse ; ses équations para

$$x = a\cos\alpha t - a\alpha\sin\alpha t + b\cos 2\alpha t - 2b\alpha\sin 2\alpha t,$$
$$y = a\sin\alpha t + a\alpha\cos\alpha t + b\sin 2\alpha t + 2b\alpha\cos 2\alpha t.$$

Le vecteur de projections x et y est donc la résultante de quatre vecte
laires ; je les compose deux à deux et il vient

$$x = a\sqrt{1+\alpha^2}\cos(\beta + \alpha t) + b\sqrt{1+4\alpha^2}\cos(\gamma + 2\alpha t),$$
$$y = a\sqrt{1+\alpha^2}\sin(\beta + \alpha t) + b\sqrt{1+4\alpha^2}\sin(\gamma + 2\alpha t).$$

c) Lieu de l'extrémité du vecteur accélération.

$$x'' = -a\alpha^2\cos\alpha t - 4b\alpha^2\cos 2\alpha t, \qquad y'' = -a\alpha^2\sin\alpha t - 4\alpha b^2\sin 2\alpha t\,;$$
$$X = x + x'' = a\cos\alpha t(1-\alpha^2) + b(1-4\alpha^2)\cos 2\alpha t,$$
$$Y = y + y'' = a\sin\alpha t(1-\alpha^2) + b(1-4a^2)\sin 2\alpha t\,;$$

c'est encore un limaçon de Pascal.

3. L'accélération étant centrale, le mouvement a lieu suivant la loi des aires, donc

$$xy' - yx' = K,$$
$$x = a(\cos\omega + \cos 2\omega), \qquad x' = -a\omega'(\sin\omega + 2\sin 2\omega),$$
$$y = a(\sin\omega + \sin 2\omega), \qquad y' = a\omega'(\cos\omega + 2\cos 2\omega),$$

puis
$$a^2\omega'[(\cos\omega + \cos 2\omega)(\cos\omega + 2\cos 2\omega) + (\sin\omega + \sin 2\omega)(\sin\omega + 2\sin 2\omega)] = K,$$
$$a^2\omega'[\cos^2\omega + 3\cos\omega\cos 2\omega + 2\cos^2 2\omega + \sin^2\omega + 3\sin 2\omega\sin\omega + 2\sin^2 2\omega] = K,$$
$$3a^2\omega'(1+\cos\omega) = K, \qquad \omega' = \frac{K}{3a^2}\,\frac{1}{1+\cos\omega};$$

les équations paramétriques de l'hodographe sont donc :

$$X = x' = -\frac{K}{3a}\,\frac{\sin\omega + 2\sin 2\omega}{1+\cos\omega}, \qquad Y = y' = \frac{K}{3a}\,\frac{\cos\omega + 2\cos 2\omega}{1+\cos\omega}.$$

Il faut construire cette courbe ; pour cela, nous supposerons $\frac{K}{3a} = 1$.

Si on change ω en $-\omega$, x se change en $-x$, et y ne change pas, il y a donc symétrie par rapport à Oy.

Cherchons les dérivées :

$$X' = -\frac{(1+\cos\omega)(\cos\omega + 4\cos 2\omega) + (\sin\omega + 2\sin 2\omega)\sin\omega}{(1+\cos\omega)^2},$$
$$X' = -\frac{4\cos^2\omega + 4\cos\omega - 3}{1+\cos\omega}.$$

X' n'admet qu'une seule racine comprise entre -1 et $+1$: $\cos\omega = \frac{1}{2}$; pour cette racine, $Y = -\frac{1}{3}$, $X = -\sqrt{3}$.

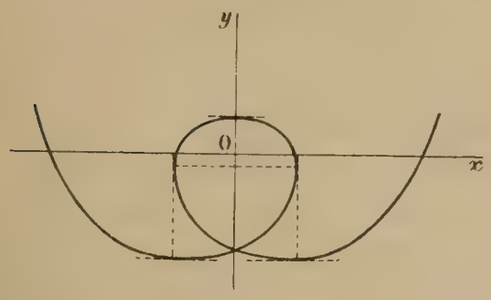
$$Y' = \frac{-(1+\cos\omega)(\sin\omega + 4\sin 2\omega) + \sin\omega(\cos\omega + 2\cos 2\omega)}{(1+\cos\omega)^2},$$
$$Y' = -\frac{\sin\omega(4\cos^2\omega + 8\cos\omega + 3)}{(1+\cos\omega)^2},$$

Y' admet d'abord la solution $\sin\omega = 0$ et une seule autre racine acceptable : $\cos\omega = -\frac{1}{2}$.

Les variations de X et Y sont alors résumées dans le tableau suivant :

ω	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
X'		$-$	0	$+$		$+$	
X	0	↘	$-\sqrt{3}$	↗	$\sqrt{3}$	↗	$+\infty$
Y'		$-$		$-$	0	$+$	
Y	$\frac{3}{2}$	↘	$-\frac{1}{3}$	↘	-3	↗	$+\infty$

Pour $\omega = \pi$, X et Y sont infinis ; cherchons la direction asymptotique :



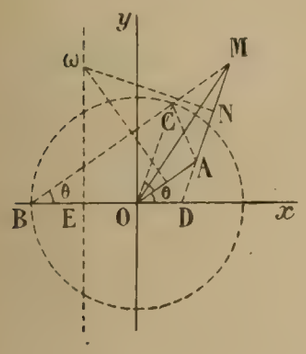
$$\frac{Y}{X} = -\frac{\cos\omega + 2\cos 2\omega}{\sin\omega + 2\sin 2\omega};$$

ce rapport devient infini quand ω tend vers π, il n'y a donc pas d'asymptote.

Remarque. — On peut chercher s'il y a une parabole asymptote ; il y en a une dont l'équation est

$$x^2 - 18y - 79 = 0.$$

Solution géométrique. — 1. *a) Lieu de* M. — Pour obtenir le point M, nous pouvons mener OC égal et parallèle à AM, puis CM égal et parallèle à OA ; CM rencontre Ox en un point B; nous allons démontrer que B est fixe. En effet, le triangle DOA est isocèle, donc le triangle DBM qui lui est semblable est aussi isocèle et l'on a



$$OB = AM = b.$$

D'autre part, $CM = OA = a$.

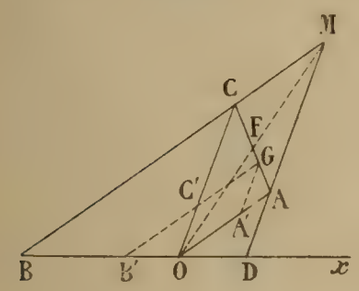
Le lieu de M est donc un limaçon de Pascal, relatif au cercle de centre O et de rayon égal à b ; le pôle est le point B et la longueur portée sur BC est égale à a.

b) Lieu du centre du cercle circonscrit au triangle OAM. — Soit ω le centre du cercle circonscrit au triangle OAM. Il est sur la perpendiculaire à OA au milieu du segment OA, et d'autre part, sur la perpendiculaire à AM et en son milieu. Abaissons de ω la perpendiculaire sur Ox ; le point E où elle rencontre Ox est fixe. On a, en effet,

$$OE = AN = \frac{b}{2},$$

les deux triangles DEω et ωDN étant égaux (Dω, commun ; ils sont rectangles et $\widehat{ED\omega} = \widehat{\omega DN}$).

Le lieu de ω est donc la perpendiculaire à Ox passant au point E d'abscisse $-\frac{b}{2}$.



c) Le centre de gravité G est aux deux tiers de la médiane AF qui passe par C. Si par G on mène la parallèle à OA, elle rencontre Ox en B' et on a

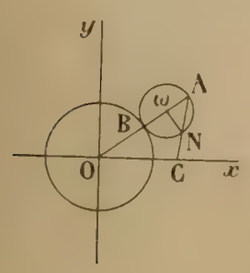
$$\frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{AG}{AC} = \frac{1}{3};$$

donc $$OB' = \frac{OB}{3} = \frac{b}{3}, \qquad OC' = \frac{b}{3}.$$

Si on mène GA' parallèle à OC, on a

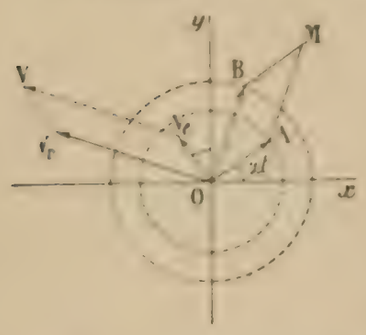
$$C'G = OA' = \frac{2\,OA}{3} = \frac{2a}{3}$$

donc le point G décrit un limaçon de Pascal relatif au cercle dont le centre est O et le rayon $\frac{b}{3}$; la longueur ajoutée est $\frac{2a}{3}$.



d) Enveloppe de AM. — Considérons le cercle de centre O et de rayon $\frac{a}{2}$, et un cercle qui roule sur celui-ci et de rayon $\frac{a}{4}$. Soit ω une position de ce cercle et soit N le point qui engendre l'épicycloïde ; j'ai $\widehat{B\omega N} = 2\widehat{COA}$, donc $\widehat{OAC} = \widehat{COA}$. La droite AN est bien la droite considérée dans le problème, et, d'après une propriété connue de l'épicycloïde, AN est la tangente en N ; l'enveloppe de AM est bien une épicycloïde.

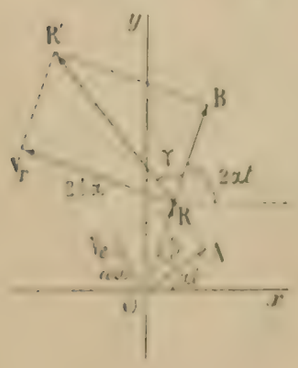
2. *a) Hodographe.* — Pour avoir cet hodographe, on mène par O un vecteur équipollent au vecteur vitesse et on cherche le lieu de l'extrémité de ce vecteur. On peut considérer le point M comme appartenant à un plan variable qui glisse sur le plan fixe de telle sorte que les axes restent parallèles à Ox et Oy et que le point A du plan mobile décrive dans le plan fixe le cercle qui a pour centre O et pour rayon $OA = a$. Dans ces conditions, tous les points du plan mobile sont animés d'une vitesse d'entraînement égale à $a\alpha$ et portée par un vecteur faisant avec OA l'angle $+\frac{\pi}{2}$. Dans le plan mobile, le point M est animé d'un mouvement circulaire uniforme autour du point A et dont la vitesse angulaire est 2α. Le vecteur vitesse relative V_r sera donc un vecteur faisant l'angle $+\frac{\pi}{2}$ avec AM et dont la valeur est $2b\alpha$. L'hodographe est le lieu de V. C'est un limaçon de Pascal puisque $\widehat{V_rOy} = \alpha t$ et $\widehat{VOy} = 2\alpha t$.



b) Lieu de l'extrémité du vecteur vitesse. — Pour trouver ce lieu, il faut composer les quatre vecteurs OA, OB, OV_e, OV_r.

Composons OA et OV_e ; soient OR cette résultante et β l'angle que fait OR avec OA.

Composons OB et OV_r et ajoutons-les à OR ; soient RR′ leur résultante et γ l'angle de RR′ avec RB.



Il faut maintenant composer OR et RR′ ; les deux longueurs OR et RR′ sont constantes :

$$OR = a\sqrt{1+\alpha^2},$$
$$RR' = b\sqrt{1+4\alpha^2}.$$

Nous allons démontrer que l'angle de RR′ avec une certaine direction fixe est double de celui de OR avec cette direction ; pour cela il suffit d'écrire

$$2(\alpha t + \beta - \varphi) = 2\alpha t + \gamma - \varphi, \qquad \varphi = 2\beta - \gamma = \text{constante};$$

le lieu de l'extrémité du vecteur vitesse est bien un limaçon dont l'axe de symétrie fait un angle φ avec Ox.

c) Le vecteur accélération est la somme géométrique de l'accélération d'entraînement et de l'accélération relative puisque le mouvement d'entraînement est de translation. L'accélération d'entraînement est un vecteur dirigé suivant OA et qui a pour valeur $a\alpha^2$; l'accélération relative est un vecteur dirigé suivant MA et qui a pour valeur $4b\alpha^2$; la somme géométrique de OA et de l'accélération d'entraînement est un vecteur porté par OA et dont la valeur algébrique est égale à $a(1-\alpha^2)$. La somme géométrique de AM et de l'accélération relative est un vecteur parallèle à AM et ayant pour valeur algébrique $b(1-4\alpha^2)$. Le lieu de l'extrémité du vecteur accélération est donc un limaçon de Pascal.

Robert de NERVO.

Bonnes solutions : MM. Marescalchi ; G. Lach, à Douai.
Assez bonnes solutions : MM. A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes ; L. Thiringer, rue Nollet, à Paris.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1919)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

I — Algèbre et Analyse.

9891. — On considère la suite

$$2x_0 = 1, \qquad 2x_1 - 3x_0 = k, \qquad 2x_2 - 3x_1 + x_0 = k^2, \ldots \qquad 2x_n - 3x_{n-1} + x_{n-2} = k^n;$$

calculer x_n en fonction de k.

9892. — Trouver les valeurs de n pour lesquelles $(x+1)^n - x^n - 1$ est divisible par $(x^2+x+1)^2$.

9893. — Montrer que le polynome

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (p-1)x^{p-2} + px^{p-1} + (p-1)x^p + \ldots + 2x^{2p-3} + x^{2p-2}$$

est un carré parfait.

9894. — Trouver le reste de la division du polynome

$$(\cos a + x \sin a)(\cos b + x \sin b) \ldots (\cos l + x \sin l)$$

par $x^2 + 1$.

9895. — Déterminer n de façon que $x^{4n} - x^{3n} + x^{2n} - x^n + 1$ soit divisible par $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$.

9896. — Calculer le coefficient de x^p dans l'expression $[x - 2x^2 + 3x^3 - 4x^4 + \ldots]^2$.

9897. — Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} (b-c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c-a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a-b)^2 \end{vmatrix}.$$

9898. — On considère les deux déterminants

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} a^n & b^n & c^n \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Montrer que $\Delta_n = \Delta . \Sigma a^p b^q c^r$, avec $p + q + r = n - 2$.

9899. — Étudier les séries qui ont pour termes généraux :

$$\frac{1}{e^{nx} + e^{-nx}}, \quad \sin\left(n - \frac{a}{n}\right)\pi, \quad \frac{1}{n} - \mathrm{L}\frac{n}{n-1}, \quad \frac{x^n}{n}\cos\frac{2n\pi}{3}, \quad \frac{1}{n\sin n\frac{\pi}{2} - n^2\cos\frac{n\pi}{2}}, \quad \left(\frac{3n+4}{3n+5}\right)^{n^2}.$$

$$(-1)^n\left(1 - \cos\frac{a}{n}\right)n^\alpha \sin(2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad \left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^h}, \quad \left(\cos\frac{a}{n^\alpha}\right)^n, \quad \sqrt{n^4 - 4n^2 + 1} - n^2 + 2n, \quad e^{-\mathrm{L}n^2},$$

$$\sqrt{n}\,\mathrm{L}\frac{n^2+5n+1}{n^2+3n+2}, \quad n\mathrm{L}\frac{n^2+3n+4}{n^2+3n-5}, \quad a^{(\log_b n)^h}, \quad \frac{1}{n+1+\cos n\pi}, \quad \frac{1}{(n+1+\cos n\pi)^2}, \quad e^{\Sigma n \cdot \mathrm{L}n},$$

$$\frac{1}{5^n - 2^n}, \quad \frac{(x+a)^n + (x-a)^n}{n}, \quad (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+2})\sin\frac{2n\pi}{3}, \quad ne^{-n}, \quad \frac{1^3 + 2^3 + \ldots + n^3}{n^\alpha}x^n,$$

$$\left(\cos\frac{1}{n}\right)^n, \quad \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

9900. — Étudier la série dont le terme général est $\frac{1}{np^\alpha}$, p étant le nombre des chiffres de n.

9901. — Déterminer a, b, c de façon que la série dont le terme général est $a\mathrm{L}(1+n) + b\mathrm{L}(2+n) + c\mathrm{L}(3+n)$ soit convergente.

9902. — Déterminer le polynome $\mathrm{P}(n)$ pour que la série dont le terme général est $\sqrt[3]{n^3 + 3n - 1} - \sqrt{\mathrm{P}(n)}$ soit convergente.

9903. — Sommer les séries dont les termes généraux sont :

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2n^2}, \quad \frac{2n+1}{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3}, \quad \frac{n}{n^3 + 8n + \sqrt{3}(3n^2+2)}, \quad \frac{4n-3}{n(n^2-4)},$$

$$\frac{n^3}{n!}, \quad \frac{(n+2)(n+3)}{n(n+1)}x^n, \quad \frac{(n-1)^3}{n!}x^n.$$

9904. — On considère la suite définie par $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = k$; montrer que la série dont le terme général est $\frac{1}{u_n}$ est convergente.

9905. — Le nombre e est-il plus petit que $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$?

9906. — Calculer la dérivée de la fonction $\operatorname{arc\,tg}\frac{1-3x^2}{3x - x^3}$. Pouvait-on prévoir le résultat?

9907. — Étudier les variations des fonctions :

$$\sqrt[5]{x^4(x-1)}, \quad \frac{e^x}{\sqrt{x-1}}, \quad \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}}}{3x-2}, \quad x\mathrm{L}\frac{x}{x+1}, \quad x - \mathrm{L}\,\mathrm{ch}\,x, \quad xe^{\frac{1}{1-x^2}}, \quad (\cos x)^{\frac{1}{x}},$$

$$(\sin x)^{\cos x}, \quad \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad (1+x)^{\frac{1}{x}}, \quad x\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad e^x \mathrm{L}x^2, \quad xe^x\sqrt{x^2 - 1}, \quad (\mathrm{tg}\,x)^{\cos x},$$

$$\frac{(x-1)e^{\frac{1}{x^2-1}}}{x+1}, \quad (\cos x)^{\mathrm{tg}^2 x}, \quad \mathrm{tg}\sqrt{x}, \quad xe^{\frac{1}{1-x^2}}, \quad x^2\mathrm{L}(1+x)^2, \quad \arcsin \mathrm{L}x, \quad (x-2)e^{\frac{1}{x-1}},$$

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x + 1 + \sqrt{x^2+1}}, \quad a.\arccos\frac{x-a}{a} + \sqrt{2ax - x^2}, \quad \frac{\mathrm{L}x}{1 + x - \mathrm{L}x}, \quad (x-a)^{a/x}, \quad x\mathrm{L}\left(\frac{1+x}{x}\right)^2.$$

$$(x+2)\,\mathrm{L}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2, \quad \sin^4 x e^{\cot x}, \quad (x^2)^{\frac{1}{x-1}}, \quad (1 + \mathrm{tg}\,x)^{\frac{1}{x}}.$$

9908. — On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy et la droite $y = a$. On prend sur cette droite les points M et N qui ont pour abscisses x et $x + l$, l étant une constante positive. Trouver la partie principale de l'angle MON par rapport à l'infiniment petit principal $\frac{1}{x}$.

9909. — Démontrer directement que les fonctions $\sqrt{x^2 + x + 1}$ et $\sqrt{\frac{x^2}{x - 1}}$ sont continues.

9910. — **Développer en séries entières les fonctions**

$$\mathrm{L}(1 - 2x\cos\alpha + x^2), \qquad e^{x\operatorname{tg}\alpha}\cos x, \qquad \arccos x, \qquad \frac{1}{1 - x\sqrt{2 - x^2}}, \qquad \cos x \operatorname{ch} x, \qquad \arcsin x^2,$$

$$\frac{1}{1 - x + x^2}, \qquad (x - \operatorname{tg} x)\cos x, \qquad \mathrm{L}\frac{2}{1 + \sqrt{1 - x}}, \qquad \frac{1}{1 + x + x^2 + x^3}.$$

9911. — **Calculer la dérivée d'ordre n des fonctions :**

$$e^{x^2}, \qquad \frac{x - \cot\alpha}{x^2 + 1}, \qquad \frac{1}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}.$$

9912. — Développer par la formule de Mac-Laurin la fonction y définie par l'équation $\arccos y = k \arccos x$, k étant une constante quelconque.

9913. — Développer $\mathrm{L}x$ par rapport aux puissances de $\frac{1 - x}{1 + x}$.

9914. — Calculer l'ordre infinitésimal de $\operatorname{ch} x - \frac{12 + 5x^2}{12 - x^2}$.

9915. — Établir la formule

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \int_0^h f''(x + h - z)\,z\,dz.$$

9916. — Déterminer un nombre imaginaire z tel que l'on ait $e^z = a + bi$.

9917. — Lieu du point $z = x + yi$, tel que $\frac{z - a}{z - b} = k$, a et b étant des imaginaires données, et le nombre k étant variable, tantôt par son module et tantôt par son argument.

9918. — Calculer le module et l'argument de chacune des racines de l'équation $x^3 + 2x^2 + 4 = 0$.

9919. — Calculer les racines cubiques de $i - \sqrt{3}$.

9920. — Calculer le module et l'argument de l'imaginaire $\left[\frac{1 + i + \sqrt{3}(1 - i)}{1 + i}\right]^3$.

9921. — On donne deux variables complexes z et z' liées par la relation $z'^2 = 1 + z$. Trouver le lieu du point z quand le point z' décrit un cercle qui a pour centre l'origine.

9922. — Trouver la limite de $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ pour $x = 0$.

9923. — Limite de $\left(\cos\frac{a}{x} + m\sin\frac{a}{x}\right)^x$ pour x infini.

9924. — Trouver la limite de l'expression $n^2\left(\sqrt[3]{n^3 + an^2 + bn + 1} - \sqrt{n^2 + cn + 1}\right)$ pour n infini.

9925. — Trouver la limite de $x^2\left(\sqrt[3]{x^3 + px^2 + qx + r} - x\right)$ quand x grandit indéfiniment.

9926. — Trouver la limite de $\frac{1}{n} + \frac{1}{n + 1} + \frac{1}{n + 2} + \dots + \frac{1}{2n}$ quand n augmente indéfiniment.

9927. — Limite de $\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n + 1)(n + 2)\dots 2n}$ pour n infini.

9928. — Limite de $x^m\mathrm{L}x$ pour $x = 0$.

9929. — Trouver la limite de $\left(\frac{a + bn + n^2}{c + dn + n^2}\right)^n$ pour n infini.

9930. — Limite de $\left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$ pour $x = a$.

9931. — Le produit $\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1\left(1 + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\dots\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ a-t-il une limite pour n infini ?

9932. — On considère la fonction $y = \frac{\operatorname{tg}^2 x + 2\mathrm{L}\cos x}{x^p}$. Déterminer p de façon que y ait une limite pour $x = 0$, et calculer cette limite.

(A suivre.)

CONCOURS DE 1919

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Mathématiques, 1re composition.

I. — **2294**. 1° Étudier l'intersection C de la sphère $x^2+y^2+z^2=1$ et du cylindre $x^2+y^2=x$.

On exprimera les coordonnées d'un point M de C en fonction de l'angle φ que fait avec Ox la projection du rayon OM sur xOy.

On construira la projection de la courbe C sur yOz; on déterminera les rayons de courbure aux points où elle coupe Oz.

2° Étudier le mouvement d'un mobile décrivant la courbe C de manière que le vecteur accélération coupe constamment Oz; que, de plus, pour $t=0$, on ait $\varphi=0$, $\frac{d\varphi}{dt}>0$, et que la courbe C soit entièrement décrite dans le temps 2π.

On exprimera en fonction de φ le temps t, les composantes de la vitesse et de l'accélération et la grandeur de ces deux vecteurs. Dans le mouvement en projection sur xOy, on exprimera l'accélération en fonction de la distance à l'origine.

II. — **2295**. 1° On considère un déterminant d'ordre n dans lequel la troisième ligne a son premier élément nul; la quatrième ligne, ses deux premiers éléments nuls et, d'une manière générale, la ligne de rang p, ses $p-2$ premiers éléments nuls ($p>2$).

Déterminer le nombre des termes différents de zéro dans le développement du déterminant.

2° Même question, en supposant de plus que chacune des deux premières lignes ait ses deux derniers éléments nuls.

(*Durée : 4 h.*)

Mathématiques, 2e composition.

I. — **2296**. On considère l'arc ω, fonction de la variable x, compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et qui a pour sinus

$$\sin\omega=\sqrt{\frac{4x}{15x+60}}.$$

1° Étudier la variation de la fonction $y=\frac{\omega}{x+4}$ et la représenter par une courbe.

2° Déterminer la constante a de façon que x^2y-ax ait une limite finie quand x croît indéfiniment et déterminer cette limite.

II. — **2297**. Relativement à des axes de coordonnées rectangulaires, une surface S a pour équation $x^2+y^2+\lambda z^2=R^2$ dans laquelle λ et R sont des constantes. Une droite D tourne autour d'un point P (a, b, c) dans le plan $z=c$. On considère la droite D′ conjuguée de D par rapport à S et la perpendiculaire commune Δ rencontrant les droites D et D′ respectivement en M et M′.

1° Trouver les lieux géométriques de Δ, de M et de M′.

2° Examiner le cas particulier où S est une sphère.

Il sera tenu compte des remarques et démonstrations géométriques.

(*Durée : 4 h.*)

Épure.

2298. — Un tore ayant pour axe la ligne de terre, on en conserve la partie qui se trouve au-dessus du plan horizontal et en avant du plan vertical de projection. Ce quart de tore est coupé par un paraboloïde hyperbolique. Celui-ci a pour directrices une verticale et une droite de bout, toutes deux bitangentes au tore et rencontrant la ligne de terre : la verticale à droite, la ligne de bout à gauche. Il a pour plan directeur le plan bissecteur du dièdre qui a pour faces le demi-plan vertical situé au-dessus de la ligne de terre et le demi-plan horizontal situé en arrière de la ligne de terre (second bissecteur).

Le solide formé par le quart de tore est coupé par le paraboloïde en deux parties. Représenter celle de ces parties qui est comprise entre le paraboloïde et le plan horizontal.

On prendra pour ligne de terre le petit axe de la feuille. Le centre du tore est au centre de la feuille. Le rayon du cercle générateur est de 7^{cm} et le rayon du cercle de gorge du tore est de 3^{cm}.

N. B. — Pour déterminer des points de la courbe commune au tore et au paraboloïde, on pourra prendre des plans auxiliaires de profil ou bien passant par la ligne de terre.

(*Durée : 4 h.*)

Calcul.

2299. — Dans un triangle on donne, en divisions centésimales,

angle A $= 96^{G}35'28''$; angle B $= 45^{G}39'47''$; périmètre $2p = 1\,268^{m},7$.

Calculer les trois côtés a, b, c, le rayon r du cercle inscrit et la surface S.

Formules :

$$r = p \cdot \operatorname{tg}\frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{C}{2}; \qquad S = pr; \qquad p - a = p \cdot \operatorname{tg}\frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

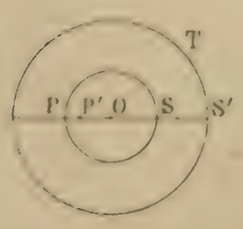
(*Durée : 1 h.*)

Physique.

I. — Exposer le principe et les résultats des expériences d'Amagat sur la compressibilité des gaz aux différentes températures.

Réseaux d'isothermes en coordonnées p et pv. Discussion.

II. — **2300.** 1° Un tube de verre T dont la section est formée de deux cercles de centre O a pour diamètre extérieur $2OS' = 4^{mm}$. Il porte un repère P sur sa paroi intérieure. Parmi les rayons lumineux issus de P, on considère ceux qui, de part et d'autre du diamètre POSS', forment une lame plane perpendiculaire à l'axe du tube et d'angle au sommet très petit. Ils donnent lieu, pour un observateur placé quelque part sur le prolongement de POSS', à une image P'. Calculer le rayon intérieur x du tube sachant que la distance PP' a pour valeur $PP' = \frac{x}{5}$ et que l'indice n du verre est égal à 3/2.



On précisera les conventions adoptées pour les signes des segments dans la formule des foyers conjugués.

2° On introduit dans ce tube une goutte G d'un liquide pesant 23^{mg} et mouillant parfaitement le verre. Elle y occupe, à la température ambiante, une longueur, $l = 28^{mm},95$ comptée entre les plans tangents aux sommets des deux ménisques supposés sphériques. Calculer la densité ρ du liquide.

3° Sachant que, dans l'expérience de Jurin effectuée à la même température, avec le même liquide et le même tube, le volume du liquide soulevé est égal à celui de la goutte G, calculer en unités C. G. S. la tension superficielle A du liquide à la température de l'expérience.

4° Exprimer ρ et A dans le système d'unités admettant pour grandeurs fondamentales le millimètre, le milligramme-force et la minute.

(*Durée : 3 h.*)

Chimie.

I. — *L'acide azotique.* — Ses préparations industrielles, en laissant de côté la description détaillée des appareils utilisés dans la pratique. — Indication des principales propriétés, en insistant sur celles qui sont susceptibles d'applications. — Réactions qui permettent de le caractériser.

II. — **2301.** Étant donnée une solution très étendue de potasse qui a été additionnée d'une certaine quantité de chlorure de potassium, on y dirige à froid un courant de chlore jusqu'à ce qu'il cesse d'être absorbé et l'on admet qu'à ce moment il n'y a pas un excès de chlore libre dissous et que le volume de la solution n'a pas été modifié.

Après avoir constaté que le liquide ainsi obtenu a des propriétés nettement oxydantes, on en prend 10^{cm^3} que l'on étend d'eau de façon à en faire 1 litre et l'on cherche, au moyen d'une solution titrée d'acide arsénieux, quel est le pouvoir oxydant du liquide dilué. On constate ainsi que 10^{cm^3} d'une solution normale d'acide arsénieux exigent, pour leur oxydation, $44^{cm^3},64$ du liquide dilué.

D'autre part, on prend 500^{cm^3} de ce même liquide dilué ; on les évapore lentement à siccité et l'on chauffe progressivement le résidu jusqu'à la température du rouge. Le résidu de cette calcination est repris par l'eau et la solution additionnée d'azotate d'argent. On obtient un précipité dont le poids est de $2^{g},87$.

Déduire de ces données les quantités de potasse, KOH, et de chlorure de potassium contenues dans 100^{cm^3} de la solution initiale.

On indiquera les réactions auxquelles donnent lieu les diverses opérations mentionnées et l'on dira au moyen de quels réactifs on pourra vérifier que le liquide provenant de l'action du chlore sur le mélange initial est doué de propriétés oxydantes.

Poids atomiques : $H = 1$; $Cl = 35,5$; $O = 16$; $K = 39$; $Ag = 108$.

On entend par solution normale d'acide arsénieux une solution telle qu'elle exige, pour son oxydation, un volume de chlore égal au sien, dans les conditions normales de température et de pression.

On prendra pour volume moléculaire celui de l'oxygène, calculé dans les conditions normales, avec la densité de ce gaz égale à 1,105 et la masse du litre d'air égale à $1^g,293$.

(*Durée : 3 h.*)

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES

Cours préparatoires.

Mathématiques.

2302. — I. On considère deux ellipses homothétiques et concentriques, les deux points d'intersection A et B avec l'ellipse extérieure E d'une tangente à l'ellipse intérieure E′, et le pôle M de cette droite par rapport à l'ellipse E. Montrer que :

1° l'aire du triangle ABM,

2° l'aire de la partie de ce triangle intérieure à l'ellipse E sont indépendantes du choix de la tangente AB à l'ellipse E′, et les calculer en fonction des demi-axes a et b de l'ellipse E′ et du rapport d'homothétie $\lambda = \cos\varphi$ de l'ellipse E′ à l'ellipse E. Déterminer la limite du rapport des deux aires considérées lorsque φ est infiniment petit.

II. Traiter la même question en remplaçant les ellipses E et E′ par des hyperboles homothétiques et concentriques H et H′. On désignera leur rapport d'homothétie par $\lambda = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}$ (on pourra commencer par traiter le cas où l'hyperbole H est l'hyperbole équilatère $x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, $y = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ et où AB est parallèle à l'axe des y).

2303. — On considère une ligne brisée $A_0A_1 \ldots A_n \ldots$ ayant tous ses sommets sur l'hyperbole $xy = 1$, A_0 étant au sommet $x = 1$, $y = 1$ de cette hyperbole, ses côtés tangents à l'hyperbole $xy = \lambda^2$ et telle que les abscisses de ses sommets successifs soient croissantes. On posera toujours $\lambda = \frac{1}{2}[e^{\varphi} + e^{-\varphi}]$. Déterminer les coordonnées x_n et y_n du point A_n et la longueur l_n du côté $A_{n-1}A_n$. Montrer que la série

$$f(\lambda) = \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \ldots + \frac{1}{l_n} + \ldots$$

est convergente. Trouver en fonction de λ sa valeur principale pour λ infini. Calculer $f\left(\frac{5}{4}\right)$ à 0,0001 près.

N. B. — L'usage des tables de logarithmes est interdit.

L'attention des candidats est attirée sur le fait que les calculs à effectuer sont extrêmement simples, à condition d'utiliser quelques remarques géométriques. Les solutions géométriques, clairement exposées, seront préférées aux solutions purement algébriques.

(*30 avril, de 8 h. à midi.*)

Mécanique.

2304. — Une ligne droite et une circonférence tournent chacune d'un mouvement uniforme avec des vitesses respectives w et w' autour d'un point fixe O commun aux deux lignes.

1° Chercher le lieu décrit par le point de rencontre M des deux lignes.

Le construire dans l'hypothèse où $m = \frac{w}{w'} = -1$. On déterminera le rayon de courbure aux points

remarquables : l'aire d'une boucle fermée de cette courbe, et le volume décrit par cette boucle tournant autour de son axe de symétrie.

Montrer qu'il existe deux droites qui interceptent sur la perpendiculaire au rayon OM en M une longueur constante.

2° Toujours dans l'hypothèse $m = -1$, déterminer les composantes de la vitesse et de l'accélération du point M suivant le rayon vecteur et la perpendiculaire à ce rayon dans le sens des arcs croissants.

Porter sur le vecteur OM une longueur OP égale à la vitesse du point M; construire le lieu du point P.

(*2 mai, de 8 h. à midi.*)

Calcul.

2305. — Dans un triangle, on connaît deux côtés :

$$a = 105^m,$$
$$b = 88^m,$$

et l'angle compris entre ces côtés, dont la valeur en grades est

$$C = 35^G 25' 00''.$$

Calculer le côté c, les angles A et B, le rayon r du cercle inscrit et le rayon R du cercle circonscrit.

Les angles A et B, après avoir été calculés en grades, seront transformés en degrés.

(*29 avril, de 3 h. à 4 h. 1/2.*)

Physique.

I. — **2306.** Avec un même liquide, on réalise les expériences suivantes :

1° Un microscope, dont l'axe est vertical, est mis au point sur l'intersection J de deux traits finement tracés sur un plan horizontal; puis, ayant déposé en J une goutte sphérique du liquide, on rétablit la mise au point par un déplacement h du microscope suivant son axe.

2° Après avoir provoqué l'accroissement de la goutte G par l'absorption d'une goutte voisine G', on perd la mise au point que l'on retrouve par un nouveau déplacement, h', du microscope.

3° On enfonce l'extrémité d'un tube capillaire en verre de a^{mm} de diamètre dans un vase renfermant du liquide donné, de masse spécifique p, et, après avoir aspiré du liquide dans le tube pour mouiller le tube, on constate que le liquide prend une dénivellation verticale permanente H.

4° Un miroir plan renvoie verticalement de bas en haut la lumière provenant d'un collimateur. Cette lumière tombe sur une lentille plan convexe, L, faite avec un verre d'indice N, et obturant un tube dont l'axe est vertical ; la face plane de la lentille est tournée du côté d'où vient la lumière et le rayon de la face courbe a pour mesure r. Ayant versé du liquide étudié dans le tube, jusqu'à ce que l'image de la fente du collimateur se forme dans le plan de la surface libre du liquide, on mesure la hauteur H_1 de la colonne liquide ainsi obtenue.

Déduire de là :

a) le rapport des masses des gouttes G et G';

b) l'indice n du liquide et les rayons des deux gouttes G et G';

c) la tension superficielle A du liquide.

Application numérique :

$$h = 2^{mm}; \qquad h' = 0^{cm},5; \qquad a = 0^{mm},5; \qquad p = 1,02;$$

intensité de la pesanteur : $g = 981$; $H = 6^{cm}$;

$$N = 1,52; \qquad r = 5^{cm},2; \qquad H_1 = 37^{cm}.$$

En supposant une erreur possible de 5 millièmes sur les longueurs mesurées, évaluer l'ordre de grandeur des erreurs qui en résulteraient sur les résultats calculés.

II. — La température. Sa détermination au moyen du thermomètre normal.

(*29 avril, de 8 h. à midi.*)

Chimie.

I. — Transformations réciproques des composés oxygénés de l'azote. Rôle de ces transformations dans la fabrication de l'acide sulfurique et de l'acide nitrique.

II. — **2307.** On traite, à chaud, par un excès d'acide chlorhydrique concentré, $3^g,36$ de sulfure d'antimoine. Décrire la réaction et indiquer la nature et le volume du gaz obtenu.

On prélève 30cm3 du gaz obtenu, supposé pur, et on l'introduit dans une cloche courbe où l'on a placé un morceau d'étain. On chauffe longuement, puis on laisse refroidir.

Indiquer la nature et le volume du gaz restant.

Montrer comment cette dernière expérience permet de déterminer la composition du gaz fourni par la première expérience.

Données et renseignements numériques :

Poids atomiques : Sb = 120; S = 32.

Le volume de 30cm3 a été mesuré sec à 0° et sous la pression de 760mm. Les volumes demandés seront évalués dans les mêmes conditions.

(3 mai, de 8 h. à midi.)

DEUXIÈME PARTIE

ANALYSE

2161. — *En désignant par a et b deux nombres réels, tels que a soit plus petit que b, indiquer la valeur de l'intégrale définie*

$$\int_a^b (x^2 - a^2)\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,dx.$$

Le radical étant toujours réel dans l'intervalle (a, b), l'élément différentiel est toujours bien défini, sauf pour $x = b$. Pour $x = b$, l'élément différentiel est infini, l'ordre d'infinitude est $\frac{1}{2}$ (en enlevant le facteur dx, bien entendu) ; donc l'intégrale définie a une valeur finie bien déterminée.

Cherchons d'abord l'intégrale indéfinie

$$\int (x^2 - a^2)\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,dx.$$

Elle s'écrit

$$\int \frac{(x^2 - a^2)(x-a)}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx,$$

et se décompose en quatre intégrales J_3, J_2, J_1, J_0, J_n désignant l'intégrale

$$J_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}},$$

$$J_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{-x^2 + (a+b)x - ab}}.$$

Dérivons

$$x^n\sqrt{-x^2 + (a+b)x - ab};$$

nous aurons

$$nx^{n-1}\sqrt{-x^2 + (a+b)x - ab} + x^n \frac{-2x + a + b}{2\sqrt{-x^2 + (a+b)x - ab}},$$

puis

$$\frac{2nx^{n-1}[-x^2 + (a+b)x - ab] - 2x^{n+1} + (a+b)x^n}{2\sqrt{-x^2 + (a+b)x - ab}},$$

$$\frac{-2(n+1)x^{n+1} + (2n+1)(a+b)x^n - 2nabx^{n-1}}{2\sqrt{-x^2 + (a+b)x - ab}}.$$

Intégrons alors : nous aurons

$$-(n+1)J_{n+1} + \frac{2n+1}{2}(a+b)J_n - nabJ_{n-1} = x^n\sqrt{-x^2+(a+b)x-ab}.$$

En partant de $n = 2$, nous aurons J_3 en fonction de J_2 et J_1.

Appelons maintenant I_n l'intégrale définie, prise entre les limites a et b ; nous obtiendrons

$$-3I_3 + \frac{5(a+b)}{2}I_2 - 2abI_1 = 0,$$

puis, pour $n = 1$,
$$-2I_2 + \frac{3}{2}(a+b)I_1 - abI_0 = 0;$$

enfin, pour $n = 0$,
$$-I_1 + \frac{1}{2}(a+b)I_0 = 0.$$

Tout peut donc s'exprimer en fonction de I_0 :

$$I_1 = \frac{a+b}{2}I_0,$$

$$I_2 = \left[\frac{3}{8}(a+b)^2 - \frac{ab}{2}\right]I_0,$$

$$I_3 = \frac{5}{6}(a+b)\left[\frac{3}{8}(a+b)^2 - \frac{ab}{2}\right]I_0 - \frac{ab}{3}(a+b)I_0.$$

Or l'intégrale demandée est
$$I_3 - aI_2 - a^2I_1 + a^3I_0.$$

Elle a donc pour valeur

$$I_0\left[\frac{5}{16}(a+b)^3 - \frac{3}{4}ab(a+b) - \frac{3a}{8}(a+b)^2 + \frac{a^2b}{2} - a^2\frac{a+b}{2} + a^3\right].$$

Il n'y a donc plus qu'à calculer I_0 et à réduire la quantité entre crochets. Cette dernière se réduit aisément à $\frac{(a-b)^2(7a+5b)}{16}$.

Pour avoir I_0, calculons
$$\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+(a+b)x-ab}};$$

cette intégrale s'écrit

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{(a-b)^2}{4} - ab - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}}.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{(b-a)^2}{4} - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}}.$$

Posons $x - \frac{a+b}{2} = t\frac{b-a}{2}$; elle devient $\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t$; en fonction de x, $\arcsin\frac{2x-a-b}{b-a}$. Pour $x = a$, cet arc est égal à $-\frac{\pi}{2}$, et, pour b, il est égal à $+\frac{\pi}{2}$: donc $I_0 = \pi$ et l'intégrale proposée a pour valeur

$$\frac{\pi}{16}(7a+5b)(b-a)^2.$$

Bonnes solutions : MM. L. Nauguelle, à La Châtre ; P. Vialleront, élève au lycée de Montpellier ; A. Berlanger, à Saint-Cloud ; L. Simon, à Fourmies ; M. Roi, E. Dion, à Saint-Cloud ; E. Rouge, à Sainte-Barbe ; A. Rousseau, à Fourmies-en-Weppes ; A. Darmon, à Barfleur ; M. Roux, au Creusot.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2144. — *En désignant par ρ le rayon de courbure d'une courbe et par α l'angle que fait la tangente au point correspondant avec Ox, trouver les courbes telles que*

$$\rho \cos \alpha = k,$$
$$\rho \cos^2 \alpha = k,$$
$$\rho \cos^3 \alpha = k,$$
$$\frac{\rho}{\cos \alpha} = k,$$

k désignant à chaque fois une constante.

Supposons qu'on ait d'une manière générale

$$\rho = f(\alpha),$$

$f(\alpha)$ étant une fonction quelconque de α. Si on désigne par ds la différentielle de l'arc, on a les formules bien connues

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha}, \qquad \frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \qquad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha.$$

On en déduit successivement

$$\frac{ds}{d\alpha} = f(\alpha), \qquad ds = f(\alpha)d\alpha,$$

puis

$$dx = \cos \alpha ds = \cos \alpha f(\alpha)d\alpha, \qquad dy = \sin \alpha ds = \sin \alpha f(\alpha)d\alpha,$$

et enfin, en intégrant,

$$(1) \qquad x - x_0 = \int f(\alpha) \cos \alpha d\alpha, \qquad y - y_0 = \int f(\alpha) \sin \alpha d\alpha,$$

x_0, y_0 désignant des constantes arbitraires.

Nous obtenons ainsi les équations paramétriques de la courbe ; si nous pouvons éliminer α entre ces deux équations, nous aurons l'équation cartésienne de la courbe.

Examinons maintenant les cas particuliers de l'énoncé.

1. $f(\alpha) = \dfrac{k}{\cos \alpha}$.

Les formules (1) deviennent

$$x - x_0 = \int k d\alpha = k\alpha,$$

$$y - y_0 = \int \frac{k \sin \alpha d\alpha}{\cos \alpha} = -k \int \frac{d \cos \alpha}{\cos \alpha} = -k \mathrm{L} \cos \alpha.$$

L'élimination de α est facile et donne

$$y - y_0 = -k \mathrm{L} \cos \frac{x - x_0}{k}.$$

La construction de cette courbe ne présente aucune difficulté. On peut d'ailleurs transporter l'origine au point (x_0, y_0). Cela revient à faire dans les formules (1) $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

2. $f(\alpha) = \dfrac{k}{\cos^2 \alpha}$.

Nous avons, en supposant $x_0 = 0$, $y_0 = 0$,

$$x = k\int \frac{d\alpha}{\cos\alpha} = k\mathrm{L}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$y = k\int \frac{\sin\alpha d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{k}{\cos\alpha}.$$

On en déduit

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right) = e^{\frac{x}{k}}, \qquad \cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right) = e^{-\frac{x}{k}},$$

et, en ajoutant,

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right) = e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}};$$

le premier membre est égal à $\dfrac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$, ou à $\dfrac{2}{\cos\alpha}$, ou encore à $\dfrac{2y}{k}$.

L'équation de la courbe est donc

$$y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right),$$

c'est une chaînette.

3 $f(\alpha) = \dfrac{k}{\cos^3\alpha}$.

Nous avons

$$x = k\int \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = k\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

$$y = k\int \frac{\sin\alpha d\alpha}{\cos^3\alpha} = \frac{k}{2\cos^2\alpha} = \frac{k}{2}(1+\mathrm{tg}^2\alpha)$$

En éliminant $\mathrm{tg}\,\alpha$ on obtient

$$y = \frac{x^2+k^2}{2k};$$

c'est l'équation d'une parabole.

4. $f(\alpha) = k\cos\alpha$.

Les formules (1) nous donnent ici

$$x = k\int \cos^2\alpha d\alpha = \frac{k}{2}\int(1+\cos 2\alpha)d\alpha = \frac{k}{4}(2\alpha+\sin 2\alpha),$$

$$y = k\int \sin\alpha\cos\alpha d\alpha = \frac{k}{2}\int \sin 2\alpha d\alpha = -\frac{k}{4}\cos 2\alpha.$$

Posons $2\alpha = \pi - u$, u étant un nouveau paramètre, les formules deviennent

$$x = \frac{k}{4}(\pi+u-\sin u), \qquad y = \frac{k}{4}\cos u,$$

ou, en transportant l'origine au point $x = \dfrac{k\pi}{4}$, $y = \dfrac{k}{4}$,

$$x = \frac{k}{4}(u-\sin u), \qquad y = -\frac{k}{4}(1-\cos u).$$

On reconnaît les équations paramétriques de la cycloïde.

Remarque. — Nous proposons à nos lecteurs l'établir les résultats suivants : si $f(\alpha) = k$, la courbe

est un cercle ; $f(\alpha) = ke^{m\alpha}$, une spirale logarithmique ; $f(\alpha) = k\alpha$, une développante de cercle ; $f(\alpha) = k \sin m\alpha$, une épicycloïde ; $f(\alpha) = \dfrac{p}{(1 - e^2 \cos^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}}$, une conique.

L. NAUCELLE, à la Châtre.

Bonnes solutions par MM. R. Dufour, école normale de Nancy ; G. Lach, à Douai ; L. Simon, à Fourmies ; L. Thiringer ; Marcel Ullmann, 47e d'artillerie, à Héricourt.

2153. — *On considère une courbe* (C) *rapportée à des axes rectangulaires* Ox, Oy, *et dans laquelle l'abscisse* x *de chaque point* M *s'exprime en fonction de l'angle* α *que forme la tangente avec* Ox, *par la relation*

$$(1) \qquad x = a(1 - \cos \alpha).$$

Démontrer que l'ordonnée y *vérifie l'équation différentielle*

$$(2) \qquad \frac{dy}{d\alpha} = \frac{a \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}.$$

Déduire de l'équation (2) *l'expression explicite de* y *en fonction de* α *et déterminer la constante d'intégration de façon que* y *s'annule pour* $\alpha = 0$.

La courbe (C) *étant ainsi définie, on demande d'en étudier la forme, d'en construire l'asymptote, d'en calculer le rayon de courbure, les coordonnées du centre de courbure et la longueur d'arc comptée à partir de l'origine.*

(*Certificat de mathématiques générales, Rennes, juin 1912.*)

On a $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$, ou $dy = \operatorname{tg} \alpha dx$; comme x est égal à $a(1 - \cos \alpha)$, dx est égal à $a \sin \alpha d\alpha$, et, par suite,

$$dy = a \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha d\alpha, \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{d\alpha} = a \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}.$$

On en tire
$$\frac{dy}{d\alpha} = a \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{\cos \alpha} - a \cos \alpha,$$

et, en intégrant, on a
$$y = a \mathrm{L} \left| \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \right| - a \sin \alpha + \mathrm{C}.$$

Pour que y s'annule pour $\alpha = 0$, il faut prendre $\mathrm{C} = 0$. Les équations paramétriques de la courbe (C) sont donc

$$x = a(1 - \cos \alpha),$$

$$y = a \mathrm{L} \left| \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \right| - a \sin \alpha,$$

ou encore, en transportant l'origine au point $x = a$, $y = 0$,

$$x = -a \cos \alpha, \qquad y = a \mathrm{L} \left| \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \right| - a \sin \alpha.$$

On obtiendra toute la courbe en faisant varier α dans un intervalle quelconque d'étendue égale à 2π.

Si nous changeons α en $\pi + \alpha$, $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right)$ se change en $-\dfrac{1}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right)}$, le logarithme de la valeur absolue change de signe ; par suite, x et y changent de signe, et la courbe est symétrique par rapport à l'origine. De plus, si nous changeons α en $-\alpha$, x ne change pas et y change de signe, donc la courbe est symétrique par rapport à Ox.

Il suffira donc de faire varier α de 0 à $\frac{\pi}{2}$, de construire la branche de courbe correspondante, et d'achever par symétrie par rapport aux deux axes.

Quand α croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, x croît de $-a$ à 0, et y croît de 0 à $+\infty$. On obtient la branche de courbe AB, tangente en A à Ox, et asymptote à Oy; on en déduit aisément la courbe tout entière.

Calculons d'abord la longueur de l'arc AM; nous avons

$$dx = a \sin \alpha d\alpha, \qquad dy = \frac{a \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} d\alpha,$$

et

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha d\alpha^2,$$

ou, en supposant que s varie dans le même sens que α,

$$ds = a \operatorname{tg} \alpha d\alpha,$$

puis

$$s = -a \mathrm{L} \cos \alpha,$$

puisque s s'annule pour $\alpha = 0$.

Le rayon de courbure au point M a pour valeur $\frac{ds}{d\alpha}$, ou $a \operatorname{tg} \alpha$.

Enfin les coordonnées du centre de courbure sont

$$x_1 = x + \frac{ds}{d\alpha} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -a \cos \alpha - a \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha = -\frac{a}{\cos \alpha},$$

$$y_1 = y + \frac{ds}{d\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = a \mathrm{L} \left| \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \right|.$$

Remarques. — Cherchons le lieu de ce centre de courbure; nous avons

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = e^{\frac{y_1}{a}}, \qquad \text{puis} \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = e^{-\frac{y_1}{a}};$$

en ajoutant, il vient

$$e^{\frac{y_1}{a}} + e^{-\frac{y_1}{a}} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2}{\cos \alpha}$$

ou

$$e^{\frac{y_1}{a}} + e^{-\frac{y_1}{a}} = -\frac{2x_1}{a}.$$

Ce lieu est une chaînette. On en conclut que la courbe (C) est une tractrice.

C'est ce qu'on peut d'ailleurs vérifier directement, en calculant les coordonnées du point P où la tangente en M rencontre Oy; on trouve aisément que $MP = a$.

L. NAUCELLE, à la Châtre.

Bonnes solutions par MM. Betbezé-Culi, lycée de Toulouse; Pierre Delattre, collège Rollin; Emile Dion, école normale supérieure de Saint-Cloud; R. Dufour, école normale de Nancy; Louis Geoffroy, conducteur des ponts et chaussées, à Péronne; Henri Japhet, collège Chaptal; G. Lach, à Douai; R. Malaise, à Denain; E. Rouge; A. Rousseau; L. Simon; Gaston Singier, à Armentières; Marcel Ullmann, 47e d'artillerie, à Héricourt.

CONCOURS DE 1919

ÉCOLE CENTRALE

Géométrie analytique.

2308. — On considère la cubique, $y^3(m+1)^3 - m(m+1)^3y^2x - m^2(m+1)^2ax^2 + 2a^2(m+1)y = a^3$, rapportée à deux axes rectangulaires Ox et Oy; a désigne une longueur positive donnée et m un paramètre variable.

On demande :

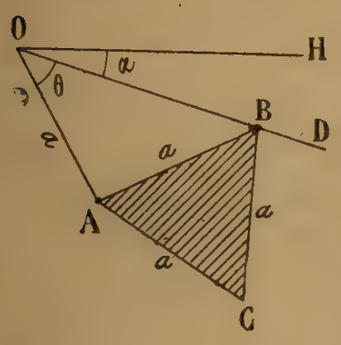
1° de former l'équation de l'asymptote rectiligne de cette cubique;

2° de trouver, reconnaître et construire l'enveloppe de cette asymptote, lorsque m varie;

3° de trouver, reconnaître et construire le lieu du point où la cubique est coupée par cette asymptote.

Mécanique.

2309. — On considère une tige rectiligne OD, fixe, non déformable, d'épaisseur négligeable, faisant un angle donné α avec l'horizon OH, et en dessous; et une plaque ABC de poids donné P, homogène, non déformable, d'épaisseur négligeable et ayant la forme d'un triangle équilatéral de côté donné a. Au sommet A est attaché un fil flexible, OA, de poids négligeable, de longueur invariable égale au côté a, et dont l'extrémité O est fixe. Un autre sommet, B, de la plaque est assujetti à glisser sans frottement sur la tige OD, dont la longueur est supérieure à $2a$.

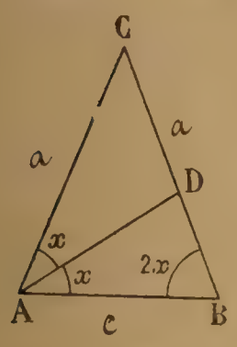


On demande de calculer la tangente trigonométrique de l'angle AOB, ou θ, correspondant à la position d'équilibre de la plaque ABC, et de reconnaître si cet équilibre est stable. Calculer la réaction de la tige et la tension du fil pour cette position d'équilibre.

(*Durée : 4 h.*).

Trigonométrie.

2310. — Dans un triangle isocèle ABC où AC = BC, on désigne par $2x$ la valeur commune des angles A et B, et par D le point de rencontre de la bissectrice intérieure de l'angle A avec le côté opposé. On donne la longueur l de la bissectrice AD et la longueur m de la moyenne géométrique entre les segments BD et DC que cette bissectrice détermine sur le côté opposé :



$$AD = l, \quad BD.\,DC = m^2.$$

$ac = l^2 + m^2$ $\quad \frac{a+c}{a} = \sqrt{1+\frac{c}{m}}$

Calculer cos x en fonction des données, et trouver la condition qui doit exister entre ces données pour que le problème soit possible.

Application numérique : $l = 3^m$ et $m = 4^m$. Calculer dans ce cas, à un centimètre près, les rayons du cercle circonscrit, du cercle inscrit, et des cercles exinscrits au triangle ABC.

Nota. — Les considérations géométriques seront favorablement appréciées.

(*Durée : 2 h.*)

Calcul.

2311. — Calculer, au moyen des tables de logarithmes, les plus petits angles positifs a, b, c, A et B, vérifiant les équations

$$\operatorname{tg} a = \sqrt{\frac{35\,435}{58\,244}}, \qquad \operatorname{tg} b = \sqrt{\frac{42\,382}{63\,425}}, \qquad \cos c = \cos a \,.\, \cos b,$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}, \qquad \operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin a}.$$

(*Durée : 1 h.*)

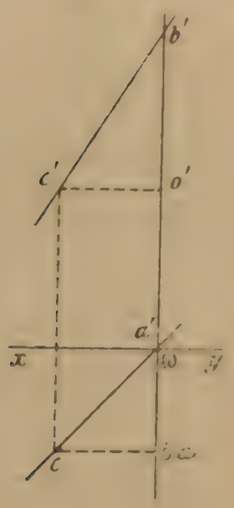
Épure de Géométrie descriptive.

2312. — Ni cadre, ni titres, ni flèches.

Nom et signature au bas et à droite, à moins de 5cm du coin de la feuille.

xy est le petit axe de la feuille, ω est son centre.

$\omega o' = 70^{mm}$, $\omega b' = 140^{mm}$, $\omega a = ac = o'c' = 45^{mm}$; ac et $o'c'$ sont parallèles à xy.



Un ellipsoïde de révolution a pour axe le segment vertical (ab, $a'b'$), et il est tangent au plan vertical de projection.

Un cylindre, dont la trace sur le plan horizontal est un cercle, passe par les deux sommets de l'ellipsoïde (a, a') et (b, b' : une de ses génératrices a pour projection horizontale ωc et pour projection verticale $b'c'$.

On cherchera l'intersection de l'ellipsoïde et du cylindre, et on représentera, par ses deux projections, la portion de l'ellipsoïde, supposé solide et opaque, extérieure au cylindre.

Nota. — Le résultat seul sera dessiné à l'encre noire : lignes vues en traits pleins, lignes cachées en points ronds. Tout le reste en traits rouges pleins.

On fera les constructions nécessaires pour la détermination d'un point de la courbe d'intersection et de la tangente en ce point, des points et tangentes remarquables.

Les tangentes trouvées seront tracées à l'encre rouge, et très légèrement renforcées aux environs des points de contact.

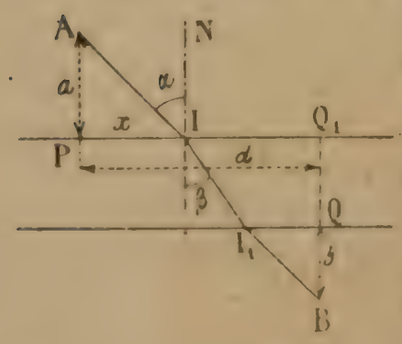
Les traits noirs et les traits rouges devront être assez fins.

(*Durée* : 4 h.)

Physique.

I. — *Sphéromètre* : Principe, description, perfectionnements, usages et sensibilité (avec figures).

II. — **2313.** Deux points, A et B, dans le vide, sont séparés par une lame de verre à faces parallèles, d'épaisseur e; leurs distances aux faces sont respectivement $AP = a$ et $BQ = b$; la distance PQ_1 des pieds des perpendiculaires AP et BQ_1 est égale à d.



Écrire l'équation qui fait connaître la distance $PI = x$ à laquelle un rayon de lumière monochromatique, pour lequel l'indice du verre est N, et qui passe par les deux points donnés A et B, coupe, en partant du point A, la première face de la lame.

Écrire cette équation dans le cas où le point B vient sur la seconde face de la lame, et, sachant que la lumière passe de A à B dans le temps minimum, déterminer la relation qui existe entre les vitesses V et V' de la lumière dans le vide et dans le verre, d'une part, et les angles α et β, d'incidence et de réfraction au point I, d'autre part.

Chimie.

I. — Anhydride et acide boriques.

II. — **2314.** *1re opération* : *Un* litre d'oxyde azotique se combine à un volume V_1 d'oxygène pour former de l'anhydride azoteux que l'acide sulfurique en excès absorbe ensuite en produisant du sulfate acide de nitrosyle.

Formuler les réactions, et calculer V_1.

2e opération : *Un* litre d'oxyde azotique se combine à un volume V_2 d'oxygène pour former du peroxyde d'azote que l'acide sulfurique en excès absorbe ensuite en produisant du sulfate acide de nitrosyle et de l'acide azotique.

Formuler les réactions, et calculer V_2.

3e opération : Le liquide obtenu dans la première opération décolore une solution de permanganate de potassium dont le pouvoir oxydant équivaudrait à *un demi*-litre d'oxygène.

Formuler la réaction, et expliquer le résultat numérique.

4e opération : Le liquide obtenu dans la deuxième opération, traité par du mercure à froid, dégage *un* litre d'oxyde azotique.

Formuler les réactions, et expliquer le résultat numérique.

(*Durée* : 3 h.)

Coulommiers. — Imp. PAUL BRODARD. *Le Rédacteur-Gérant* : H. VUIBERT.

30e Année. Novembre 1919. N° 2.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LA SOMME DES PUISSANCES SEMBLABLES DES n PREMIERS NOMBRES ENTIERS (*Suite*)

par M. **R. Dontot**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de jeunes filles de Grenoble.

II. — La méthode développée dans le paragraphe précédent n'est véritablement propre qu'à calculer rapidement une somme de rang donné S_p sans passer par les intermédiaires S_{p-1}, S_{p-2}, ... S_1. S'il s'agit de calculer les sommes S_p de proche en proche, il est préférable d'employer un procédé automatique et rapide, qui n'utilise que des calculs d'une très grande simplicité.

Proposons-nous de démontrer qu'il existe et de former un polynome $\varphi_{p+1}(x)$, de degré $(p+1)$, en x, jouissant des deux propriétés suivantes :

1° Il vérifie l'identité

$$\varphi_{p+1}(x) - \varphi_{p+1}(x-1) = x^p; \tag{5}$$

2° On a

$$\varphi_{p+1}(0) = 0.$$

Cette dernière égalité est équivalente à

$$\varphi_{p+1}(1) = 1.$$

Pour le voir, il suffit, dans l'identité (5), de donner à x la valeur 1.

Supposons qu'un tel polynome existe; nous nous proposons de former un polynome $\varphi_{p+2}(x)$ tel que l'on ait

$$\varphi_{p+2}(x) - \varphi_{p+2}(x-1) = x^{p+1},$$

$$\varphi_{p+2}(0) = 0, \qquad \text{ou} \qquad \varphi_{p+2}(1) = 1.$$

Désignons par $F(x)$ le polynome

$$F(x) = \int_0^x \varphi_{p+1}(\alpha)\, d\alpha;$$

la différence

$$F(x) - F(x-1),$$

dont la dérivée

$$\varphi_{p+1}(x) - \varphi_{p+1}(x-1) = x^p,$$

par hypothèse, est égale à $\dfrac{x^{p+1}}{p+1} + \alpha$, α étant une constante :

$$F(x) - F(x-1) = \frac{x^{p+1}}{p+1} + \alpha.$$

Donnons à x la valeur 1 :

$$F(1) - F(0) = \frac{1}{p+1} + \alpha, \qquad F(0) = 0.$$

$$\alpha = F(1) - \frac{1}{p+1}.$$

En définitive, on a donc

$$F(x) - F(x-1) = \frac{x^{p+1}}{p+1} + \left(F(1) - \frac{1}{p+1}\right).$$

Il devient évident, dès lors, que le polynome

$$\varphi_{p+2}(x) = (p+1)F(x) + [1 - (p+1)F(1)]x \tag{6}$$

répond à la question.

On a, en effet,

$$\varphi_{p+2}(x) - \varphi_{p+2}(x-1) = (p+1)[F(x) - F(x-1)] + [1 - (p+1)F(1)] = x^{p+1},$$

et

$$\varphi_{p+2}(0) = 0.$$

L'existence d'un polynome φ_{p+1} entraine donc celle du polynome φ_{p+2} : or, de toute évidence,

$$\varphi_1(x) = x;$$

donc $\varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_p$ existent, et même la formule (6) permet de les former de proche en proche.

On aura ainsi

$$\varphi_1 = x,$$

$$\varphi_2 = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2},$$

$$\varphi_3 = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}.$$

De même,

$$\varphi_4 = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4},$$

$$\varphi_5 = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x}{30},$$

$$\varphi_6 = \frac{x^6}{6} + \frac{x^5}{2} + \frac{5x^4}{12} - \frac{x^2}{12},$$

$$\varphi_7 = \frac{x^7}{7} + \frac{x^6}{2} + \frac{x^5}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x}{42},$$

$$\varphi_8 = \frac{x^8}{8} + \frac{x^7}{2} + \frac{7x^6}{12} - \frac{7x^4}{24} + \frac{x^2}{12}.$$

Propriétés des polynomes φ_p.

1°

$$\varphi_{p+1}(n) = S_p.$$

Dans l'identité (5), donnons à x les valeurs n, $n-1$, $n-2$, ... 2, 1 : nous obtenons

$$\varphi_{p+1}(n) - \varphi_{p+1}(n-1) = n^p,$$
$$\varphi_{p+1}(n-1) - \varphi_{p+1}(n-2) = (n-1)^p,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_{p+1}(2) - \varphi_{p+1}(1) = 2^p,$$
$$\varphi_{p+1}(1) - 0 = 1^p.$$

En ajoutant ces égalités membre à membre, il vient

$$\varphi_{p+1}(n) = S_p.$$

2° *Les polynomes* $\varphi_p(x)$ *sont divisibles par* $x+1$.

Dans l'identité (5), donnons à x la valeur 0; il vient

$$\varphi_{p+1}(0)-\varphi_{p+1}(-1)=0,$$

c'est-à-dire

$$\varphi_{p+1}(-1)=0,$$

C. Q. F. D.

3° *Les polynomes* $\varphi_{p+1}(x)-\frac{x^p}{2}$ *ne contiennent que des termes de même parité.*

Posons

$$f_{p+1}(x)=\varphi_{p+1}(x)-\frac{x^p}{2}.$$

On a, évidemment,

$$f_{p+1}(x)-f_{p+1}(x-1)=\frac{x^p+(x-1)^p}{2}. \tag{7}$$

Par hypothèse, $\varphi_{p+1}(1)=1$, donc $f_{p+1}(1)=\frac{1}{2}$; de même $\varphi_{p+1}(0)=0$, donc $f_{p+1}(0)=0$.

Donnons, dans l'identité (7) à x les valeurs 0, $n+1$ et $-n$; on obtient :

pour $x=0$,
$$f_{p+1}(-1)=(-1)^{p+1}\frac{1}{2};$$

pour $x=n+1$,
$$f_{p+1}(n+1)-f_{p+1}(n)=\frac{n^p+(n+1)^p}{2};$$

pour $x=-n$,
$$f_{p+1}(-n)-f_{p+1}(-n-1)=(-1)^p\frac{n^p+(n+1)^p}{2}.$$

De ces formules, on tire

$$f_{p+1}(1)=(-1)^{p+1}f_{p+1}(-1)$$

et

$$f_{p+1}(n+1)-f_{p+1}(n)=(-1)^{p+1}[f_{p+1}(-n-1)-f_{p+1}(-n)].$$

Si, dans cette dernière identité, nous remplaçons n par 1, 2, 3, ..., nous obtenons successivement

$$f_{p+1}(2)=(-1)^{p+1}f_{p+1}(-2),$$
$$f_{p+1}(3)=(-1)^{p+1}f_{p+1}(-3),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

L'équation

$$f_{p+1}(x)=(-1)^{p+1}f_{p+1}(-x),$$

admettant les racines 0, 1, 2, ... n, est vérifiée identiquement : on a donc, *quel que soit* x,

$$f_{p+1}(x)\equiv(-1)^{p+1}f_{p+1}(-x),$$

C. Q. F. D.

4° *Les polynomes* $\varphi_{2p+1}(x)$ *sont divisibles par* $2x+1$ $(p\geqslant 1)$.

Dans l'identité précédente, donnons à x la valeur $\frac{1}{2}$; on a

$$f_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right)=-f_{2p+1}\left(-\frac{1}{2}\right),$$

et comme

$$f_{2p+1}(x)-f_{2p+1}(x-1)=\frac{x^{2p}+(x-1)^{2p}}{2},$$

$$f_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right)-f_{2p+1}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{2p}}.$$

En définitive,

$$f_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right)=-f_{2p+1}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{2p+1}}.$$

Par suite,

$$\varphi_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2^{2p+1}} = -\varphi_{2p+1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2^{2p+1}} = \frac{1}{2^{2p+1}},$$

et enfin

$$\varphi_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^p}, \qquad \varphi_{2p+1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

5° *Les polynomes* $\varphi_{2p}(x)$ *sont divisibles par* $(x+1)^2$ $(p \geqslant 2)$.

En effet, dérivons les deux membres de l'égalité

$$\varphi_{2p}(x) - \varphi_{2p}(x-1) = x^{2p-1}$$

par rapport à x, nous obtenons la nouvelle identité

$$\varphi'_{2p}(x) - \varphi'_{2p}(x-1) = (2p-1)\, x^{2p-2},$$

et, pour $x = 0$,

$$\varphi'_{2p}(0) = \varphi'_{2p}(-1).$$

Or, par hypothèse, $\varphi_{2p}(0) = 0$; le polynome est donc divisible par x et par suite (il est pair) par x^2. Donc $\varphi'_{2p}(0) = 0$. Il s'ensuit que $\varphi'_{2p}(-1) = 0$ et, par conséquent, le polynome $\varphi_{2p}(x)$, déjà divisible par $(x+1)$, l'est encore par $(x+1)^2$.

En résumé, les polynomes φ_{2p} $(p \geqslant 2)$ sont divisibles par $x^2(x+1)^2$; ils n'ont d'autre terme de degré impair que $\frac{x^{2p-1}}{2}$.

Les polynomes φ_{2p+1} $(p \geqslant 1)$ sont divisibles par $x(x+1)(2x+1)$; ils n'ont d'autre terme de degré pair que $\frac{x^{2p}}{2}$.

$$\varphi_2 = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{et} \qquad \varphi_1 = n.$$

Ces propriétés des polynomes φ_p, auxquelles il faut ajouter $\varphi_p(1) = 1$, donnent immédiatement les expressions de S_2, S_3 :

$$S_2 = \varphi_3(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$S_3 = \varphi_4(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Remarque. — Pour le calcul des polynomes φ_p, on remarquera que le polynome φ_{2p} est égal à $(2p-1)$ fois l'intégrale terme à terme du polynome φ_{2p-1}.

On pourra donc se dispenser, si l'on veut, de calculer les polynomes φ_{2p} : le lecteur trouvera facilement la formule qui permet de passer de φ_{2p-1} à φ_{2p+1}. En désignant par ψ_p le polynome

$$\psi_p = \int_0^x F(x)\,dx, \qquad F = \int_0^x \varphi_p(x)\,dx,$$

on a

$$\varphi_{2p+1}(x) = 2p(2p-1)\,\psi_{2p-1}(x) + [1 - 2p(2p-1)\,\psi_{2p-1}(1)]\,x \qquad p \geqslant 3.$$

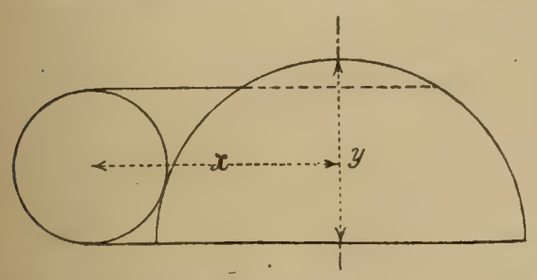
ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

(Cours spéciaux et places réservées aux sous-ingénieurs et conducteurs.)

Concours de 1913.

Algèbre et Analyse.

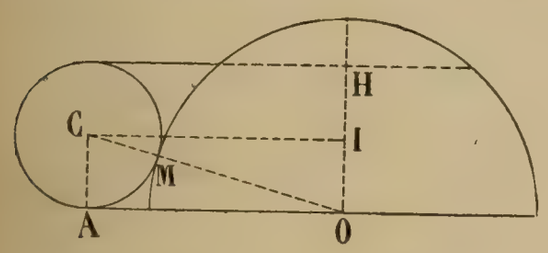
2191. — *Un tore circulaire circonscrit à une sphère de rayon* R *satisfait aux conditions suivantes : le plan du parallèle inférieur passe par le centre de la sphère; le diamètre y du méridien est inférieur ou égal à* R; *le volume du tore est égal à n fois le volume du segment de la sphère compris entre les plans des parallèles extrêmes.*



1° *Former l'équation qui donne la distance x du centre du méridien du tore à l'axe;*

2° *Discuter le problème sur cette équation;*

3° *Prenant* R *égal à l'unité et faisant* $n = k\pi$, *quelles sont les valeurs commensurables de y qui rendent x et k commensurables? Choisir un exemple.*



4° *Parmi ces valeurs commensurables de y, il en est une pour laquelle k prend la valeur* $\frac{63}{97}$; *écrire l'équation en x correspondante (avec* $R = 1$); *calculer x, en déduire y et constater que la valeur ainsi déterminée pour y rentre bien parmi les valeurs de y obtenues au* 3°.

1. D'après le théorème de Guldin, le volume du tore est égal à $\pi\,\overline{CA}^2 . 2\pi C\iota$, ou à $\pi\frac{y^2}{4} . 2\pi x$, ou encore à $\frac{\pi^2 x y^2}{2}$; celui du segment sphérique envisagé est $\frac{\pi y}{3}(3R^2 - y^2)$. On a donc la première équation

$$\frac{\pi^2}{2} x y^2 = n\frac{\pi y}{3}(3R^2 - y^2),$$

ou

$$(1) \qquad 3\pi x y = 2n(3R^2 - y^2).$$

D'autre part, la droite CO qui joint les centres des deux cercles passe par le point de contact M, et le triangle rectangle AOC nous donne $\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2$, ou $\left(\frac{y}{2} + R\right)^2 = x^2 + \frac{y^2}{4}$, ou encore

$$(2) \qquad x^2 = Ry + R^2.$$

Les équations (1) et (2) permettent de calculer x et y; les valeurs obtenues seront solutions du problème si elles sont réelles, positives et si l'on a $y < R$.

De l'équation (2) nous tirons

$$(3) \qquad y = \frac{x^2 - R^2}{R},$$

et en portant cette valeur dans l'équation (1) nous avons

$$(4) \qquad f(x) \equiv 2nx^4 + 3\pi R x^3 - 4nR^2x^2 - 3\pi R^3 x - 4nR^4 = 0.$$

Le système (3), (4) est équivalent au système (1), (2).

2. L'équation (4) présente une variation; donc, elle admet une seule racine positive, x_1. A cette valeur correspond une valeur de y, $y_1 = \frac{x_1^2 - R^2}{R}$, et pour que y_1 soit positif et inférieur à R, il faut qu'on ait $x_1 > R$ et $x_1 < R\sqrt{2}$.

Donc, pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que la racine positive de (4) soit comprise entre R et $R\sqrt{2}$, et pour cela que $f(R)$ et $f(R\sqrt{2})$ soient de signes contraires.

Nous avons $f(R) = -6nR^4$, résultat négatif; $f(R\sqrt{2}) = R^4(3\pi\sqrt{2} - 4n)$. Pour que le problème soit possible, il faut qu'on ait $3\pi\sqrt{2} - 4n > 0$, ou $n < \frac{3\pi\sqrt{2}}{4}$. Si cette condition est remplie, le problème admet une seule solution.

3. Pour $R = 1$ et $n = k\pi$, le système (3), (4) devient

$$y = x^2 - 1, \tag{5}$$

$$2kx^4 + 3x^3 - 4kx^2 - 3x - 4k = 0, \tag{6}$$

et de celle-ci on tire

$$k = \frac{3x(1 - x^2)}{2(x^4 - 2x^2 - 2)} = \frac{3xy}{2(3 - y^2)}. \tag{7}$$

On en conclut que si x et y sont commensurables, k est aussi commensurable.

Par suite, les valeurs de y qui rendent x et k commensurables sont données par la formule

$$y = x^2 - 1,$$

où l'on donne à x une valeur commensurable arbitraire comprise entre 1 et $\sqrt{2}$.

Par exemple, prenons $x = \frac{5}{4}$, nous en tirons $y = \frac{25}{16} - 1 = \frac{9}{16}$, puis, par la formule (7),

$$k = \frac{3xy}{2(3 - y^2)} = \frac{3 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{9}{16}}{2\left[3 - \left(\frac{9}{16}\right)^2\right]} = \frac{90}{229}.$$

4. Si dans l'équation (6) nous remplaçons k par $\frac{63}{97}$, cette équation devient

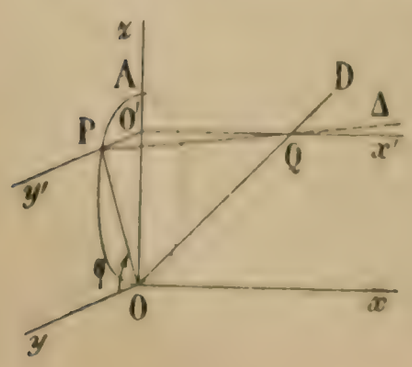
$$42x^4 + 97x^3 - 84x^2 - 97x - 84 = 0;$$

elle doit admettre une racine positive commensurable. En appliquant la méthode habituelle pour calculer les racines commensurables, on trouvera que l'équation admet la racine $x = \frac{4}{3}$, et la valeur de y correspondante est $\frac{7}{9}$.

G. LACH, à Douai, et A. ROUSSEAU à Fournes-en-Weppes.

Bonne solution par M. Beaufrère, conducteur des ponts et chaussées, à Montdoubleau (Loir-et-Cher).

2192. — *Soient trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz et le point A de Oz qui a pour cote +1. Sur OA comme diamètre on décrit un cercle (C) dans le plan yOz. Soit d'autre part D la première bissectrice de l'angle zOx.*



1° On prend un point P sur (C) tel que l'angle de OP avec Oy soit égal à φ. On le joint au point Q de D qui a même cote. On obtient une droite Δ dont on demande les équations. Trouver l'équation de la surface (S) qu'elle engendre quand P décrit (C).

2° On oriente Δ de P vers Q. Désignant par M un point quelconque de Δ, on pose $\overline{PM} = \rho$. Calculer les coordonnées du point M en fonction de ρ et φ.

3° *Ligne de striction de* (S) *et paramètre de distribution relatif à* Δ.

4° *Construire la section de* (S) *par le plan* $x = \frac{3}{8}$.

5° *Le point* M, *supposé de masse* 1, *est attiré par* O *suivant une force égale à* OM. *On l'abandonne de* P *sans vitesse initiale. Calculer* ρ *en fonction du temps. Calculer la réaction.*

Trouver les positions d'équilibre et l'équation polaire du lieu de leurs projections sur le plan xOy. *Construire ce lieu.*

(*Certificat de Mathématiques générales, Clermont, juillet* 1912.)

1. Nous appellerons φ la rotation qui amène Oy sur OP évaluée positivement dans le sens habituel (y, z). Nous aurons les coordonnées du point P en projetant le vecteur OP sur les trois axes de coordonnées et nous aurons ainsi

$$x_P = 0, \qquad y_P = \sin\varphi\cos\varphi, \qquad z_P = \sin^2\varphi.$$

Pour avoir celles du point Q, nous prendrons sur la droite D, dont les équations sont $y = 0$, $z = x$, le point de cote $\sin^2\varphi$; nous aurons

$$x_Q = \sin^2\varphi, \qquad y_Q = 0, \qquad z_Q = \sin^2\varphi.$$

Il est alors facile de trouver les équations de la droite Δ; elle joint les points P et Q et, par suite, a pour équations

$$\frac{x-0}{\sin^2\varphi - 0} = \frac{y - \sin\varphi\cos\varphi}{0 - \sin\varphi\cos\varphi} = \frac{z - \sin^2\varphi}{\sin^2\varphi - \sin^2\varphi},$$

ou

$$(\Delta)\begin{cases} x\cos\varphi + y\sin\varphi - \sin^2\varphi\cos\varphi = 0, \\ z - \sin^2\varphi = 0. \end{cases}$$

Pour avoir l'équation de la surface engendrée par Δ, il suffit d'éliminer φ entre ces deux équations.

Remplaçons d'abord $\sin^2\varphi$ par z dans la première équation, nous aurons une équation homogène en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, qui donne

$$\frac{\sin\varphi}{z-x} = \frac{\cos\varphi}{y} = \frac{1}{\sqrt{(z-x)^2 + y^2}};$$

il suffit de remplacer $\sin^2\varphi$ par sa valeur dans la deuxième équation pour avoir l'équation de la surface :

$$z[(z-x)^2 + y^2] - (z-x)^2 = 0$$

ou

$$(z-x)^2(z-1) + y^2 z = 0.$$

Cette équation représente une surface cubique qui admet comme droite double la droite D,

$$y = 0, \qquad z - x = 0,$$

et qui admet pour directions asymptotiques trois plans :

le plan des xy, $z = 0$,

et les plans imaginaires, $y^2 + (z-x)^2 = 0$.

Les principaux de ces résultats sont évidents *a priori* :

La surface est en effet un conoïde qui admet comme axe la droite D, et comme courbe directrice le cercle C, le plan directeur étant le plan des xy. On sait qu'en général une pareille surface est du 4e ordre. Mais, quand la droite D rencontre la conique, ce qui est le cas actuel, le degré s'abaisse d'une unité, parce que parmi toutes les droites Δ il y a toutes les droites du plan xOy passant au point O, et alors dans l'équation générale un plan se met en facteur.

2. Nous allons maintenant chercher les coordonnées du point M en projetant le contour OPM; à cet effet, nous allons chercher les cosinus directeurs de PQ; les paramètres directeurs sont, comme nous l'avons vu,

$$\sin^2\varphi, \qquad -\sin\varphi\cos\varphi, \qquad 0.$$

En enlevant le facteur $\sin\varphi$, nous avons les cosinus directeurs

$$\sin\varphi, \qquad -\cos\varphi, \qquad 0;$$

les coordonnées du point M s'obtiennent en projetant OPM; ce sont les coordonnées de P, augmentées des projections du vecteur ρ; on trouve ainsi

$$M \begin{cases} x = \rho\sin\varphi, \\ y = \sin\varphi\cos\varphi - \rho\cos\varphi, \\ z = \sin^2\varphi. \end{cases}$$

Ce sont là les équations paramétriques de la surface en fonction des deux paramètres ρ et φ.

3. Pour trouver le plan central, la ligne de striction, ... il est nécessaire d'avoir le plan tangent en un point quelconque de la droite Δ. Un pareil plan contient Δ, donc fait partie du faisceau

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - \sin^2\varphi\cos\varphi + \lambda(z - \sin^2\varphi) = 0.$$

J'aurai λ en écrivant que ce plan contient en outre une autre tangente à la surface, c'est-à-dire la direction d'une autre tangente. Je prends la courbe $\rho = C^{te}$, parmi celles qui passent au point M. Les paramètres directeurs de la tangente sont

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}, \qquad \frac{\partial y}{\partial\varphi}, \qquad \frac{\partial z}{\partial\varphi},$$

c'est-à-dire

$$\rho\cos\varphi, \qquad \cos 2\varphi + \rho\sin\varphi, \qquad \sin 2\varphi.$$

Exprimons que le plan parallèle à l'origine contient ce point; nous aurons

$$\rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi + \sin\varphi\cos 2\varphi + \lambda\sin 2\varphi = 0;$$

d'où on tire λ; le plan a donc pour équation

$$\sin 2\varphi(x\cos\varphi + y\sin\varphi - \sin^2\varphi\cos\varphi) - (\rho + \sin\varphi\cos 2\varphi)(z - \sin^2\varphi) = 0.$$

Quand ρ varie de $-\infty$ à $+\infty$, ce plan tourne autour de la droite Δ.

Le plan asymptote est le plan tangent au point à l'infini, celui qui correspond à ρ infini; il a pour équation

$$z - \sin^2\varphi = 0;$$

c'est le plan parallèle au plan des xy.

Ceci était évident *a priori*, parce que, quand le point M est à l'infini, le plan tangent en ce point doit contenir la génératrice à l'infini de la surface et nous savons que c'est la droite à l'infini du plan des xy.

Le plan central est perpendiculaire au plan asymptote; nous l'obtiendrons donc en annulant le coefficient de z, ce qui nous donnera

$$\rho = -\sin\varphi\cos 2\varphi;$$

ce point, c'est le point central, le lieu de ce point est la ligne de striction,

$$\begin{cases} x = -\sin^2\varphi\cos 2\varphi, \\ y = 2\sin\varphi\cos^3\varphi, \\ z = \sin^2\varphi. \end{cases}$$

Cette courbe est du 4e ordre, car en divisant x et y par $(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)^2 = 1$, et en divisant z par $(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = 1$, x, y, z s'exprimeront rationnellement en fonction de la tangente et on aura

$$\begin{cases} x = \dfrac{-t^2(1 - t^2)}{(1 + t^2)^2}, \\ y = \dfrac{2t}{(1 + t^2)^2}, \\ z = \dfrac{t^2}{1 + t^2}. \end{cases}$$

Ce sont bien les équations paramétriques d'une courbe unicursale du 4e ordre; nous allons montrer qu'elle est située sur une quadrique, et que, par suite, c'est une quartique de Steiner, c'est-à-dire l'intersection de la surface cubique par une quadrique qui a encore avec elles deux génératrices communes.

En effet, en portant $\sin^2\varphi = z$ dans x, on a

$$x = -z(1 - 2\sin^2\varphi),$$

puis,

$$x + z(1 - 2z) = 0,$$

qui représente bien un cylindre parabolique. Ce cylindre a ses génératrices parallèles à l'axe des y; il contient en particulier l'axe des y lui-même, qui est une génératrice de la surface. Il a donc en commun avec la surface cette première droite; mais il en a visiblement une autre à l'infini dans le plan des xy, par conséquent, nous avons établi ce qui était annoncé. Quand on compte sur la génératrice les rayons vecteurs à partir du point central I, qu'on oriente les rotations décrites autour de cette génératrice, et qu'on appelle V l'angle que fait le plan tangent au point M avec le point central, on a

$$\operatorname{tg} V = \frac{IM}{\pm k},$$

k étant un nombre positif de dimension 1 et qu'on appelle le paramètre de distribution. Nous allons chercher l'angle V, c'est-à-dire l'angle des deux plans; le plan central a pour équation

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - \sin^2\varphi\cos\varphi = 0;$$

le plan tangent a pour équation

$$\sin 2\varphi\,(x\cos\varphi + y\sin\varphi - \sin^2\varphi\cos\varphi) - (\rho + \sin\varphi\cos 2\varphi)(z - \sin^2\varphi) = 0,$$

les cosinus directeurs de la normale au premier plan sont

$$\cos\varphi, \qquad \sin\varphi, \qquad 0;$$

ceux de la normale au deuxième plan sont proportionnels à

$$\sin 2\varphi\cos\varphi, \qquad \sin 2\varphi\sin\varphi, \qquad -(\rho + \sin\varphi\cos 2\varphi);$$

par suite,

$$\cos V = \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\sin^2 2\varphi + (\rho + \sin\varphi\cos 2\varphi)^2}};$$

de même,

$$\sin V = \frac{\rho + \sin\varphi\cos 2\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi + (\rho + \sin\varphi\cos 2\varphi)^2}};$$

enfin,

$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho + \sin\varphi\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi}.$$

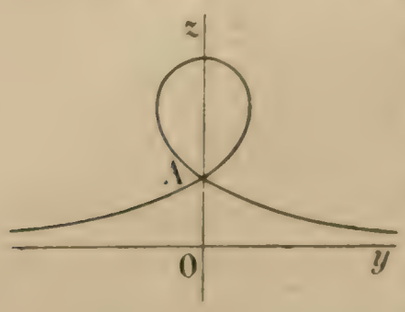
Or, $\sin\varphi\cos 2\varphi$ c'est $-PI$, ρ c'est PM; le numérateur est donc $IM = PM - PI$, et on a

$$\operatorname{tg} V = \frac{IM}{\sin 2\varphi}; \qquad \text{donc} \qquad k = |\sin 2\varphi|.$$

4. Coupons la surface par le plan $x = \frac{3}{8}$, c'est-à-dire remplaçons x par $\frac{3}{8}$ dans l'équation de la surface; nous aurons

$$\left(z - \frac{3}{8}\right)^2 (z - 1) + y^2 z = 0;$$

c'est la projection, sur le plan des yz, de la section; c'est la courbe elle-même en vraie grandeur. Nous voyons de suite que c'est une cubique circulaire à point double, dont la direction asymptotique réelle est $z=0$ et dont le point double est le point $A\left(z=\frac{3}{8},\ y=0\right)$.



Si nous coupons par $z=0$ nous n'avons que des points à l'infini, donc $z=0$ est l'asymptote; si nous coupons par $z=1$, nous avons deux valeurs confondues et nulles de y : c'est le sommet de la courbe. En nous rappelant la forme des strophoïdes nous pouvons tracer immédiatement la courbe.

Toutes les sections de la surface par des plans parallèles au plan des yz sont des cubiques circulaires à point double. Toutes sont symétriques par rapport à Oz, toutes ont leur sommet au point de cote $z=1$ et ont pour asymptote la droite Oy.

Ceci était évident géométriquement en vertu des remarques faites antérieurement.

La surface est une cubique, donc toute section plane est aussi une cubique; la droite D est une droite double, le point de rencontre du plan sécant avec la droite D sera un point double; enfin les directions asymptotiques sont les intersections des trois plans asymptotiques avec le plan parallèle au plan sécant mené par l'origine. Ici le plan sécant est $x=0$ en direction; il y a donc deux directions asymptotiques imaginaires directions isotropes; quant à la troisième c'est Oy; donc les sections par des plans parallèles à yOz sont des cubiques circulaires à point double. On pourrait d'ailleurs donner une démonstration élémentaire de ce fait par la géométrie.

5. Le point M, de masse égale à 1, est astreint à glisser sur la droite Δ, sous l'action d'une force agissante attractive représentée par le vecteur $\overline{MO}$; les composantes de cette force sont

$$-x, \qquad -y, \qquad -z;$$

Si j'appelle F la projection de cette force sur la droite PQ, évaluée en grandeur et en signe, les composantes de cette force sont

$$F\sin\varphi, \qquad -F\cos\varphi, \qquad 0.$$

Enfin les composantes de la réaction de la droite sont

$$X, \qquad Y, \qquad Z,$$

et elles vérifient la condition d'orthogonalité avec la droite Δ;

$$X\sin\varphi - Y\cos\varphi = 0.$$

On en déduit

$$\begin{cases} X = \lambda\cos\varphi, \\ Y = \lambda\sin\varphi. \end{cases}$$

Alors, en écrivant que la force MO est la résultante de ces deux dernières, nous avons les trois équations

$$\begin{cases} -x = \quad F\sin\varphi + \lambda\cos\varphi, \\ -y = -F\cos\varphi + \lambda\sin\varphi, \\ -z = \quad Z. \end{cases}$$

La dernière donne Z, elle n'intervient pas autrement. Les deux premières donnent F :

$$F = y\cos\varphi - x\sin\varphi = -\rho + \sin\varphi\cos^2\varphi.$$

Or F est le produit de la masse par l'accélération, $F=\frac{d^2\rho}{dt^2}$; donc nous aurons ρ en résolvant l'équation différentielle

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + \rho = \sin\varphi\cos^2\varphi.$$

La solution de l'équation sans second membre est classique, c'est $\rho = A\cos t + B\sin t$; d'autre part, $\rho = \sin\varphi\cos^2\varphi$ est évidemment solution de l'équation complète; la solution générale est donc

$$\rho = A\cos t + B\sin t + \sin\varphi\cos^2\varphi.$$

Il reste à tenir compte des circonstances initiales du mouvement, c'est-à-dire de ce qu'à l'origine des temps le point M est en P et que la vitesse initiale est nulle.

La première condition donne $A = -\sin\varphi\cos^2\varphi$; la deuxième donne $B = 0$.

Par suite, $$\rho = \sin\varphi\cos^2\varphi(1 - \cos t).$$

Telle est la loi du mouvement.

Pour avoir la réaction, il faut calculer λ et Z.

Or λ est donné par les deux premières équations, il suffit de les multiplier par $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, et ajouter; on trouve ainsi

$$\lambda = -x\cos\varphi - y\sin\varphi = -\sin^2\varphi\cos\varphi.$$

Nous voyons donc que les composantes de la réaction sont

$$\begin{cases} -\sin^2\varphi\cos^2\varphi, \\ -\sin^3\varphi\cos\varphi, \\ -\sin^2\varphi. \end{cases}$$

Elles sont indépendantes de la position du point mobile sur la droite, elles sont indépendantes du temps.

Pour avoir la position d'équilibre, il suffit de trouver le point pour lequel la force de traction F est nulle.

Ce point est celui dont le ρ est $\sin\varphi\cos^2\varphi$, donc ses coordonnées sont

$$\begin{cases} x = \sin^2\varphi\cos^2\varphi, \\ y = \sin^3\varphi\cos\varphi, \\ z = \sin^2\varphi. \end{cases}$$

Cette courbe est encore une quartique de Steiner, elle est à l'intersection du cylindre parabolique

$$x = z(1 - z)$$

avec la surface cubique

$$y^2 = xz^2.$$

Nous avons à trouver l'équation polaire de la projection de la courbe sur le plan des xy, puis à construire cette courbe. Nous remarquons que les deux valeurs de x et de y peuvent s'écrire

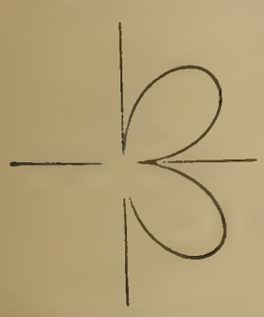
$$x = \cos\varphi \,.\, \sin^2\varphi\cos\varphi,$$
$$y = \sin\varphi \,.\, \sin^2\varphi\cos\varphi,$$

et, en posant $$\rho = \sin^2\varphi\cos\varphi,$$

puis $$\varphi = \omega,$$

l'équation en coordonnées polaires de la courbe est immédiate : $\rho = \sin^2\omega\cos\omega$.

On fera varier ω dans un intervalle d'étendue 2π. Or si on change ω en $-\omega$, ρ ne change pas, donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe polaire et, en prenant comme intervalle total $(-\pi, +\pi)$, on peut supprimer la première moitié et faire varier ω de 0 à π.



Le changement de ω en $\pi - \omega$, change ρ en $-\rho$; on retrouve donc la symétrie par rapport à l'axe polaire, et on fera varier ω seulement de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Pour $\omega = 0$, $\rho = 0$; il devient positif et croît d'abord; pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, il redevient nul, ρ passe donc par un maximum qu'on obtiendra immédiatement en prenant la dérivée. Nous aurons pour la courbe la forme ci-contre.

Remarque I. — Il serait intéressant de trouver le maximum de x, c'est-à-dire la tangente double. Pour cela on forme $x\cos\omega = \sin^2\omega\cos^2\omega = \frac{\sin^2 2\omega}{4}$, et on voit que le maximum de x a lieu pour $\omega = \frac{\pi}{4}$.

Remarque II. — Dans le cas de l'équilibre, l'angle OMP est droit; il a un de ses côtés parallèle au plan xOy; par conséquent il se projette sur ce plan suivant un angle droit. Donc la courbe cherchée est la podaire de l'origine par rapport à l'enveloppe des projections horizontales de la droite Δ. Mais l'enveloppe des projections horizontales de la droite Δ, c'est le contour apparent horizontal de la surface; il est donc l'antipodaire de la courbe actuelle. D'autre part, le plan central est le plan qui projette verticalement la droite Δ; donc le contour apparent horizontal coïncide avec la projection horizontale de la ligne de striction de la surface, que nous avons déjà trouvée.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (*suite*).

9933. — Déterminer p de façon que l'expression

$$\left(1 + \cos^2\frac{\pi}{2n} + \cos^2\frac{2\pi}{2n} + \ldots + \cos^2(n-1)\frac{\pi}{2n}\right)\frac{1}{n^p}$$

ait une limite finie pour n infini.

9934. — Limite de $AL[(x-\alpha)^2+\beta^2] + A'L[(x-\alpha')^2+\beta'^2] + A''L[(x-\alpha'')^2+\beta''^2]$ pour x infini.

9935. — Limite de $\frac{1}{(\sin x + \cos x)\cos x} - L(1+\operatorname{tg} x)$ pour $x = \frac{\pi}{2}$.

9936. — Limite de $\frac{\sqrt{2x - x^2} - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x^3}}$ pour $x = 1$.

9937. — Limite de $\frac{\log_a \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}{x^2}$ pour $x = 0$.

9938. — Limite de $\frac{Lx^2}{\cos\frac{\pi x}{2} + Lx^2}$ pour $x = 1$, de $\frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{L\sin x}$ pour $x = \frac{\pi}{2}$.

9939. — Trouver la limite du produit

$$\left[\left(1+\frac{a-1}{m}\right)\left(1+2\frac{a-1}{m}\right)\left(1+3\frac{a-1}{m}\right)\ldots\left(1+m\frac{a-1}{m}\right)\right]^{\frac{a-1}{m}}$$

quand m croît indéfiniment par valeurs entières et positives.

9940. — Trouver la limite de $xL\left(\frac{1+x}{x}\right)^2$ pour $x = 0$ et pour x infini.

9941. — Trouver la limite de

$$\frac{1}{n^3}\left(1^2\sin\frac{\pi}{n} + 2^2\sin\frac{2\pi}{n} + \ldots (n-1)^2\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

quand n augmente indéfiniment.

9942. — Montrer que le produit $\left(1+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ a une limite finie pour n infini.

9943. — Limite de $(1-\sin x)e^{\tan x}$ pour $x = \frac{\pi}{2}$.

9944. — Trouver la limite de

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$$

quand n grandit indéfiniment.

9945. — Limite de $\dfrac{\mathrm{L}(e^{ax}\cos bx - e^{bx}\cos ax)}{\mathrm{L}(e^{ax}\sin bx - e^{bx}\sin ax)}$ pour $x=0$.

9946. — Déterminer p de façon que l'expression

$$\frac{\mathrm{L}1+\mathrm{L}2+\mathrm{L}3+\ldots+\mathrm{L}n}{n^p\mathrm{L}n}$$

ait une limite pour n infini.

9947. — Montrer que

$$f(a)+f(a+h)+\ldots+f[a+(n-1)h]-\frac{n}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \text{où} \qquad h=\frac{b-a}{n},$$

a pour limite $-\frac{1}{2}[f(b)-f(a)]$ pour n infini.

9948. — Trouver la limite de $\dfrac{1^p+2^p+3^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$ pour n infini.

9949. — L'expression $\dfrac{(x-y)\,dx+(x+y)\,dy}{x^2+y^2}$ est-elle une différentielle totale? Transformer en polaires. Donner la fonction qui admet cette expression pour différentielle totale. Revenir aux rectilignes.

9950. — L'expression $\left(x+y-\dfrac{1}{y}+\dfrac{y}{x^2}\right)dx+\left(x+y-\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{y^2}\right)dy$ est-elle une différentielle totale exacte? Construire la courbe intégrale. Points doubles.

9951. — Discuter les racines des équations

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}=0, \qquad \sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x+1)}=a, \qquad x^3-(1+a)x^2+(2a-1)x+1-a=0,$$

$$x-a=\sqrt[4]{x^4-4ax^3}, \qquad 2x^2+ax-3x\mathrm{L}x^2-4=0, \qquad \sin 3x+a\sin x+1=0,$$

$$x^4+2px^3+2x+p=0, \qquad a^x+b^x=c^x.$$

9952. — Calculer les racines réelles de l'équation $(x+1)^{2n}-x^{2n}-2x-1=0$.

9953. — Résoudre le système $x^3=7x+3y$, $y^3=7y+3x$.

9954. — Si une équation algébrique et entière $f(x)=0$ a toutes ses racines réelles et distinctes, l'équation $f(x)-af'(x)=0$ a aussi toutes ses racines réelles et distinctes, quel que soit a.

9955. — Discuter les racines de l'équation

$$\sin^3 t+x\sin t+y=0$$

suivant la position du point (x,y) dans le plan.

9956. — Conditions pour qu'une équation du quatrième degré ait ses racines en progression arithmétique. Ces conditions étant remplies, résoudre l'équation.

9957. — Conditions pour qu'une équation complète du quatrième degré ait une racine triple.

9958. — Conditions pour que l'équation $x^5+ax^4+bx^2+c=0$ ait une racine triple.

9959. — Déterminer λ, μ, ν de façon que l'équation $x^5+7x^4+\lambda x^3+\mu x^2+8x+\nu=0$ ait une racine double et une racine triple.

9960. — On suppose que les deux équations $A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n=0$ et $f(x)=0$ ont leurs racines réelles et distinctes. Démontrer que l'équation $A_0f(x)+A_1f'(x)+\ldots+A_nf^{(n)}(x)=0$ a aussi ses racines réelles et distinctes.

9961. — Pour quelle valeur de λ l'équation $3x^4-8x^3-6x^2+24x+\lambda=0$ a-t-elle quatre racines réelles?

9962. — Condition pour que l'équation $x^3-3xy_0^2+x_0^3=0$ ait une seule racine comprise entre -1 et $+1$.

9963. — Déterminer λ de façon que l'équation $x^4+x^3+x^2-x+\lambda=0$ ait une racine imaginaire de module 2.

9964. — Déterminer λ de façon que l'équation $x^4-2x^2+\lambda x+1=0$ ait une racine double.

9965. — Calculer les intégrales :

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+1}, \qquad \int\frac{(x+1)\,dx}{(x^2-1)^3}, \qquad \int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}},$$

$$\int\frac{dx}{1+x^2+\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int_0^1\frac{dx}{1-x^2+a\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{(x^2+2x+2)^3}},$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx, \quad \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+1}\,(x+\sqrt{x^2+1})}, \quad \int \frac{dx}{1+x\sqrt{1+x^2}}, \quad \int \frac{dx}{1+x^2+\sqrt{1+x+x^2}},$$

$$\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{x^2+1}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-1)(b-x^2)}},$$

$$\int_1^{x-1} \frac{dx}{x+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}, \quad \int \frac{\sqrt{t^4+bt^2+1}}{t(1+t^2)}\,dt, \quad \int_a^b \frac{x^n\,dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \ (a<b), \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt{b+x}+3},$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}+1}{\sqrt{x^2-1}-1}\,dx, \quad \int_0^{\pi} \frac{1+\cos x}{1+\cos^2 x}\,dx, \quad \int \frac{\sin x\cos x\,dx}{(\sin^3 x+\cos^3 x)}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\omega\sin^2\omega}{\cos^3\omega+\sin^3\omega}\,d\omega,$$

$$\int \cos x\cos 2x\cos 3x\,dx, \quad \int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^3 x}, \quad \int \frac{dx}{\cos^3 x+\sin^3 x}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\sin x},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{a^2\operatorname{tg} x+b^2\cot x}, \quad \int \frac{\sin^2\omega\,d\omega}{\sin^4\omega+\cos^4\omega}, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^{2p} x\,dx, \quad \int \frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^3 t}\,dt, \quad \int \sin^2 x\operatorname{sh}^2 x\,dx,$$

$$\int \frac{dx}{\cos x\sqrt{\cos^2 x+2\sin^2 x}}, \quad \int x^2\cos^3 x\,dx, \quad \int \frac{dx}{\cos x\sqrt{\cos^2 x-3\cos x\sin x+2\sin^2 x}},$$

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos x+\cos 2x}}, \quad \int \frac{dx}{e^x\sqrt{e^4+4e^{2x}-2}}, \quad \int e^{2x}\sqrt{e^{2x}+e^x+1}\,dx.$$

9966. — Quelle relation doit-il exister entre a et b pour que l'intégrale $\int \frac{(x-a)(x-b)}{(x^2-1)^2}\,dx$ soit rationnelle?

9967. — Montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{L}\frac{1+k\sin\theta}{1-k\sin\theta}\cdot\frac{d\theta}{\sin\theta} = \pi\arcsin k.$$

9968. — On pose $\mathrm{I}_n^p = \int \sin^n x\sin px\,dx$. Relation entre I_n^p et I_{n-2}^p.

9969. — On considère l'intégrale $\mathrm{I}(p,q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$, p et q étant des nombres positifs. Etablir la formule $p\mathrm{I}(p-1,q) = q\mathrm{I}(p,q-1)$. Appliquer au calcul de $\mathrm{I}(2,q)$.

9970. — On donne une ellipse et on considère l'un des foyers F; on joint le point F à un point quelconque de la courbe. Calculer : 1° la valeur moyenne de $\frac{1}{\mathrm{FM}^2}$ en prenant pour variable l'angle de FM avec le grand axe; 2° la valeur moyenne de FM en prenant pour variable l'abscisse du point M.

9971. — Moment d'inertie d'un disque elliptique par rapport à l'un de ses axes, ou à l'une des tangentes au sommet.

9972. — On considère l'aire limitée par la courbe $y=\sin x$, l'axe des x entre les points d'abscisses zéro et π. Trouver le moment d'inertie de cette aire par rapport à Ox.

9973. — Moment d'inertie d'un cylindre de révolution par rapport à un diamètre de la section moyenne.

9974. — On donne le moment d'inertie d'une ellipse par rapport à son centre $\frac{\pi ab}{4}(a^2+b^2)$: trouver le moment d'inertie du volume $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2-k^2z^2}=1$ par rapport à Oz.

9975. — Moment d'inertie de la lemniscate par rapport au point double.

9976. — Trouver le moment d'inertie d'un cône de révolution par rapport à un diamètre de sa base.

9977. — Moment d'inertie d'un parallélépipède par rapport à une arête.

9978. — Moment d'inertie d'un bâton par rapport à un point.

9979. — Moment d'inertie d'une plaque circulaire homogène par rapport à un diamètre.

9980. — Calculer le moment d'inertie d'une ellipse par rapport à une droite passant par un sommet et perpendiculaire au plan de la courbe.

9981. — Moment d'inertie d'un cône de révolution par rapport à son axe.

9982. — Moment d'inertie d'un tore par rapport à son axe.

II. — Trigonométrie.

9983. — Montrer que les deux fonctions $\operatorname{tg} 3x$ et

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right).$$

sont nulles et infinies en même temps. Chacune d'elles se représente par une fraction rationnelle en $\operatorname{tg} x$. Qu'en résulte-t-il pour ces deux fractions ?

9984. — Résoudre l'équation $\sin x + m\cos x = 2m$. Discuter.

9985. — Rendre calculable par logarithmes l'expression

$$\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} + \sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{a}{2} + \sin\frac{c}{2}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} + \sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2} - 4,$$

en supposant $a + b + c = \pi$.

9986. — On donne une équation du troisième degré dont les racines sont les trois côtés d'un triangle. Former l'équation qui admet comme racines $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$.

9987. — On donne dans un triangle la relation

$$\frac{\sin A \sin B \sin C}{(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A)(\sin A + \sin B)} = \frac{1}{8}.$$

Trouver la forme nécessaire de ce triangle.

III. — Géométrie analytique à deux dimensions.

9988. — Construire les courbes définies par les équations suivantes en coordonnées rectilignes :

$y^4 - x^4 = a^2(4y^2 - 5x^2)$, $x^3y^3 + x^2y + 1 = 0$, $x^3 + y^3 - 3xy + a = 0$, $x^7 + y^7 = ax^3y^3$ (aire),
$xy(x-2)(y-2) = 1$, $x^4 - x^2y - y^3 = 0$, $x^3 - xy^2 + a^2y = 0$, $x^7 + x^4y^3 - 6y = 0$,
$3x^2 + 3y^2 = 12 + ax^3$, $y^2 = a^2\mathrm{L}x^2 - x^2$, $(x^2 + y^2)^3 = a^4x^2 + b^4y^2$ (aire), $2x^5 - 5xy^2 + y^5 = 0$,
$x^2y^2 - xy(x+y) + x^2 - y^2 = 0$, $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 1$, $\sin x + 4\cos^2 y - 4\cos y + 1 = 0$, $6y^2 = 6x^2 - \frac{1}{2} - 8ax^3$,
$2x(y-3)^2 = 3y(x-1)^2$, $(x+y)^2(x-y) - 2x(x+y) + y = 0$, $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{t+1}, \\ y = \dfrac{t^2}{t-1}. \end{cases}$

9989. — Construire la courbe $y = x^2 - 3x - 1$. En déduire la forme de la courbe $y = (x^2 - 3x - 1)^2$.

9990. — Construire les courbes définies par les équations en coordonnées polaires :

$\frac{\rho}{a} = \frac{2}{\cos\omega} + \cos 2\omega$, $\rho = a(2\cos\omega - \cos 2\omega)$, $\rho = \frac{\cos\omega + \sin\omega}{\cos\omega - \sin\omega}$, $\rho = a\frac{\sin\omega + 2\cos\omega}{\cos 2\omega}$,
$\rho = 2\cos\omega - \frac{\sqrt{6}}{\cos\frac{\omega}{2}}$, $\rho = \frac{\sin^3\omega}{\cos\omega}$ (arc), $\begin{cases} \rho = \dfrac{a}{\cos t}, \\ \omega = \operatorname{tg} t - t, \end{cases}$ $\begin{cases} \rho = \dfrac{a}{\cos t}, \\ \omega = \cos t - t. \end{cases}$

9991. — On donne un triangle ABC et un point O, et on considère les cercles circonscrits aux triangles OBC, OCA, OAB; soient α, β, γ les centres de ces cercles. Démontrer que les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sont concourantes. (1)

9992. — Lieu du centre du cercle des neuf points d'un triangle isocèle dont l'un des côtés égaux est donné en grandeur et en position.

9993. — Construire la courbe $y = \frac{f'(x)}{f(x)}$ sachant que $f(x) \equiv x(x-1)^2(x-2)^3$. Calculer l'aire comprise entre la courbe, l'axe des x et les ordonnées $x = 3$ et $x = 4$. Calculer le volume engendré par cette aire en tournant autour de Ox.

9994. — On suppose que l'équation $ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$ représente deux droites, et on demande de trouver l'équation du cercle passant par l'origine et par les pieds des perpendiculaires abaissées de l'origine sur les deux droites.

9995. — Calculer l'aire limitée par la courbe $(a^2 + x^2)y^2 - 4a^3y + x^4 = 8a^4$.

9996. — Conditions pour que la droite $ux + vy + w = 0$ passe par le centre de la conique

$$x = \frac{t^2 + 1}{t^2 + 2t + 2}, \qquad y = \frac{t + 2}{t^2 + 2t + 2}.$$

(1) Le lieu d'un pareil point est une cubique circulaire, passant aux sommets du triangle, aux centres des cercles inscrits et exinscrits, au centre du cercle circonscrit, à l'orthocentre, et au pt à l'∞ sur la dte d'Euler.

(*A suivre.*)

SUJETS DE CONCOURS

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Concours spécial de 1919.

Mathématiques, 1re composition.

2315. — On donne une ellipse rapportée à ses axes, de longueurs $2a$, $2b$, et les tangentes aux quatre sommets. Sur cette ellipse, on prend un point M, de coordonnées $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$, et l'on mène la tangente en ce point. On trace le cercle C qui a pour diamètre la partie de cette tangente comprise entre les

tangentes aux sommets du grand axe et le cercle C′ qui a pour diamètre la partie de la même tangente qui est comprise entre les tangentes aux sommets du petit axe.

1° Former, en fonction du paramètre φ, les équations des cercles C et C′. Quelles remarques peut-on faire au sujet des deux familles de cercles C et C′ et de leur axe radical?

2° Calculer, en fonction de φ, les coordonnées des points d'intersection D et D′ des deux cercles C et C′.

3° Trouver, lorsque M décrit l'ellipse, le lieu du point P qui divise le segment DD′ dans un rapport donné m.

4° Enveloppe des courbes ainsi trouvées pour les diverses valeurs de m. Discuter la réalité des points de contact de ces courbes avec leur enveloppe; distinguer les divers cas de figure.

Durée : 4 h.

Mathématiques, 2e composition.

2316. — On donne l'équation en t

$$(E) \qquad (b - at)(1 + t^2) - 1 = 0.$$

1° Déterminer les coefficients a et b de manière que cette équation admette une racine double donnée θ.

2° Considérant les expressions ainsi trouvées pour a et b comme les coordonnées rectangulaires d'un point M, construire le lieu (C) des positions que prend le point M quand on fait varier la racine double donnée θ.

Les coefficients a et b étant supposés quelconques, quelle est la signification géométrique de l'équation (E) relativement à la courbe (C) et au point P de coordonnées a et b?

3° Dans l'équation (E), on donne à b la valeur $\frac{5}{8}$ et on laisse a quelconque; discuter, suivant la valeur de a, la réalité des racines de l'équation (E).

Contrôler les résultats de la discussion algébrique en utilisant la signification géométrique de l'équation (E).

4° La tangente à la courbe (C), de coefficient angulaire $m = \operatorname{tg}\alpha$, rencontre cette courbe en deux points M_1 et M_2 autres que le point de contact M_0. Calculer, en fonction de α, la longueur de l'arc $M_1M_0M_2$ compris, sur la courbe C, entre les points M_1 et M_2. On supposera $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.

(*Durée : 4 h.*)

Épure.

2317. — Par un point O, situé à 3cm au-dessus du plan horizontal de projection et à 9cm en avant du plan vertical, passe une droite de front Δ, qui fait un angle de 45° avec la verticale et va en descendant de gauche à droite. Une droite de front Γ fait un angle de 30° avec Δ. La perpendiculaire commune aux droites Γ et Δ passe par le point O et a pour longueur 3cm. La droite Γ, en tournant autour de Δ, engendre un hyperboloïde H.

Par le point O, on élève à Δ, dans le plan de front, une perpendiculaire OS de longueur égale à 3cm, au-dessous de O.

Une droite passant par S et faisant un angle de 30° avec SO engendre un cône C en tournant autour de SO.

On limite l'hyperboloïde H par le plan horizontal de projection et par un plan de profil situé à 3cm à gauche du point O. Représenter ce qui reste de ce solide lorsqu'on enlève la partie intérieure au cône C.

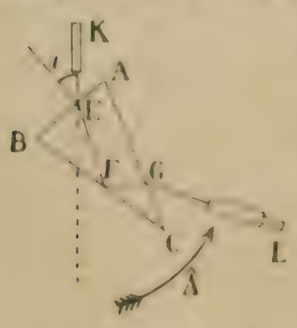
Ligne de terre sur le petit axe de la feuille. Ligne de rappel du point O à 6cm à gauche du grand axe.

(*Durée : 4 h.*)

Physique.

I. — Quantité de chaleur; calorie. — Mesure des quantités de chaleur par le calorimètre à glace de Bunsen.

II. — **2318.** La lunette d'un goniomètre ayant été pointée sur son collimateur K, on la déplace, dans le sens positif, d'un angle égal à l'angle A d'un prisme donné ABC; la lunette est ainsi amenée dans la position L. Le prisme est alors placé sur la plate-forme dans une position ABC telle que le rayon EFG entre par la face AB, se réfléchisse sur BC et sorte par la face CA; puis on tourne la plate-forme du prisme jusqu'à ce que l'image de la fente du collimateur, éclairée par une lumière monochromatique, se fasse sur le réticule.



1° Comment déterminer expérimentalement l'angle d'incidence i du rayon sur la face AB?

2° Étant donnés les angles B = 74°, C = 32°, i = 35°, calculer l'indice de réfraction n du prisme pour la radiation achromatique envisagée.

3° Quel serait l'aspect du phénomène si l'on remplaçait la lumière monochromatique par de la lumière blanche?

4° Comment se déplace l'image monochromatique de la fente quand on tourne la plate-forme du prisme à partir de la position actuelle, dans le sens positif, puis dans le sens négatif?

5° Entre quelles limites de l'indice n l'expérience peut-elle utiliser la forme du prisme donné, avec les valeurs données des angles? Quelle influence exerce une diminution de $B - C$ sur ces limites et sur la précision des mesures? Que devient l'expérience quand $B - C$ devient nulle?

(*Durée : 3 h.*)

Concours de 1916.

Mathématiques, 1re composition.

2319. — 1° Intégrer l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad 2x(x-1)y' + (2x-1)y + 1 = 0, \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right).$$

Une intégrale étant déterminée par la valeur qu'elle prend pour une valeur particulière de x, dans quel intervalle de variation de x cette intégrale demeure-t-elle définie? Que devient l'intégrale aux limites de cet intervalle?

2° Faire dans l'équation (E) le changement de variables

$$x = \frac{(1+u)^2}{4u}, \qquad y = \frac{2uv}{1+u^2};$$

déduire du résultat de ce calcul une représentation paramétrique des intégrales de l'équation (E). Cette représentation est-elle valable pour toutes les valeurs réelles de x? La comparer au résultat de l'intégration directe de l'équation (E).

3° On propose de satisfaire à l'équation (E) par un développement de la forme

$$y = \varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{|x|}}\psi(x),$$

où $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont deux séries entières en x et où $|x|$ désigne la valeur absolue de x. Trouver les séries $\varphi(x)$ et $\psi(x)$. Dans quel intervalle le nouveau mode de représentation des intégrales ainsi obtenu est-il valable? Le comparer au résultat de l'intégration directe.

4° Forme de la courbe $y = \varphi(x)$. Forme des diverses courbes intégrales.

(*Durée : 4 h.*)

Mathématiques, 2e composition.

2320. — Un plan vertical est rapporté à deux axes Ox, Oy; l'axe Ox est horizontal; Oy est vertical et dirigé vers le haut. Dans ce plan se trouve la trajectoire d'un point de masse unité, libre, pesant et subissant de la part de l'air une résistance R tangente à la trajectoire. Les unités choisies étant la seconde de temps et le mètre, la trajectoire a pour équation

$$(1) \qquad y = ax - 8x^2 - x^3 \qquad (a > 0).$$

Le projectile part de l'origine O sur l'arc OFM situé dans l'angle des coordonnées positives; il monte au point le plus haut F et retombe ensuite sur Ox en son point de chute M.

1° Calculer, en fonction de a, le coefficient angulaire m de la trajectoire au point de chute M et la flèche f, ordonnée du point F.

2° Exprimer, en fonction du temps t, l'abscisse x du mobile et calculer le temps T qu'il met à parcourir l'arc OFM. Déterminer, en fonction de x, la composante X suivant Ox de la résistance R.

3° Évaluer le travail des forces agissant sur le mobile pendant le trajet OFM. Trouver la grandeur V_M de la vitesse au point de chute.

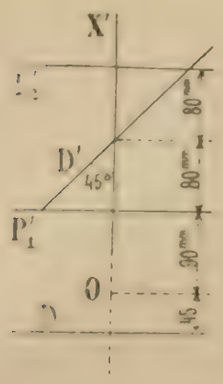
4° Calculer l'aire balayée par le vecteur vitesse durant le même trajet.

5° Divers mobiles identiques partent simultanément de l'origine sur les cubiques qui correspondent aux différentes valeurs de a. Trouver, à un instant ultérieur quelconque, le lieu de leurs positions, l'enveloppe de leurs vitesses et l'enveloppe des normales à leurs trajectoires.

Nota : Ce problème se rattache au tir du canon de campagne de 75.

(*Durée : 4 h.*)

Épure.



2321. — Un hyperboloïde de révolution a pour axe la verticale (O, X'), pour génératrice la droite de front (D, D'). On considère le solide S limité par l'hyperboloïde et les deux plans horizontaux P'_1 et P_2.

Un cylindre de révolution a pour axe la droite (D, D') et pour génératrice celle des génératrices de l'hyperboloïde qui est parallèle à (D, D').

On représentera ce qui reste du solide S supposé opaque, quand on en supprime la partie située à l'intérieur du cylindre.

On se conformera, pour la mise en place, aux données du croquis. Le point O sera pris sur le grand axe de la feuille, à 120mm au-dessus du bord inférieur de celle-ci.

(*Durée : 4 h.*)

Calcul.

L'échelle des abscisses horizontales étant 1cm pour 500m, l'échelle des ordonnées verticales, 1cm pour 0m,50, si l'on prend pour unité le centimètre du dessin, la trajectoire du projectile de 75mm est représentée approximativement par la formule

$$y = ax - 8x^2 - x^3, \tag{1}$$

l'origine O étant au point de départ du projectile. Au deuxième point M d'intersection avec Ox, le coefficient angulaire m de la tangente à la courbe (1) est

$$m = 8\sqrt{a + 16} - 2a - 32. \tag{2}$$

La durée en secondes du trajet jusqu'au point de chute M est, dans le même système d'unités, donnée par la formule

$$T = \frac{1}{9\sqrt{\gamma}}\left\{16\sqrt{a + 16} - 8^{\frac{3}{2}} - 64\right\}, \tag{3}$$

où γ est l'accélération de la pesanteur dont la grandeur est 981 C. G. S.

La lettre α désignant l'angle de la trajectoire vraie avec le plan horizontal au départ, on fait varier α par degrés de 0° à 10°. Calculer, pour chacun des points de chute correspondants M, les éléments suivants :

1° En mètres, la portée réelle OM;

2° En secondes, la durée T du trajet;

3° En degrés, l'angle μ que fait la trajectoire réelle avec le plan horizontal en M.

(*Durée : 1 h.*)

Physique.

I. — Exposer la règle des phases et les lois du déplacement de l'équilibre sur l'exemple des changements d'état de l'eau pure.

II. — **2322.** Un rayon de lumière monochromatique SI est normal à l'axe d'un cylindre droit en verre dont la base est le cercle O. Il pénètre dans ce cercle en I et, après y avoir subi deux réflexions intérieures, émerge suivant JS'.

Soit i l'angle d'incidence, r l'angle de réfraction, n l'indice de réfraction du verre.

1° Calculer la déviation totale D du rayon lumineux.

2° Déterminer la valeur i_m de i pour laquelle D prend sa valeur minimum D_m. — Application à $n = 1,5$.

3° Calculer $\frac{dD_m}{dn}$. Quel est le plus dévié des rayons rouge et violet?

4° On suppose que le rayon soit au minimum de déviation et qu'il émane d'une flamme de sodium. Il est constitué, comme on sait, de deux radiations voisines. On donne les indices de réfraction $n_1 = 1,49885$, $n_2 = 1,49889$ de ces deux radiations pour le verre considéré. Quel est, en secondes d'arc, l'écartement angulaire des deux rayons émergents correspondants?

(*Durée : 3 h.*)

Chimie.

I. — Oxyde de carbone; préparation, propriétés, composition.

II. — **2323.** On sait qu'en attaquant le cuivre par l'acide azotique on peut obtenir, suivant les conditions de température et suivant le degré de concentration de l'acide, soit de l'oxyde azotique pur, soit un mélange de ce composé avec d'autres gaz renfermant tous l'azote au nombre de leurs éléments.

Indiquer un ou plusieurs essais auxquels on pourra soumettre l'oxyde azotique ainsi préparé pour reconnaître sa pureté.

En supposant que l'un de ces essais ait permis de conclure que l'oxyde azotique est mêlé à d'autres gaz, on demande de trouver la composition qualitative et quantitative du mélange au moyen des constatations suivantes :

1° Un volume de ce mélange égal à 100^{cm^3} est introduit dans une cloche courbe et chauffé dans cet appareil avec un fragment de sulfure de baryum; ce composé se transforme en sulfate et le mélange gazeux subit une diminution de volume de 25^{cm^3}.

2° Un autre échantillon, du volume initial de 100^{cm^3} également, est agité avec une solution concentrée de sulfate ferreux jusqu'à ce qu'on n'observe plus de variation de volume. Le gaz restant après cette opération est introduit dans un eudiomètre avec un volume d'hydrogène égal à 50^{cm^3}. Le passage d'une étincelle électrique dans ce mélange laisse un résidu gazeux constitué par un mélange de 50^{cm^3} d'azote et 20^{cm^3} d'hydrogène.

La composition en volume du mélange gazeux donné ayant été ainsi déterminée, en déduire la composition en poids, sachant que le poids atomique de l'azote est 14 et celui de l'oxygène 16.

Durée : 3 h.)

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE

2152. — *La condition pour que l'équation*

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

ait, entre ses quatre racines x_1, x_2, x_3, x_4, *la relation* $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, *est*

$$8C = 4AB - A^3.$$

La même condition exprime que l'équation

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

a entre ses racines la relation $x_1 + x_2 = x_3$.

Ecrivons les relations entre les coefficients et les racines :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -A,$$
$$x_1x_2 + x_3x_4 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = B,$$
$$x_1x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4(x_1 + x_2) = -C,$$
$$x_1x_2x_3x_4 = D,$$

et joignons-y la relation $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$;

nous allons chercher la condition nécessaire et suffisante pour que ce système ait des solutions.

Ce système est équivalent au suivant :

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = -\frac{A}{2},$$

$$x_1x_2 + x_3x_4 + \frac{A^2}{4} = B,$$

$$-\frac{A}{2}(x_1x_2 + x_3x_4) = -C,$$

$$x_1x_2x_3x_4 = D$$

En éliminant $x_1x_2 + x_3x_4$ entre la deuxième et la troisième équations de ce nouveau système, nous obtenons

$$B - \frac{A^2}{4} = \frac{2C}{A}, \qquad \text{ou} \qquad 8C = 4AB - A^3;$$

c'est la condition cherchée.

Cette condition est bien suffisante, car si elle est remplie, le système précédent admet des solutions; on a d'abord $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = -\frac{A}{2}$, puis x_1x_2 et x_3x_4 sont racines de l'équation du deuxième degré

$$u^2 - \frac{2C}{A}u + D = 0.$$

Dans ce calcul nous n'avons fait aucune hypothèse sur la valeur du terme constant D; si nous le supposons nul, l'équation devient

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx = 0;$$

elle admet la racine $x_4 = 0$, puis trois autres racines x_1, x_2, x_3; la condition trouvée précédemment exprime qu'entre ces trois nombres on a la relation

$$x_1 + x_2 = x_3.$$

On peut d'ailleurs obtenir ce résultat directement.

La condition $x_1 + x_2 = x_3$ peut s'écrire $x_1 + x_2 + x_3 = 2x_3$, ou $2x_3 = -A$, ou encore $x_3 = -\frac{A}{2}$. Tout revient donc à écrire que $-\frac{A}{2}$ est racine de l'équation

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

ce qui donne bien

$$8C = 4AB - A^3.$$

E. RÈME, conducteur des ponts et chaussées, à Batna.

Bonnes solutions par MM. André Darmon, à Barfleur; Emile Dion, école normale supérieure de Saint-Cloud; Jacques Dollé, lycée Saint-Louis; R. Dufour, école normale de Nancy; R. Dufresne, lycée Charlemagne; Paul Gabrigou; Henri Jaquet, collège Chaptal; G. Lach, à Douai; R. Malaire, à Denain; E. Rouge; A. Rousseau; M. Roux, au Creusot; L. Simon; Gaston Singier, à Armentières; Topin, conducteur des ponts et chaussées, à Grandvilliers (Oise); Marcel Ullmann, 47e d'artillerie, à Héricourt.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2154. — *On considère une parabole* (P) *et un point fixe* A *sur la courbe.*

D'un point quelconque M *de la normale en* A *on abaisse les deux autres normales* MB, MC *sur* (P). *Soit* A'B'C' *le triangle formé par les tangentes en* A, B, C.

1° *Le milieu de* B'C' *est fixe.*

2° *Le lieu des milieux de* A'B', A'C' *est une parabole* (Q).

3° *Les médiatrices du triangle* A'B'C' *sont normales à une parabole fixe* (R).

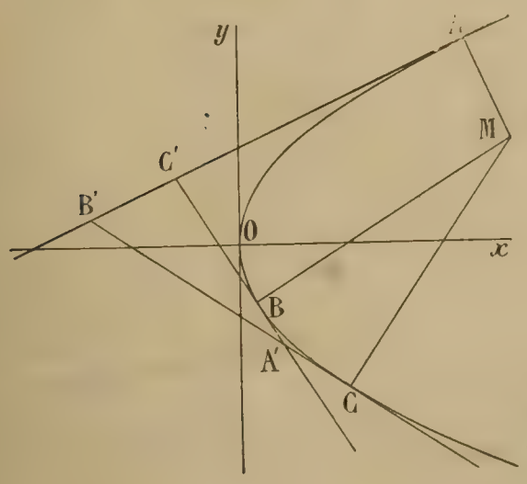
4° *Lieu du centre du cercle circonscrit au triangle* A'B'C'.

5° *Lieu du centre du cercle circonscrit au triangle* ABC.

6° *Lieu de l'orthocentre du triangle* ABC.

1. Soit $y^2 = 2px$ l'équation de la parabole donnée et a et b les coordonnées du point

$$A\left(a = \frac{b^2}{2p}\right).$$



Désignons par α et β celles de M. Les pieds des normales issues de M sont les points de rencontre de la parabole avec l'hyperbole d'Apollonius du point M. Son équation est

$$xy + (p - \alpha)y - p\beta = 0.$$

L'équation aux ordonnées des points d'intersection est

$$\frac{y^3}{2p} + (p - \alpha)y - p\beta = 0,$$

ou (1) $$y^3 + 2p(p - \alpha)y - 2p^2\beta = 0.$$

Remarquons que b doit être une racine de cette équation; désignons les deux autres par y' et y''. Les relations entre les coefficients et les racines nous donnent

$$b + y' + y'' = 0 \quad \text{et} \quad by'y'' = 2p^2\beta,$$

d'où $$y' + y'' = -b \quad \text{et} \quad y'y'' = \frac{2p^2\beta}{b}.$$

Les tangentes en B et C ont pour équations

$$y - y' = \frac{p}{y'}(x - x') \quad \text{et} \quad y - y'' = \frac{p}{y''}(x - x'')$$

ou, après réduction, $$2px - 2y'y + y'^2 = 0 \quad \text{et} \quad 2px - 2y''y + y''^2 = 0.$$

Quant à la tangente en A, son équation est $2px - 2by + b^2 = 0$.

Les coordonnées des points A', B', C' s'obtiendront en résolvant les systèmes d'équations obtenus en groupant deux à deux les équations précédentes. On obtient ainsi

$$A'\begin{cases} = \dfrac{y'y''}{2p}, \\ y = \dfrac{y' + y''}{2}, \end{cases} \qquad B'\begin{cases} x = \dfrac{by''}{2p}, \\ y = \dfrac{b + y''}{2}, \end{cases} \qquad C'\begin{cases} x = \dfrac{by'}{2p}, \\ y = \dfrac{b + y'}{2}. \end{cases}$$

Soient A'' le milieu de B'C', x et y ses coordonnées ; nous pouvons écrire

$$2x = \frac{by' + by''}{2p} = -\frac{b^2}{2p}, \quad \text{d'où} \quad x = -\frac{b^2}{4p},$$

et $$2y = \frac{y' + y'' + 2b}{2} = \frac{b}{2}, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{b}{4}.$$

Nous voyons donc que A'' est bien un point fixe.

2. Désignons par x et y les coordonnées du milieu B'' de A'C'. Nous avons immédiatement

$$2x = \frac{y'y''}{2p} + \frac{by'}{2p} \quad \text{et} \quad 2y = \frac{y' + y''}{2} + \frac{b + y'}{2} = -\frac{b}{2} + \frac{b + y'}{2} = \frac{y'}{2}.$$

On en tire $y' = 4y$, puis $y'' = -b - 4y$

et $$2x = \frac{4y(-b - 4y)}{2p} + \frac{4by}{2p} = -\frac{8y^2}{p}$$

et, finalement, $$y^2 = -\frac{p}{4}x.$$

Il est facile de constater que le milieu de A'B' décrit la même courbe. C'est une parabole (Q) ayant même axe et même sommet que la parabole (P). Elle tourne sa concavité en sens contraire ; son paramètre est le huitième de celui de (P). On voit aussi qu'elle passe par le point A'', milieu de B'C'.

3. Nous avons vu que les coordonnées de B'' sont $x = \frac{y'(h+y'')}{4p} = -\frac{y'^2}{4p}$ et $y = \frac{y'}{4}$. La médiatrice du triangle A'B'C' qui passe par B'' a pour équation $y - \frac{y'}{4} = -\frac{y'}{p}\left(x + \frac{y'^2}{4p}\right)$,

ou
$$\frac{y'}{p}x + y + \frac{y'^3}{4p^2} - \frac{y'}{4} = 0.$$

Nous allons montrer qu'elle est normale à une parabole dont l'équation est de la forme
$$y^2 = 2mx + n.$$

Soient, en effet, α et γ les coordonnées d'un point de cette parabole ; elles sont liées par la relation $\gamma^2 = 2m\alpha + n$, qui donne $\alpha = \frac{\gamma^2 - n}{2m}$. La normale en ce point à la parabole a pour équation $y - \gamma = -\frac{\gamma}{m}\left(x - \frac{\gamma^2 - n}{2m}\right)$, équation qui peut s'écrire
$$\frac{\gamma}{m}x + y - \frac{\gamma(\gamma^2 - n)}{2m^2} - \gamma = 0.$$

Identifions cette équation avec celle de la médiatrice en B'' ; nous avons ainsi
$$\frac{\gamma}{m} = \frac{y'}{p} \qquad \text{et} \qquad \frac{n\gamma - \gamma^3}{2m^2} - \gamma = \frac{y'^3}{4p^2} - \frac{y'}{4}.$$

La première équation donne $\gamma = \frac{my'}{p}$.

Portons dans la seconde ; nous obtenons
$$\frac{ny'}{2mp} - \frac{my'^3}{2p^3} - \frac{my'}{p} = \frac{y'^3}{4p^2} - \frac{y'}{4}.$$

Après avoir divisé les deux membres par y', cette équation devient
$$\frac{n}{2mp} - \frac{m}{p} + \frac{1}{4} = y'^2\left(\frac{m}{2p^3} + \frac{1}{4p^2}\right).$$

m et n doivent évidemment être indépendants de y'. Nous les obtiendrons à l'aide des équations
$$\frac{n}{2mp} - \frac{m}{p} + \frac{1}{4} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{m}{2p^3} + \frac{1}{4p^2} = 0.$$

La seconde donne $m = -\frac{p}{2}$ et la première $n = \frac{3p^2}{4}$.

Les médiatrices du triangle A'B'C' sont donc normales à la parabole (R) $y^2 = -px + \frac{3p^2}{4}$. Elle est facile à construire ; son sommet, situé sur Ox, a pour abscisse $\frac{3p}{4}$; son paramètre est $\frac{p}{2}$.

4. Nous avons vu que la perpendiculaire élevée au milieu de A'C' a pour équation
$$\frac{y'}{p}x + y + \frac{y'^3}{4p^2} - \frac{y'}{4} = 0.$$

De même, la perpendiculaire élevée au milieu de A'B' est

$$\frac{y''}{p}x + y + \frac{y''^3}{4p^2} - \frac{y''}{4} = 0.$$

Retranchons membre à membre ces équations:

$$\frac{y' - y''}{p}x + \frac{y'^3 - y''^3}{4p^2} - \frac{y' - y''}{4} = 0.$$

Nous en tirons $$\frac{x}{p} = \frac{1}{4} - \frac{y'^2 + y'y'' + y''^2}{4p^2} = \frac{1}{4} - \frac{b^2 - \frac{2p^2\beta}{b}}{4p^2}$$

et (1) $$x = \frac{bp^2 + 2\beta p^2 - b^3}{4bp}.$$

En additionnant membre à membre, on obtient

$$\frac{y' + y''}{p}x + 2y + \frac{y'^3 + y''^3}{4p^2} - \frac{y' + y''}{4} = 0,$$

puis, successivement,

$$-\frac{b(p^2 + 2\beta p^2 - b^3)}{4bp^2} + 2y - \frac{b(y'^2 - y'y'' + y''^2)}{4p^2} + \frac{b}{4} = 0,$$

$$2y = \frac{2\beta p^2 - b^3}{4p^2} + \frac{b\left(b^2 - \frac{6p^2\beta}{b}\right)}{4p^2} = -\beta.$$

Nous aurons le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle A'B'C' en éliminant β entre l'équation précédente et (1). Le résultat est immédiat : $4bpx = -4p^2y + b(p^2 - b^2)$, ou

$$x + \frac{p}{b}y + \frac{b^2 - p^2}{4p} = 0.$$

C'est la perpendiculaire au milieu de B'C'. Ce résultat était évident *a priori* puisque nous avions vu que le milieu de B'C' était un point fixe.

5. Le milieu de AB a pour coordonnées $x = \frac{a + x'}{2} = \frac{b^2 + y'^2}{4p}$ et $y = \frac{b + y'}{2}$. La perpendiculaire à AB en son milieu est donc $y - \frac{b + y'}{2} = m\left(x - \frac{b^2 + y'^2}{4p}\right)$.

Or $m = -\frac{b + y'}{2p}$. L'équation précédente devient alors

$$y - \frac{b + y'}{2} + \frac{b + y'}{2p}\left(x - \frac{b^2 + y'^2}{4p}\right) = 0.$$

De même, la perpendiculaire au milieu de AC est

$$y - \frac{b + y''}{2} + \frac{b + y''}{2p}\left(x - \frac{b^2 + y''^2}{4p}\right) = 0.$$

Retranchons membre à membre ces équations ; nous obtenons, après réduction,

$$x = \frac{b^3 - 2p^2\beta + 4p\,b}{4pb}.$$

De même, en additionnant et en remplaçant x par la valeur trouvée, $y = \frac{\beta}{4}$.

Nous aurons le lieu du centre du cercle circonscrit en éliminant β entre ces équations. La seconde donne $\beta = 4y$. Portons dans la première ; nous obtenons $x = \dfrac{b^3 - 8p^2y + 4p^2b}{4pb}$, ou

$$x + \frac{2p}{b}y - \frac{b^2 + 4p^2}{4p} = 0.$$

C'est donc une droite.

6. Nous venons de voir qu'une perpendiculaire quelconque à AB a pour coefficient angulaire

$$m = -\frac{b + y'}{2p}.$$

La hauteur du triangle ABC issue de C a donc pour équation

$$y - y'' = -\frac{b + y'}{2p}\left(x - \frac{y''^2}{2p}\right), \qquad \text{ou} \qquad y + \frac{b + y'}{2p}x - y' - y''^2\left(\frac{b + y'}{4p^2}\right) = 0.$$

De même, celle qui est issue de B a pour équation

$$y + \frac{b + y''}{2p}x - y' - \frac{y'^2(b + y'')}{4p^2} = 0.$$

Retranchons membre à membre ces deux équations ; nous obtenons, après réduction,

$$x = \frac{b^3 - 2\beta p^2 - 4bp^2}{2pb}.$$

En les additionnant et en remplaçant x par la valeur que nous venons de trouver, on obtient $2y + \beta = 0$, d'où $\beta = -2y$. Remplaçons maintenant β par $-2y$; nous avons

$$2pbx = b^3 + 4p^2y - 4p^2b = 0, \qquad \text{ou} \qquad x - \frac{2p}{b}y + \frac{4p^2 - b^2}{2p} = 0.$$

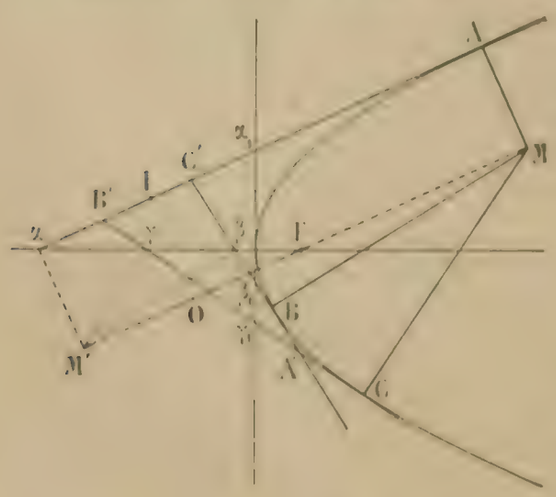
Le lieu de l'orthocentre est donc encore une droite.

L. SIMON, à Fourmies.

Très bonne solution analytique et géométrique : M. L. Naucelle, à la Châtre.
Bonnes solutions : MM. Topin, à Grandvilliers ; R. Malaise, à Denain ; M. Ullmann.

Solution géométrique. — Les différentes parties de la question ont été énoncées et démontrées très simplement par M. Plane dans son article : « Recherches géométriques sur les normales à une parabole issues d'un même point », paru dans les « *Nouvelles Annales de Mathématiques* » (Juin 1911).

Soient α, β, γ ; α_1, β_1, γ_1 les points où les côtés du triangle A'B'C' coupent l'axe et la tangente au sommet.



Les perpendiculaires élevées de α, β, γ aux côtés B'C', C'A', A'B' sont les symétriques de MA, MB, MC par rapport au foyer F de (P). Ces perpendiculaires se coupent en M' symétrique de M par rapport à F. M' est donc sur le cercle circonscrit à A'B'C', la droite de Simson correspondante étant l'axe de (P). Le foyer F est aussi sur ce cercle, la droite de Simson correspondante étant la tangente au sommet. Ces deux droites de Simson étant rectangulaires, F et M' sont diamétralement opposés sur le cercle circonscrit à A'B'C'. Si O est le centre de ce cercle, on a

$$\frac{FO}{FM} = -\frac{1}{2}.$$

Si donc on projette O sur le milieu I de B'C', ce point I est tel que

$$\frac{\alpha_1 I}{\alpha_1 A} = -\frac{1}{2}.$$

Donc si A est fixe, I l'est aussi, ce qui démontre le 1°. I est le milieu de $\alpha\alpha_1$.

2. Si les coordonnées de A sont (x, y), celles de I seront $\left(-\frac{x}{2}, \frac{4}{y}\right)$ et, de $y^2 = 2px$, on tire

$$y'^2 = -\frac{2p}{8}x',$$

équation qui montre que le lieu des milieux de A'B', A'C' est une parabole (Q) déduite de (P) par homothétie par rapport au sommet S, le rapport d'homothétie étant $-\frac{1}{8}$.

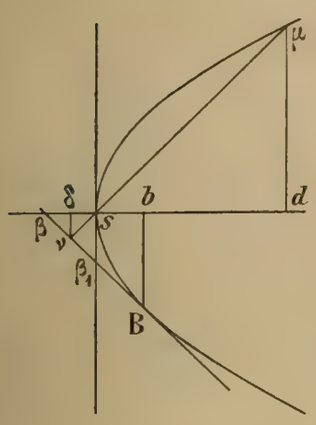
3. Les médiatrices du triangle A'B'C' passent par le point O homothétique du point M par rapport au foyer F, le rapport d'homothétie étant $-\frac{1}{2}$. Dans cette homothétie les médiatrices correspondent aux normales MA, MB, MC à la parabole (P). Elles restent donc, quand le point M varie, normales à une parabole fixe (R) homothétique de la parabole (P), le centre d'homothétie étant F et le rapport d'homothétie $-\frac{1}{2}$.

4. Le lieu du centre O est immédiat. Le point I étant fixe sur AB'C', le point O décrit la perpendiculaire élevée en I sur cette droite.

5. Les points A, B, C sont sur le cercle de Joachimstal relatif au point M. Ce cercle passe, comme on sait, par le point S sommet de la parabole et les droites SA et BC sont également inclinées sur l'axe de la parabole. Les points S et A étant fixes, le centre du cercle circonscrit à ABC décrit la droite perpendiculaire à SA en son milieu.

6. La droite BC se déplace parallèlement à elle-même quand M décrit la normale en A à la parabole (P). Elle est en effet constamment symétrique en direction de SA par rapport à l'axe de la parabole. L'orthocentre du triangle ABC décrit donc la perpendiculaire abaissée du point A sur cette direction fixe.

Remarque. — Voici une solution simple du 3° : Le problème revient à chercher le lieu du milieu ν du segment $\beta\beta_1$ déterminé par l'axe et la tangente au sommet de la parabole sur une tangente à la parabole. Menons $s\nu$, qui coupe la parabole en μ, et déterminons le rapport $\frac{s\mu}{s\nu}$. On a, sans tenir compte des signes et en remarquant que $B\beta$ et μs sont symétriques par rapport à l'axe,



$$\mu d = 2Bb, \qquad bs = s\beta,$$

d'où

$$\frac{Bb}{\nu\delta} = 4.$$

D'ailleurs

$$\frac{s\mu}{s\nu} = \frac{\mu d}{\nu\delta} = \frac{2Bb}{\nu\delta} = \frac{8\nu\delta}{\nu\delta} = 8,$$

ou, en tenant compte des signes,

$$\frac{s\mu}{s\nu} = -8.$$

Le lieu du point ν est donc la parabole (Q) homothétique de la parabole (P), le centre d'homothétie étant le point s et le rapport d'homothétie $-\frac{1}{8}$.

E. RÈME, conducteur des ponts et chaussées, à Batna.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

ÉCOLE CENTRALE (1919)

Algèbre (M. Gérard).

9762. — Démontrer que $\sqrt[3]{\sqrt[2]{2}} = \sqrt[6]{2}$; $\quad a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p'}{q'}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}}$.

9763. — Étudier les systèmes $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0, \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0, \\ a'''x + b'''y + c'''z + d''' = 0. \end{cases}$

9764. — Résoudre et discuter les systèmes suivants :

$$\begin{cases} a^3 + ax + y = 0, \\ b^3 + bx + y = 0, \\ c^3 + cx + y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 1, \\ ax + by + cz = a, \\ bcx + cay + abz = bc; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = \alpha, \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = \beta, \\ ax + by + cz = \gamma; \end{cases} \quad \begin{cases} x + ay + a^2z + a^3 = 0, \\ x + by + b^2z + b^3 = 0, \\ x + cy + c^2z + c^3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x + ay + bcz + a^3 = 0, \\ x + by + caz + b^3 = 0, \\ x + cy + abz + c^3 = 0. \end{cases}$$

9765. — Calculer λ, λ', λ'' tels que $\lambda + \lambda' + \lambda'' \neq 0$, sachant que

$$\frac{a\lambda + a'\lambda' + a''\lambda''}{\lambda + \lambda' + \lambda''} = \alpha, \qquad \frac{b\lambda + b'\lambda' + b''\lambda''}{\lambda + \lambda' + \lambda''} = \beta.$$

Condition de possibilité; interprétation géométrique.

9766. — Étudier les séries suivantes :

$$u_n = \frac{8n+1}{3n+5}, \quad u_n = \frac{n}{2^n}, \quad u_n = n.\left(\frac{3}{4}\right)^n, \quad u_n = \frac{1}{3^{2n}-1}, \quad u_n = \frac{1+x^n}{n^2}, \quad u_n = \frac{n^n}{n!}, \quad u_n = \frac{n!}{n^n}.$$

$$u_n = \frac{n^n}{(2n)!}, \quad u_n = \frac{\cos n\alpha}{3^n}, \quad u_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}, \quad u_n = \left(\frac{2}{2^{\frac{1}{n}} + 3^{\frac{1}{n}}}\right)^{n^2}.$$

9767. — Étudier les séries

$$u_n = \frac{1}{3n+4}, \quad u_n = \frac{n+1}{n^2+1}, \quad u_n = \frac{1}{n^2}, \quad u_n = \frac{1}{n(n+3)}, \quad u_n = \frac{n}{n^2+1}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}.$$

$$u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{3n^2+1}}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{3n^2+1}}, \quad u_n = \sin\frac{1}{n(n+1)}, \quad u_n = \frac{\sqrt{n\,\mathrm{L}n}}{n^3+1}.$$

9768. — Étudier les séries

$$u_n = \frac{x^{2n}}{\sqrt{n}}, \quad u_n = \frac{nx^n}{n^2+1}, \quad u_n = \frac{(n-1)x^n}{\sqrt{n^2+1}}, \quad u_n = x^{\sqrt{n}} \ (x > 0), \quad u_n = x^{\sqrt[3]{n}} \ (x > 0), \quad u_n = \frac{n+2^n}{n^2+x^{2n}}.$$

$$u_n = \frac{x^n+4^n}{2^n+5^n}, \quad u_n = \frac{x^n+n}{x^{2n}+2^n}, \quad u_n = \frac{x^n+\operatorname{sh} n}{3^n}, \quad u_n = \frac{x^n+n}{2^n+\operatorname{ch} n}, \quad u_n = \frac{x^n+\operatorname{sh} n}{3^n+\operatorname{ch} n}, \quad u_n = \frac{x^n+\mathrm{L}n}{n^2} \ (x > 0).$$

9769. — Étudier les séries

$$u_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n^{n+1}}}, \quad u_n = \sqrt[n]{n} - 1, \quad u^n = \sqrt[n^2]{n} - 1, \quad u_n = \left[\frac{\mathrm{L}n}{\mathrm{L}(n+1)}\right]^{n^2}.$$

$$u_n = \left[\frac{\mathrm{L}n}{\mathrm{L}(n+1)}\right]^{n^\alpha}, \quad u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n\mathrm{L}n}, \quad u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n\mathrm{L}n}, \quad u_n = \left(\frac{e^{\frac{1}{n}} + e^{-\frac{1}{n}}}{2}\right)^{\alpha n^2 \mathrm{L}n}.$$

9770. — Étudier les séries

$$u_n = \frac{\mathrm{L}n}{n}, \quad u_n = \frac{\mathrm{L}n}{n^2}, \quad u_n = \frac{\mathrm{L}n}{n^3}, \quad u_n = \frac{\mathrm{L}n}{(n+1)^2}, \quad u_n = \frac{\mathrm{L}n}{n^{\frac{3}{2}}}, \quad u_n = \frac{\mathrm{L}2n}{n^{\frac{3}{2}}}, \quad u_n = \frac{\mathrm{L}n}{n^{\frac{5}{3}}}.$$

$$u_n = \frac{\mathrm{L}n}{\sqrt{n+1}}, \quad u_n = \frac{\mathrm{L}(n+\sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^3+1}}, \quad u_n = \frac{\mathrm{L}(n+\sqrt{n^2+1})}{n^2}, \quad u_n = \frac{\mathrm{L}(n+\sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2(n+1)}}.$$

$$u_n = \mathrm{L}(2n+1) - \mathrm{L}2n, \quad u_n = \mathrm{L}\frac{n^2+1}{n^2+n-1}, \quad u_n = \frac{1}{\mathrm{L}(n+\sqrt{n^2+1})}, \quad u_n = \mathrm{L}\cos\frac{1}{n}, \quad u_n = \frac{\mathrm{L}\operatorname{ch} n}{n^2}.$$

$$u_n = \frac{\operatorname{arc\,tg} n}{\mathrm{L}(n^2+1)}, \quad u_n = \frac{n^{\mathrm{L}n}}{(\mathrm{L}n)^n}.$$

9771. — Étudier les séries

$$u_n = \sin\frac{(2n+1)\pi}{n}, \quad u_n = \operatorname{cotg}\frac{n\pi}{2n+1}, \quad u_n = 1 + 2\cos\frac{2\pi n}{3n+4}, \quad u_n = \operatorname{tg}\frac{\pi n}{4n+1} - \cos\frac{\pi}{n}.$$

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e, \quad u_n = \arccos\frac{n^2+1}{n^2+2}, \quad u_n = \operatorname{arc\,tg}(n+1) - \operatorname{arc\,tg} n, \quad u_n = \operatorname{arc\,tg}\frac{n}{n^2+1}.$$

$$u_n = \frac{\cos n\pi}{n}, \quad u_n = \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{n}, \quad u_n = \frac{\operatorname{tg}(2n+1)\frac{\pi}{4}}{n}, \quad u_n = \frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{n}, \quad u_n = \frac{\sin n\alpha}{n^2}.$$

$$u_n = \frac{\sin n\alpha}{\sqrt{n^3+1}}, \quad u_n = \frac{\sin n\alpha}{n^2+1}, \quad u_n = \frac{\cos n\alpha}{n}, \quad u_n = \frac{\cos n\alpha}{n^4}, \quad u_n = \frac{\sin n}{\operatorname{sh} n}, \quad u_n = \frac{\sin n\alpha}{\operatorname{sh} n}.$$

$$u_n = \frac{1}{\mathrm{L}\operatorname{ch} n}, \quad u_n = \frac{\operatorname{sh} n}{\operatorname{ch}^2 n}, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}, \quad u_n = (-1)^n\frac{\mathrm{L}n}{n}.$$

9772. — Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$y = e^{\operatorname{cotg} 2x}, \qquad y = 2^{\arcsin x}, \qquad y = e^{\frac{x\sqrt{3}}{2}} . \cos\frac{x}{2}, \qquad y = \operatorname{tg} x . 2^{\operatorname{cotg} 2x}, \qquad y = \mathrm{L}\operatorname{tg}\frac{x}{2}, \qquad y = \mathrm{L}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right),$$

$$y = a^{\arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}, \qquad y = \operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{1-x}, \qquad y = \arccos(2x^2 - 1), \qquad y = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad y = \operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2}.$$

9773. — Sachant que $x = f(t)$, $y = g(t)$, calculer y'_x, y''_x.

9774. — Appliquer la formule des accroissements finis aux expressions suivantes :

$$\mathrm{L}(1+x) - \mathrm{L}\,1, \qquad \mathrm{L}(n+1) - \mathrm{L}n, \qquad \mathrm{L}\,51 - \mathrm{L}\,49, \qquad \operatorname{arc\,tg} 5 - \operatorname{arc\,tg} 3, \qquad 3^{\sqrt[3]{5+2}} - 3^{\sqrt[3]{5}}.$$

9775. — Fonction primitive de $\frac{1}{\sin x}$, de $\frac{1}{\sin 4x}$.

9776. — Dérivées partielles par rapport à x et à y de la fonction

$$z = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{3}{4}}.$$

9777. — Calculer les dérivées de

$$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}, \qquad y = x^{\sin x}, \qquad y = x^{\operatorname{tg} x}, \qquad y = x^{\frac{1}{x}}, \qquad y = x^{\arcsin x}, \qquad y = (\sin x)^{\operatorname{arc\,tg} x}, \qquad y = (\operatorname{tg} x)^{\arcsin x},$$

$$y = (\cos x)^{\mathrm{L}x};$$

limites pour $x = 0$ des fonctions et de leurs dérivées.

9778. — Dérivée d'une fonction implicite. — Dérivée par rapport à x de la fonction y définie par l'équation

$$e^{2y} - x^2 - 1 = 0.$$

Résoudre ensuite par rapport à y et comparer. — Même question pour

$$\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x.$$

9779. — On donne les deux équations

$$x = \frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} y}, \qquad x = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}.$$

Calculer y' et z' et expliquer pourquoi $y' = z'$.

9780. — Dérivées partielles de z par rapport à x et y, sachant que

$$z = x^{\frac{2}{3}} + y^{3z}.$$

9781. — Maximum ou minimum de

$$y = \sin^2 x . \sin 2x, \qquad y = \sin x + \sqrt{3}\cos x.$$

9782. — Variations des fonctions suivantes :

$$y = (1+x)^m - 1 - mx, \qquad y = \frac{e^x - 1}{x}, \qquad y = \mathrm{L}\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}, \qquad y = \mathrm{L}\frac{x-1}{x} + \frac{1}{x},$$

$$y = a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x, \qquad y = (1+x)^{-}, \qquad y = \operatorname{tg} x . 2^{\operatorname{cotg} 2x}.$$

9783. — Discuter les équations suivantes :

$$\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = n, \qquad \frac{1}{\operatorname{ch} x} - \frac{a}{\operatorname{sh} x} = n, \qquad x + \frac{x}{1-x^2} = n, \qquad \frac{2-3x^2}{2x-x^3} = n.$$

9784. — Formule de Taylor. — Appliquer la formule de Mac-Laurin à la fonction $y = \operatorname{ch} x$.

9785. — Développer en séries les fonctions $\sin x$, $\sin^2 x$, $\sin^3 x$, $\sin^4 x$, $\cos^2 x$, $\cos^3 x$, a^x, $\operatorname{ch}^2 x$, $\mathrm{L}(3-x)$, $\mathrm{L}\frac{1+x}{1-x}$.

9786. — Calculer $\mathrm{L}7 - \mathrm{L}4$ à $\frac{1}{10}$ près; calculer $\mathrm{L}2$, $\mathrm{L}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}$.

9787. — Développement en série de $y = (1+x)^m$; calculer $\sqrt[3]{1\,000 - 1}$, $\sqrt[3]{1\,001}$, $\sqrt[3]{125 - 1}$.

9788. — Développer en séries les fonctions suivantes :

$$y = \frac{\mathrm{A}}{(x-2)^2}, \qquad y = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}, \qquad y = \frac{1}{x^3 - 3x + 2}, \qquad y = \frac{1}{(x^2-1)^2}, \qquad y = \frac{1}{(x-2)^2(x+3)},$$

$$y = \frac{1}{(x^2 - 5x + 6)^2}, \qquad y = \mathrm{L}(x^2 - 5x + 6), \qquad y = \mathrm{L}(1 + x + x^2), \qquad y = \mathrm{L}(x^2 - 6x + 8)_{x-1}^{a}.$$

9789. — Développer en séries les fonctions

$$y = \arcsin x, \qquad y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad y = (\arcsin x)^2, \qquad y = \frac{\arg\operatorname{sh} x}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad y = \frac{\mathrm{L}(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad y = (\arg\operatorname{sh} x)^2.$$

9790. — Développer en série la fonction $y = \mathrm{L}\,(1 + \sqrt{1-x})$ (on calcule la dérivée $y' = \frac{1-(1-x)^{-\frac{1}{2}}}{2x}$ et on la développe en série).

9791. — Limites des expressions suivantes :

$y = \frac{x\cos x - \sin x}{e^x - e^{-x} - 2x}$ pour $x = 0$, $\quad y = \frac{\mathrm{L}\cos px}{\mathrm{L}\cos qx}$ pour $x = 0$, $\quad y = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\mathrm{L}x - 1}$ pour $x = e$, $\quad y = \frac{\mathrm{L}x - \mathrm{L}a}{\mathrm{sh}\,(x-a)}$ pour $x = a$.

9792. — Limite de $\frac{\mathrm{L}n}{n^{\frac{1}{2}}}$ pour n infini; limite de $\frac{\mathrm{L}\,\mathrm{ch}\,n}{n}$ pour $n = 0$ et pour n infini.

9793. — Limites pour $x = 0$ des expressions suivantes :

$x\mathrm{L}x$, $\quad x^3\mathrm{L}x$, $\quad \sqrt{x}.\mathrm{L}x$, $\quad \sqrt[3]{x}.\mathrm{L}x$, $\quad \mathrm{tg}\,x.\mathrm{L}x$, $\quad \mathrm{L}\cos x.\mathrm{L}x$, $\quad \mathrm{L}\sin x.\mathrm{L}\cos x$, $\quad \mathrm{L}\,\mathrm{tg}\,x.\mathrm{L}\,\mathrm{ch}\,x$, $\quad \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)e^{x - \frac{1}{x}}$.

9794. — Limite de $y = \mathrm{tg}\,x.2^{\cot\mathrm{g}\,2x}$ pour $x = \frac{\pi}{2}$.

9795. — Limite de $y = (x+1)\mathrm{L}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ pour $x = -1$.

9796. — Limites pour n infini des expressions suivantes :

$$\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e\right] \times n, \qquad \mathrm{L}n.\mathrm{L}\frac{n+1}{n}, \qquad \mathrm{L}\frac{n+1}{n}.\mathrm{L}[n(n+1)].$$

9797. — Limites pour n infini des expressions suivantes :

$$\sqrt[3]{n^3 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 3n + 4}, \qquad \mathrm{ch}\sqrt{n+1} - \mathrm{ch}\sqrt{n}, \qquad [\mathrm{L}(n+1)]^2 - (\mathrm{L}n)^2.$$

9798. — Limite pour $x = 0$ de $y = (\sin x)^{\mathrm{tg}\,x}$.

9799. — Limites pour n infini de $\sqrt[n]{3n^2 + 1}$, $\sqrt[n]{\mathrm{ch}\,n}$, $n^{\mathrm{L}\frac{n+1}{n+2}}$, $n^{\mathrm{L}\frac{n+1}{n+4}}$, $n^{\frac{n+4}{n+1}}$.

9800. — Limite de $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$: 1° quand x tend vers -1 ; 2° quand x tend vers l'infini.

9801. — Limites pour $x = 0$ des expressions suivantes :

$$(\cos x)^{\mathrm{L}x}, \qquad \left(\frac{\cos x + \mathrm{ch}\,x}{2}\right)^{\mathrm{L}x}, \qquad \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}, \qquad \left[\frac{\mathrm{L}(1+x)}{x}\right]^{\mathrm{L}x}.$$

9802. — Limites des expressions suivantes :

$(2 - x)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}}$ pour $x = 1$, $\quad (\sin x)^{\mathrm{tg}\,x}$ pour $x = \frac{\pi}{2}$, $\quad (\mathrm{tg}\,x)^{\mathrm{tg}\,2x}$ pour $x = \frac{\pi}{4}$, $\quad (\cos x - \cos 2x)^{\mathrm{tg}\,x}$ pour $x = \frac{\pi}{2}$.

9803. — Limites pour n infini de $\left(\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right)^n$, $\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}$, $\left(\frac{\mathrm{ch}\,n}{\mathrm{sh}\,n}\right)^{\mathrm{L}n}$.

9804. — Limite pour m infini de $\left(2^{\frac{1}{m}} + 3^{\frac{1}{m}}\right)^{\mathrm{L}m}$; de $x^{\frac{1}{x}}\mathrm{L}x$, de $(\sin x)^{\frac{1}{\mathrm{L}x}}$ et de $(\sin x)^{\frac{1}{\mathrm{L}\sin x}}$ pour $x = 0$: de $(\sin x)^{(x - \frac{\pi}{2})^{\cos x}}$ pour $x = \frac{\pi}{2}$.

(A suivre.)

SUJETS DE CONCOURS

ÉCOLE CENTRALE

Concours de 1915.

Géométrie analytique.

2324. — Soient Ox et Oy deux axes de coordonnées rectangulaires; on considère les coniques (C) qui touchent Ox au point O et ont une directrice fixe (D) dont l'équation est $x + y - a = 0$, a désignant une longueur positive donnée. Cette droite (D) coupe Ox au point A.

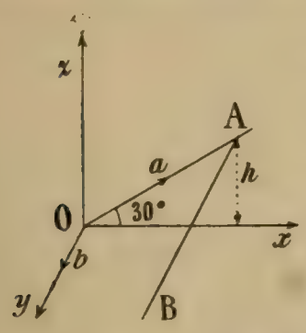
1° Démontrer que le lieu du foyer F de (C) qui correspond à la directrice (D) est la circonférence (Δ) du cercle décrit sur OA comme diamètre.

2° Discuter le genre de (C) lorsque F décrit (Δ).

3° Trouver et construire le lieu du second foyer F′ de (C).

Mécanique.

2325. — Soient trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz dont l'un Oz est vertical et dirigé positivement dans le sens contraire à celui de la pesanteur. On considère le plan incliné yOA dont la trace montante OA, sur le plan xOz, fait un angle de 30° avec la direction positive Ox. Ce plan incliné est supposé indéformable; on en enlève toute la partie située au-dessus de son horizontale AB de cote donnée h positive.



Du point O, on lance dans ce plan incliné, avec une vitesse initiale dont les composantes sont données, a dans le sens OA, b dans le sens positif Oy, un point matériel pesant. On suppose qu'il n'y a pas de frottement du point matériel sur le plan incliné et que l'intensité g de la pesanteur est connue. On demande :

1° A quelle condition doit satisfaire la composante a de la vitesse initiale pour que le point matériel dépasse l'horizontale AB;

2° Cette condition étant supposée satisfaite, de calculer en fonction des données le temps T que met le mobile partant de O pour atteindre le plan horizontal xOy et les coordonnées du point de chute dans ce plan.

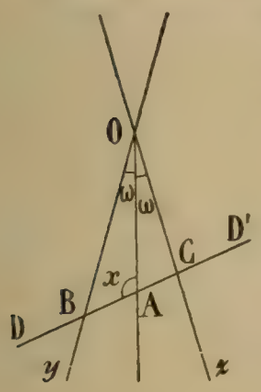
Application numérique. — Dans le système C.G.S., on donne

$$h = 1744, \qquad g = 981, \qquad b = 20, \qquad \text{et } a = 5\sqrt{g.h}.$$

Calculer T à un dixième de seconde près et les coordonnées du point de chute à un centimètre près.

Trigonométrie.

2326. — On donne un angle yOz égal à 2ω et un point A sur la bissectrice de cet angle. On désigne par a la distance OA.



On mène par A une sécante variable DAD', qui rencontre les côtés de l'angle ou leurs prolongements en B et en C; on désigne par x l'angle OAD que fait la sécante avec AO.

1° Étudier la variation de $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ quand on fait varier x de 0 à π.

2° Déterminer l'angle x de façon que

$$\frac{1}{\overline{AB}^2} + \frac{1}{\overline{AC}^2} = \frac{1}{k^2},$$

en désignant par k une longueur donnée.

Discuter, puis calculer l'aire du triangle OBC et le côté BC en fonction des données ω, a et k.

Calcul.

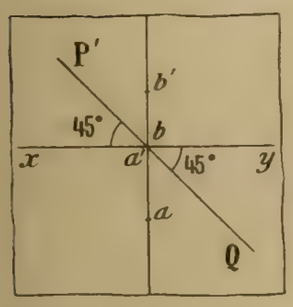
Calculer, au moyen des tables de logarithmes, les angles A, B, C d'un triangle, connaissant les trois côtés $a = 22538$, $b = 24352$, $c = 28432$, au moyen des formules

$$2p = a + b + c, \qquad r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}, \qquad \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}, \qquad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}, \qquad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}.$$

Epure.

2327. — Ni cadre, ni titres, ni flèches.

xy petit axe de la feuille, a' et b centre de la feuille $aa' = 8^{cm}$, $bb' = 6^{cm}$.



Dans le plan de bout P' se trouve un cercle de rayon 4^{cm}, tangent en (a,a') au plan horizontal de projection et situé au-dessus de ce plan; il est la section droite d'un cylindre.

Dans le plan vertical Q se trouve un cercle de rayon 5^{cm} tangent en (b,b') au plan vertical de projection et situé en avant de ce plan : il est la section droite d'un cylindre.

On demande de représenter par ses deux projections le solide commun à ces deux cylindres.

Mise à l'encre. — On fera les constructions nécessaires pour la détermination d'un point quelconque de l'intersection des deux surfaces cylindriques et de la tangente en ce point, des points et tangentes remarquables.

Le solide demandé sera *seul* dessiné à l'encre noire : lignes vues en trait plein, lignes cachées en *points*

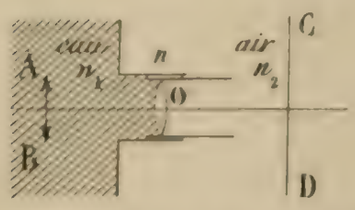
ronds. Toutes les autres lignes seront à l'encre rouge (trait plutôt fin), y compris les tangentes qui seront légèrement renforcées aux environs des points de contact et les lignes de points doubles aussi légèrement renforcées.

Nota. — Se conformer scrupuleusement à toutes ces indications.

Physique.

I. — Définition du point critique par les courbes d'Andrews.

II. — **2328**. Une source monochromatique fixe AB placée dans l'eau d'indice n_1 envoie des rayons sur la première face d'une lentille mince O d'indice n, dont l'autre face est dans l'air d'indice n_2. Un écran fixe CD recevra l'image réelle et nette de AB, dont il est séparé par une distance invariable L, pour deux positions de la lentille O, que l'on peut déplacer dans un tube à coulisse. Cette lentille est biconvexe et à rayons de courbure égaux r.



On demande de calculer la distance x des deux positions de la lentille pour lesquelles l'image est nette sur l'écran.

Après avoir établi la formule définitive, on fera l'application numérique au cas suivant :

$$n_1 = \frac{4}{3}, \qquad n = \frac{3}{2}, \qquad n_2 = 1, \qquad L = 200^{cm}, \qquad r = 30^{cm}.$$

Chimie.

I. — Préparations du phosphore blanc et du phosphore rouge.

II. — **2329**. *1re opération*. — On fait passer un courant de gaz sulfureux sur de l'hydrure de sodium. Tout l'hydrogène de l'hydrure est chassé, et il se fait de l'hydrosulfite de sodium.

2e opération. — L'hydrogène dégagé dans la première opération est mis en présence d'indigo bleu additionné de soude. Sous l'influence d'un catalyseur convenable, l'indigo bleu se trouve, dans ces conditions, ramené à l'état d'indigo blanc.

3e opération. — L'hydrosulfite formé dans la première opération est mis en présence d'indigo bleu additionné de soude. L'indigo bleu se trouve, dans ces conditions, ramené à l'état d'indigo blanc.

On demande d'expliquer et de formuler les réactions produites dans ces trois opérations. On prendra pour formule de l'indigo bleu $C^{16}H^{10}Az^2O^2$ et pour formule de l'indigo blanc $C^{16}H^{10}Az^2O^2Na^2$.

On demande de calculer le rapport des poids d'indigo bleu transformés en indigo blanc dans la deuxième et dans la troisième opération.

(On n'a pas donné avec ce texte, le tableau des poids atomiques.)

Concours de 1916.

Géométrie analytique et cinématique.

2330. — Dans le plan fixe P pris pour plan de la figure, soit donné l'axe Ox et le pôle O d'un système de coordonnées polaires où ρ désigne le rayon vecteur et ω l'angle polaire d'un point quelconque de P. On considère la droite (D) du plan P dont l'équation, dans ce système, est

$$\rho = \frac{5a}{3\cos\omega - 4\sin\omega},$$

où a représente une longueur positive donnée.

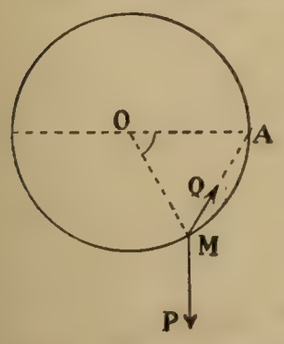
A tout point S de (D) de coordonnées polaires ρ_1 et ω_1 $0 \leqslant \omega_1 \leqslant \pi$, rapport d'une circonférence de cercle à son diamètre) correspond, dans le plan P, un point M dont les coordonnées polaires, dans le même système, sont $\rho = \rho_1$ et $\omega = 2\omega_1$.

1° Construire le lieu de M lorsque S décrit (D) tout entière.

2° Sachant que S décrit (D), dans le sens des ω croissants, avec une vitesse constante a, démontrer que la vitesse aréolaire M par rapport au pôle O est constante et en donner la valeur, puis calculer l'accélération de M en fonction de son rayon vecteur ρ.

Mécanique.

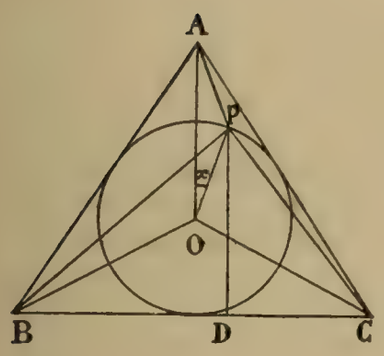
2331. — On considère, dans un plan vertical, un cerceau circulaire de centre O et de rayon a formé d'un fil métallique d'épaisseur négligeable et supposé non déformable. Un anneau M, de poids donné P, que l'on traitera comme un point matériel, est assujetti à glisser sans frottement sur le cerceau. Dans chacune de ses positions, il est sollicité par son poids P et par une force constante $Q = \frac{P}{5}$ dirigée suivant la corde MA; le point A est sur le cerceau à une extrémité de son diamètre horizontal.



L'anneau se meut sur le cerceau en partant de A sans vitesse initiale et, en chaque point de sa course, il subit de la part du cerceau une réaction R.

On demande : d'exprimer R en fonction de l'angle au centre AOM, de construire la position de M pour laquelle R atteint son maximum et de calculer ce maximum, à un décigramme près, sachant que $P = 320^g$.

Trigonométrie.



2332. — Étant donné un triangle équilatéral ABC circonscrit à un cercle de centre O et de rayon R, on considère un point P, variable sur ce cercle et on désigne par x l'angle AOP.

1° Évaluer en fonction de R et de x la distance PA et la distance PD du point P à la droite BC; puis étudier les variations de la somme et du produit de ces deux distances PA et PD quand on fait varier l'angle x.

2° Déterminer x de façon que le produit des deux distances PB et PC soit égal à une quantité donnée m^2. Discuter.

Calcul.

Dans un triangle ABC, on donne $a = \sqrt{48632}$, $b = \sqrt{22443}$, $\sin A = 0{,}8$.

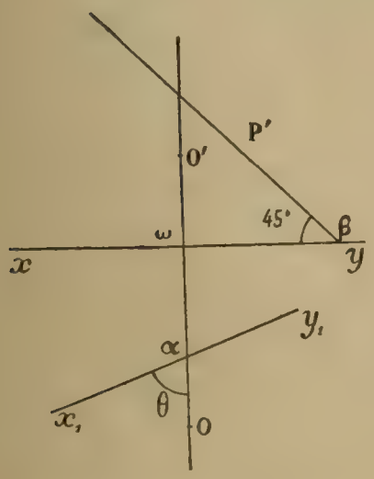
Calculer les trois angles A, B, C et les trois côtés a, b, c, au moyen des formules

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \qquad A + B + C = 180^\circ.$$

Géométrie descriptive.

2333. — Cadre 27^{cm} sur 45^{cm}, aucun titre.

La ligne de terre xy (en rouge) est le petit axe du cadre; $x\omega = \omega y$, $\omega o' = 6^{cm}$, $\omega o = 13^{cm}$, $\omega\beta = 12^{cm}$.



Une surface gauche de révolution qui a son axe vertical a pour centre le point (o, o'); les génératrices rectilignes font avec le plan horizontal un angle de 45° et le rayon du cercle de gorge est de 4^{cm}.

Un cône de révolution a pour sommet le point le plus à gauche du cercle de gorge; son axe est parallèle à xy et les génératrices rectilignes font avec l'axe un angle de 45°.

On demande de représenter par ses deux projections le solide commun au cône et à l'hyperboloïde, limité au plan horizontal de projection et au plan de bout P'.

On demande aussi une seconde projection verticale de ce solide en prenant $x_1\alpha y_1$ pour nouvelle ligne de terre. $\omega\alpha = 7^{cm}$, $\operatorname{tg}\theta = 2{,}15$.

On fera les constructions nécessaires pour déterminer un point de chaque courbe et la tangente en ce point, les points et les tangentes remarquables.

Nota. — Les projections du solide demandé seront seules tracées à l'encre noire : lignes vues en traits pleins, lignes cachées en points ronds. Tout le reste en rouge (trait plutôt fin), y compris les tangentes trouvées, qui seront légèrement accentuées aux environs des points de contact.

Physique.

I. — Démontrer le théorème suivant dû à Coulomb :

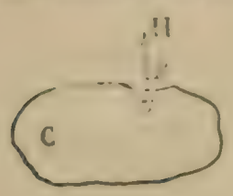
L'intensité H du champ électrostatique, en un point P infiniment voisin d'un conducteur C en équilibre et dans le vide, est égale à la densité électrique σ, sur la surface, dans le voisinage du point, multipliée par le facteur 4π : $H = 4\pi\sigma$.

II. — **2334**. On propose de déterminer, d'une manière grossièrement approchée, l'intensité g du champ de la pesanteur terrestre, en utilisant les oscillations d'un pendule simple; celui-ci est constitué par une sphère très dense, de diamètre 16^{mm}, attachée à la partie inférieure d'un fil inextensible de masse négligeable; la longueur de ce fil, mesurée de l'axe jusqu'à la surface de la sphère, est de 81^{cm}.

La durée d'une oscillation complète de ce pendule est trouvée égale à $1^{sec},82$, l'amplitude des oscillations étant très petite.

1° Quelle valeur déduirait-on de cette mesure pour l'intensité g du champ ?

2° Quelle est la valeur maximum de l'erreur absolue possible sur ce résultat, si la longueur du fil de suspension a été déterminée avec une erreur possible de 1^{mm} et si la durée de l'oscillation, donnée plus haut, résulte de la mesure totale de 70 oscillations complètes, à l'aide d'un compteur à pointage dont l'usage comporte une erreur absolue possible de $\frac{1}{3}$ de seconde en plus ou en moins à chaque pointage? On ne tiendra pas compte de la résistance de l'air. On prendra $\pi = 3,14$.



3° Dans les calculs précédents, on prendra comme longueur du pendule simple la distance de l'axe d'oscillation au centre de la sphère; montrer que l'erreur absolue que l'on commet ainsi sur la longueur du pendule est négligeable vis-à-vis de celle indiquée, ci-dessus, comme admise.

Chimie.

I. — Propriétés physiques et chimiques du chlore.

II. — **2335**. Un mélange gazeux, à la pression d'une atmosphère, est formé, pour le quart de son volume d'azote, et pour le reste d'hydrogène. Il a pour volume $V = 7 \times 22^{l},4$.

La température est 0°; elle conservera toujours cette même valeur dans la suite.

1° On combine les $\frac{6}{7}$ du mélange en formant du gaz ammoniac. Le volume ayant gardé la valeur V, quelle est la pression du mélange d'azote, hydrogène, ammoniac ainsi obtenu?

2° On introduit $143^{g},5$ de chlorure d'argent dans le mélange gazeux. Quelle sera la pression d'équilibre, le volume n'ayant pas changé?

3° On diminue le volume depuis V jusqu'à $\frac{V}{7}$. Quelle sera la nouvelle valeur de la pression d'équilibre?

4° On construira le graphique

$$x = v, \qquad y = pv,$$

v étant le volume variable, et p la pression variable pendant la transformation décrite dans la troisième partie.

Données. — AgCl et AzH^3 se combinent pour former $2AgCl,3AzH^3$, puis $AgCl,3AzH^3$. Ces corps se dissocient suivant les formules

$$2AgCl,3AzH^3 \rightleftarrows 2AgCl + 3AzH^3,$$

pression de dissociation à 0° : $\frac{1}{10}$ atmosphère;

$$2[AgCl,3AzH^3] \rightleftarrows 2AgCl,3AzH^3 + 3AzH^3,$$

pression de dissociation à 0° : $\frac{4}{10}$ atmosphère.

La pression de dissociation n'est pas modifiée par la présence d'un gaz inerte, c'est-à-dire que la pression du gaz inerte s'ajoute à la pression de dissociation.

Nota. — Chaque candidat reçoit un tableau donnant les masses atomiques des corps simples, et le volume de la molécule-gramme des gaz parfaits.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

Coulommiers. — Imprimerie PAUL BRODARD.

30e Année. Décembre 1919. N° 3.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Note de la Rédaction. — Nos lecteurs ont certainement remarqué le grand retard apporté à la publication des solutions des questions proposées dans la *Revue*.

Pour remédier à cet inconvénient et supprimer une bonne partie de ce retard dans l'année en cours, nous avons décidé de ne pas publier la solution des questions peu intéressantes et de celles qui ne correspondent plus au programme réduit actuel.

Nous annonçons déjà la suppression des questions 2193, 2197, 2206, 2208, 2209, 2210, 2213, 2228, 2244, 2299, 2305, 2311. Après un examen attentif, d'autres suppressions suivront; nous en avertirons nos lecteurs, quand le moment sera venu.

Nous donnons aussi quelques questions proposées marquées d'un astérisque et dont les solutions ne seront pas publiées.

PREMIÈRE PARTIE

SECTIONS PLANES ET SPHÉRIQUES DU TORE

par M. **A. Sainte-Laguë**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Besançon.

Généralités.

1. Lorsqu'un cercle tourne autour d'une droite de son plan, il engendre une surface du quatrième degré appelée tore, qui admet le cercle de l'infini comme ligne double. Cette surface a deux points coniques réels ou imaginaires qui sont les points de rencontre de l'axe avec le cercle générateur, ou cercle méridien. Les deux points coniques ne sont réels que si l'axe coupe le cercle en des points réels. Ils sont confondus si le cercle tourne autour d'une de ses tangentes.

Si l'axe de révolution passe par le centre du cercle générateur, on a une sphère; si l'axe s'éloigne indéfiniment, le tore tend à la limite vers un cylindre droit à base circulaire. Nous supposerons dans tout ce qui suit que l'on a un véritable tore et non une sphère ou un cylindre.

Il résulte de la génération du tore qu'il y a sur sa surface deux familles de cercles : les méridiens, cercles de même rayon passant par deux points fixes, et les parallèles dont l'axe est fixe. Ils forment sur la surface des familles de courbes orthogonales.

2. Un tore est une surface anallagmatique, c'est-à-dire qu'il peut se transformer en lui-même par une inversion ayant comme centre un point quelconque de l'axe autre que les points coniques et ayant comme puissance la puissance de ce point par rapport à un cercle méridien. Ils est alors orthogonal à la sphère d'inversion correspondante.

Dans le cas où les points coniques sont réels, si l'on transforme le tore par rapport à l'un de ces points, on obtient comme surface inverse un cône de révolution ou un cylindre de révolution. Inversement,

l'inverse d'un cône ou d'un cylindre de révolution par rapport à un point de son axe est un tore. Les deux nappes du cône correspondent aux deux nappes du tore limitées aux points coniques.

Rappelons pour mémoire que la transformée par inversion d'un tore par rapport à un point quelconque de l'espace s'appelle une cyclide de Dupin.

Si le centre d'inversion s'éloigne indéfiniment dans le plan équatorial ou sur l'axe de révolution, on retrouve le tore à cause de ses diverses symétries.

3. Les sections d'un tore par une surface de degré m sont des courbes de degré $4m$. Si la surface considérée passe par le cercle de l'infini p fois, on a une courbe de degré $4m - 4p$. C'est ainsi que les sections d'un tore par un plan, une sphère ou un tore sont respectivement de degrés 4, 4 et 8. Nous nous bornerons dans ce qui suit à étudier les courbes planes ou sphériques de degré 4, ou de degré moindre, que l'on peut tracer sur un tore.

Les seuls cas de décomposition que nous trouverons sont les cas de deux coniques, car on ne peut pas trouver de droites sur un tore. Nous verrons d'ailleurs que ces coniques sont toujours des cercles.

Sections planes.

4. La section plane d'un tore est une quartique ayant deux points doubles sur le cercle de l'infini, donc une quartique bicirculaire. Elle a un axe de symétrie, qui est la projection de l'axe de révolution sur le plan sécant.

Si ce plan sécant est perpendiculaire à l'axe du tore, la section est formée de deux parallèles qui sont confondus dans le cas du parallèle supérieur ou du parallèle inférieur.

Si ce plan est parallèle à l'axe, on a deux axes de symétrie pour la section. Si le plan est tangent au tore, on a une quartique ayant trois points doubles, donc unicursale. Il est d'ailleurs évident qu'il y a deux catégories de plans tangents parallèles à l'axe : les premiers donnent une quartique réduite à un point double isolé, les autres donnent une quartique ayant un point double qui n'est isolé que si les points coniques sont réels.

Dans le cas d'une quartique à point double non isolé, l'angle des tangentes au point double est celui des asymptotes de l'indicatrice au point considéré. Cet angle est droit si le rayon du parallèle de ce point est égal au rayon du méridien. On a alors comme section plane une lemniscate. Il est facile de voir que par sa rotation autour de l'axe une telle lemniscate engendre toute la surface du tore et non pas seulement une nappe de cette surface.

Lorsque le plan sécant constamment parallèle à l'axe se rapproche de plus en plus de cet axe, il est facile de voir quelles sont les formes successives de la section plane depuis un point double isolé jusqu'aux deux cercles de section par un plan méridien. Si les points coniques sont imaginaires, on trouve d'ailleurs des formes analogues à celles des ovales de Cassini. Pour chacune de ces courbes, la recherche des points sur les axes de symétrie et des points où les tangentes sont parallèles à ces axes ne présente aucune difficulté.

5. Supposons maintenant que le plan sécant coupe l'axe de révolution en un point I sans lui être perpendiculaire. Avec une puissance d'inversion convenable, I étant centre d'inversion, on voit que le tore et le plan se transforment en eux-mêmes. La quartique d'intersection admet donc I comme centre d'anallagmatie. On retrouve la génération de telles quartiques comme enveloppe de cercles en remarquant que le tore est l'enveloppe des sphères admettant comme grand cercle un cercle méridien, sphères que nous appellerons méridiennes. Les traces de ces sphères sur le plan sécant ont comme enveloppe la quartique étudiée. On voit que ces cercles sont orthogonaux, comme les sphères méridiennes, à la sphère d'inversion de centre I, et par suite au cercle suivant lequel cette sphère d'inversion est coupée par le plan sécant. Les centres de ces cercles décrivent la projection sur le plan sécant du lieu des

centres des sphères méridiennes. Ce lieu est un cercle ; donc les cercles bitangents ont leur centre sur une ellipse qui est la déférente. Ici, à cause de la symétrie de la figure, le cercle orthogonal aux cercles bitangents, ou cercle directeur, a son centre sur le petit axe de l'ellipse déférente.

6. Si le plan sécant est tangent au tore, la quartique d'intersection a un point double et est unicursale. Le cercle directeur est alors tangent à la déférente au point double. Dans le cas où les tangentes au point double sont réelles, on les obtient en construisant les asymptotes de l'indicatrice. Il résulte de cette construction, que nous préciserons un peu plus loin, que ces tangentes sont rectangulaires si le point de contact est le milieu de la portion de normale au tore limitée à l'axe et au plan équatorial. Quand le rayon du parallèle supérieur du tore est inférieur au diamètre du cercle méridien, il y a deux parallèles du tore, qui sont les lieux de tels points de contact. Leur construction est immédiate.

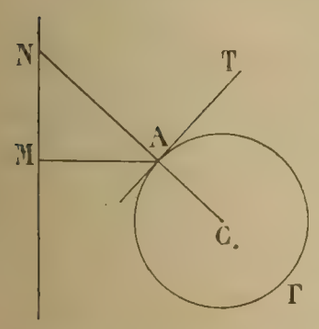
Si le plan est bitangent, l'intersection est une quartique à quatre points doubles (y compris les points cycliques). Elle se décompose en deux coniques, non dégénérées en droites ; ce sont donc des cercles. Les points de contact de ce plan sont dans le plan de symétrie de la figure ; la trace du plan sécant dans ce plan de symétrie est tangente commune aux deux cercles méridiens de ce plan. Le cas où elle est parallèle à la ligne des centres donne le parallèle supérieur. Le cas où elle passe par le centre du tore donne le cas classique du théorème d'Yvon Villarceau, sur lequel nous n'insisterons pas davantage. Rappelons seulement que, en projection sur le plan équatorial, les deux cercles d'Yvon Villarceau donnent des ellipses ayant pour foyer le centre du tore.

7. Nous avons supposé implicitement que le point de rencontre de l'axe avec le plan sécant n'était as un des points coniques du tore. S'il en est autrement, ce point est un point double de la quartique d'intersection qui est unicursale. La transformation par inversion de centre I ramène la courbe à être une section plane de cône, donc une conique. La quartique est alors une inverse de conique. Les tangentes au point double sont les génératrices du cône tangent en I au tore situées dans le plan sécant. Elles peuvent être rectangulaires.

Si le plan sécant est tangent au tore en I, on a un point de rebroussement pour la quartique de section, quartique qui est l'inverse d'une parabole.

On voit que l'intersection d'un tore par un plan ne se décompose que si elle est formée de deux cercles, ce que l'on peut traduire encore en disant que *les seules coniques tracées sur un tore sont des cercles.* Ils peuvent appartenir à l'une des trois familles : méridiens, parallèles, cercles d'Yvon Villarceau.

8. Nous avons vu que chacune de ces quartiques peut être considérée comme enveloppe de cercles bitangents. On pourrait en déduire la construction du rayon de courbure en un point, mais nous allons déduire cette construction de la recherche de l'indicatrice en un point du tore. En un point A du tore, point que nous prendrons dans le plan de figure, l'un des axes de l'indicatrice est par raison de symétrie la tangente AT au méridien Γ. Le rayon de courbure correspondant est par suite le rayon AC de ce cercle. L'autre axe de l'indicatrice est la normale au plan de figure en A. Parmi les plans passant par cette droite, il y en a un, le plan du parallèle de A, qui donne une courbe de rayon de courbure connu AM. Le théorème de Meunier permet d'en conclure que le point N où AC coupe l'axe est le second centre de courbure principal. Ces raisonnements sont classiques et s'appliquent à n'importe quelle surface de révolution. On peut donc construire sans peine l'indicatrice. On voit en particulier que c'est une hyperbole équilatère quand AC = AN, propriété que nous avons utilisée ci-dessus.



La connaissance de l'indicatrice donne le rayon de courbure en un point quelconque de toute section plane, puisque l'on peut construire la trace du plan sécant sur le plan de l'indicatrice, c'est-à-dire la tangente à la courbe, et en déduire le rayon de courbure de la section normale passant par cette tangente. Le théorème de Meunier donnera ensuite le rayon de courbure de la section considérée.

Signalons encore la méthode qui consiste à substituer au tore la surface engendrée par la rotation autour de MN d'une conique d'axe MN ayant le cercle Γ comme cercle osculateur en A. On obtient ainsi une quadrique dont la section par le plan sécant donné est une conique de même cercle de courbure en A que la section du tore. Nous laissons au lecteur le soin de faire les constructions.

(*A suivre.*)

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2142. — *La perpendiculaire élevée au milieu du rayon de courbure d'une parabole enveloppe une courbe du quatrième degré. La construire.*

Soient $y^2 - 2px = 0$ l'équation de la parabole rapportée à ses axes ordinaires, et α, β les coordonnées du pied de la normale sur laquelle se trouve le rayon de courbure. L'équation de cette normale est

$$\frac{x-\alpha}{-p} = \frac{y-\beta}{\beta}.$$

Soit ρ la valeur commune des rapports ; on sait que le rayon de courbure est le double de la portion de normale comprise entre la directrice et la parabole ; par suite, le ρ du milieu est égal au ρ changé de signe du point de rencontre avec la directrice ; pour $x = -\frac{p}{2}$, celui-ci est $\frac{\alpha + \frac{p}{2}}{p}$; donc les coordonnées du point cherché sont données par

$$\frac{x-\alpha}{-p} = \frac{y-\beta}{\beta} = -\frac{\alpha + \frac{p}{2}}{p},$$

d'où

$$x = 2\alpha + \frac{p}{2}, \qquad y = \beta - \frac{\beta}{p}\left(\alpha + \frac{p}{2}\right) = \frac{\beta}{p}\left(\frac{p}{2} - \alpha\right).$$

Portons les axes au foyer et remplaçons α par $\frac{\beta^2}{2p}$: nous aurons $x = \frac{\beta^2}{p}$, $y = \frac{\beta}{p}\left(\frac{p^2 - \beta^2}{2p}\right)$.

La droite menée par ce point perpendiculairement à la normale a donc pour équation

$$y - \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2p^2} = \frac{p}{\beta}\left(x - \frac{\beta^2}{p}\right),$$

ou

$$y = \frac{px}{\beta} - \frac{\beta}{2} - \frac{\beta^3}{2p^2}.$$

L'enveloppe de cette droite s'obtient en dérivant son équation par rapport à β, et calculant x et y en fonction de β. Ceci donne $-\frac{px}{\beta^2} - \frac{1}{2} - \frac{3\beta^2}{2p^2} = 0$, ou

$$x = -\frac{\beta^2}{2p} - \frac{3\beta^4}{2p^3} = -\frac{\beta^2}{2p^3}(3\beta^2 + p^2),$$

puis

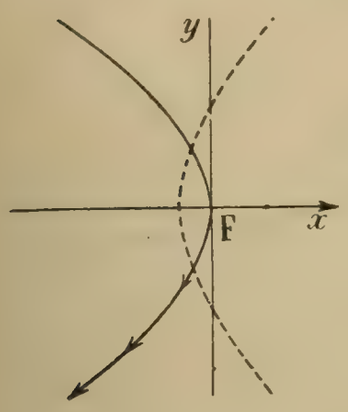
$$y = -\frac{\beta}{2p^2}(3\beta^2 + p^2) - \frac{\beta}{2} - \frac{\beta^3}{2p^2} = -\frac{\beta}{p^2}(2\beta^2 + p^2).$$

En posant $\beta = pt$, les équations paramétriques de l'enveloppe sont donc

$$x = -\frac{pt^2}{2}(3t^2+1),$$

$$y = -pt(2t^2+1).$$

Ce sont les équations d'une courbe du quatrième ordre aisée à construire.



Pour cela, nous remarquerons d'abord que le changement de t en $-t$ laisse x invariable et change y en $-y$. La courbe est donc symétrique par rapport à Ox, et, pour en obtenir la moitié, il suffit de faire varier t de 0 à $+\infty$. Pour $t=0$, x et y sont nuls, $\frac{y}{x}$ est infini; pour $t=\infty$, x et y sont égaux à $-\infty$, $\frac{y}{x}$ est nul; x' et y' sont toujours négatifs, $\frac{y'}{x'}$ toujours positif :

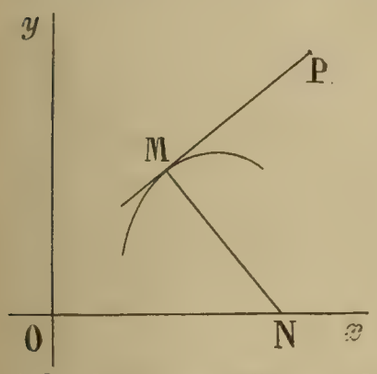
$$\frac{y'}{x'} = p.\ \frac{6t^2+1}{6t^3+t} = \frac{1}{t}.$$

La courbe a donc la forme ci-dessus; elle a l'aspect d'une parabole.

M. ROUX, Le Creusot.

Bonnes solutions : MM. G. Lach, à Douai ; L. Naucelle, à la Châtre ; M. Ullmann, à Héricourt ; Roy Gaston ; L. Thiringer.

2214. — *La normale en* M *à une courbe* C *rencontre l'axe* Ox *en un point* N, *et sur la tangente en* M *on porte* MP = MN. *Déterminer la courbe* C *de façon que le lieu de* P *soit une droite donnée* Δ. *Examiner le cas où l'angle de* Δ *avec* Ox *est égal à* 45°.



Soient x et y les coordonnées du point M. On sait que la normale en ce point a pour équation

$$(X-x)x' + (Y-y)y' = 0,$$

x' et y' étant les dérivées de x et de y par rapport au paramètre dont le lieu dépend. L'abscisse de N est donc fournie par la relation

$$X - x = \frac{yy'}{x'}$$

et la longueur MN est donnée par

$$\overline{MN}^2 = y^2 + \frac{y^2y'^2}{x'^2},$$

$$MN = \frac{y}{x'}\sqrt{x'^2+y'^2}.$$

En portant cette longueur sur la tangente à partir du point M, on obtient, pour les coordonnées du point P,

$$X = x + MN\cos\alpha, \qquad Y = y + MN\sin\alpha.$$

Or,

$$\cos\alpha = \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},$$

et les coordonnées du point P sont

$$X = x + y, \qquad Y = y + \frac{yy'}{x'}.$$

En tenant compte du double signe du radical, on pourrait aussi bien prendre les expressions

$$X = x - y, \qquad Y = y - \frac{yy'}{x}.$$

Adoptons les premières, et exprimons que le point P est sur une droite donnée Δ. Comme nous pouvons supposer que cette droite passe au point O, elle aura pour équation $y = mx$, et nous aurons la relation

$$y - \frac{yy'}{x} = m(x - y).$$

Prenons alors x comme variable indépendante, y sera solution de l'équation différentielle

$$y + yy' = m(x + y).$$

C'est une équation homogène que nous résoudrons en posant $y = tx$. Alors $y' = t + xt'$, et l'équation devient

$$t + t(t + xt') = m(1 + t),$$
$$tt'x = (1 + t)(m - t),$$
$$\frac{dx}{x} = \frac{tdt}{(1 + t)(m - t)}.$$

Le second membre est une fraction rationnelle qui prend la forme

$$\frac{A}{1 + t} + \frac{B}{m - t};$$

en l'identifiant avec la première forme, on obtient

$$B - A = 1, \qquad B + Am = 0,$$
$$A = \frac{-1}{1 + m}, \qquad B = \frac{m}{1 + m},$$

et l'intégrale générale de l'équation différentielle est donnée par

$$L\frac{x}{C} = \frac{-1}{1 + m} L(1 + t) + \frac{m}{1 + m} L(m - t),$$
$$(1 + m) L\frac{x}{C} = L\frac{1}{(1 + t)(m - t)^m}.$$

Nous avons supposé $1 + t$ et $m - t$ positifs; si nous supposons x positif aussi, nous aurons

$$(x)^{1+m}(1 + t)(m - t)^m = C,$$

ou

$$(x + y)(mx - y)^m = C.$$

Telle est la courbe qui correspond au cas dont nous avons parlé. Les autres cas donneraient la courbe

$$(x + y)(y - mx)^m = C.$$

Supposons maintenant que m soit nul; nous aurons alors

$$y(1 + y') = 0,$$

équation qui donne les deux solutions évidentes $y = 0$ et $x + y = C$.

Si enfin nous supposons $m = 1$, c'est-à-dire l'angle de Δ avec Ox égal à 45°, l'équation différentielle deviendra

$$\frac{dx}{x} = \frac{tdt}{1 - t^2}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{2dx}{x} = \frac{2tdt}{1 - t^2},$$

ce qui donne

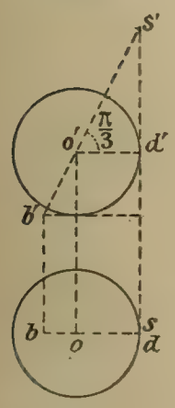
$$L\frac{C}{(1 - t^2)} = Lx^2, \qquad x^2(1 - t^2) = C, \qquad x^2 - y^2 = C.$$

Les courbes correspondantes sont des hyperboles équilatères, ayant pour axes Ox et Oy. Cette solution était d'ailleurs évidente *a priori*, comme on s'en rendra facilement compte en revenant aux propriétés de cette courbe, et remarquant que OM et la normale en M sont également inclinées sur les axes.

Bonnes solutions : MM. L. Simon, à Fourmies; M. Jolly, à Honfleur; G. Lach, à Douai; P. Martin, à Toulon.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

2254. — 1° *Une sphère a* 6cm *de rayon. La ligne de rappel oo' des projections du centre a pour longueur* 17cm. *Elle est parallèle au grand côté de la feuille, à* 14cm *du bord droit, le point o à* 12cm *du bord inférieur.*



2° *Un cône de révolution a son axe dans le plan de front du centre de la sphère. Son sommet (s, s') est sur la verticale et au-dessus du point le plus à droite (d, d') de la sphère. Une des génératrices de front passe par le centre et fait avec l'horizontale o'd' un angle égal à* $\frac{\pi}{3}$. *L'autre génératrice de front est la tangente non verticale menée par s' au contour apparent vertical de la sphère.*

On représentera le solide, supposé opaque, formé par l'ensemble de la sphère et du cône, ce dernier étant limité, d'une part à son sommet et, d'autre part, au plan perpendiculaire à son axe mené par la trace bb' de la droite (so, s'o') sur le plan tangent à la sphère en son point le plus bas.

(*École Polytechnique*, 1914.)

Il n'y a pas lieu d'insister sur la mise en place du cône, qui est représenté sur le plan vertical par le triangle isocèle $s'a'b'$. Le contour apparent horizontal se construira au moyen de l'une des sphères que nous aurons à inscrire dans cette surface. Quant à la base, elle se projette suivant une ellipse dont le petit axe ab est déterminé par deux lignes de rappel, le grand axe étant égal au diamètre $a'b'$ du cercle de l'espace. La jonction en γ et γ_1 avec les génératrices de contour apparent sera donnée rigoureusement par les traces de ces droites sur le plan de la base.

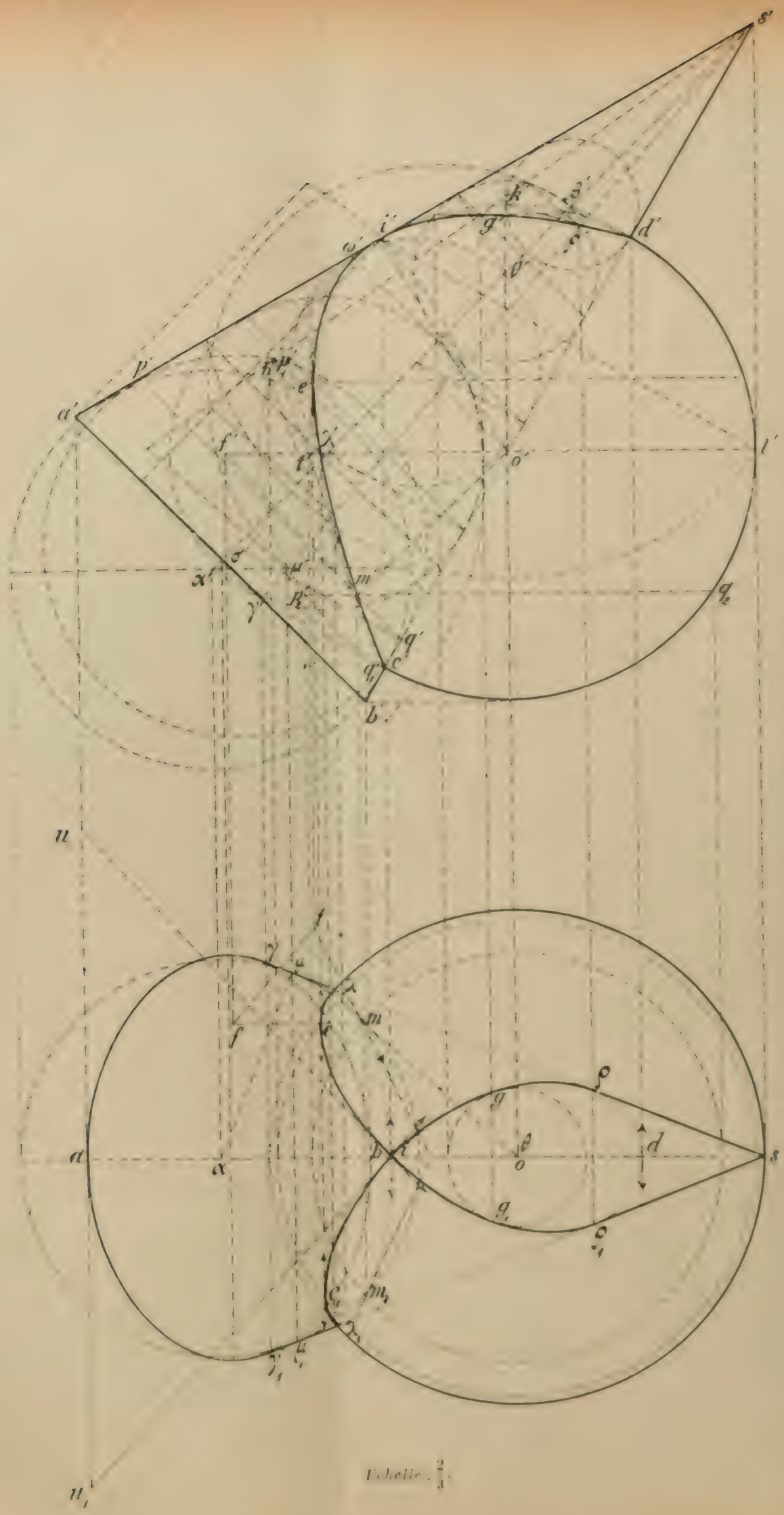
Nous allons nous occuper spécialement de la courbe d'intersection (Γ) des deux surfaces.

I. *Construction d'un point quelconque.* — On obtiendra facilement un point de la courbe en associant un cercle de la sphère avec une génératrice rectiligne du cône, ou avec un cercle situé sur cette surface. Nous n'appliquerons le premier procédé que pour trouver les points situés sur des génératrices remarquables. Pour les autres points, nous traiterons la sphère comme une surface de révolution à axe frontal et, en laissant à cet axe une direction variable, nous nous réserverons la faculté de n'employer que des sphères auxiliaires limites, inscrites dans le cône.

Chacune d'elles (σ,σ') a en commun avec ce cône un cercle double, projeté verticalement suivant un segment de droite $p'q'$. Elle coupe, d'autre part, la sphère donnée (o,o') suivant un autre cercle, également projeté suivant le segment $p'_1q'_1$. Ce dernier cercle, dans l'espace, rencontre donc la courbe (Γ) en deux couples de points confondus; il est ainsi bitangent à cette courbe, et nous utiliserons plus loin ce résultat. Les deux points M, M_1 qu'il fournit ont pour projection verticale commune le point m' où se coupent les droites $p'q'$, $p'_1q'_1$, et les projections horizontales m, m_1 s'en déduisent par un rappel sur le cercle déterminé dans la sphère par le plan horizontal $p'_2q'_2$.

II. *Tangente en un point construit* (m, m'). — D'après ce qui précède, la droite $p_1q'_1$ donnera immédiatement la tangente en m' à la projection verticale de (Γ). Le rappel horizontal pourrait se faire à l'aide d'une horizontale du plan normal; mais on s'est borné ici à rattacher la tangente au plan tangent à la sphère (o, o'). Le point t' où la projection $p'_1q'_1$ rencontre l'horizontale de o' se rappelle sur la trace ft du plan tangent sur le plan horizontal de (o, o'). Cette trace, perpendiculaire à om, passe par le point f fourni par la frontale (mf, $m'f'$) du plan tangent.

III. *Points remarquables.* — 1° Points situés sur les contours apparents verticaux de la sphère et du cone. — On prend directement les intersections des contours apparents verticaux des deux surfaces, situés dans le plan frontal de (o, o'). La génératrice $s'o'$ fournit les points c' et d' rappelés en c et d sur so. Les tangentes à (Γ) (c, c') et (d, d') sont des droites de bout dont les projections horizontales sont confondues avec les lignes de



Echelle $\frac{2}{3}$.

rappel. En projection verticale, nous avons deux tangentes $c'h'$, $d'k'$, qui sont toujours les traces des plans radicaux de la sphère (o, o') et des sphères auxiliaires correspondantes (α, α'), (β, β').

En outre, la seconde génératrice de contour apparent vertical du cône est tangente à la sphère en un point (i, i') qui est un point de contact des deux surfaces, et par suite un point double de leur intersection (Γ). Le point i' est un point de contact de la projection verticale de (Γ) et du grand cercle (o'). Pour avoir, en projection horizontale, les tangentes au point double i, nous emploierons la méthode classique du cône auxiliaire de sommet (i, i') qui admet pour directrice (Γ). On sait qu'il est aussi de révolution, et qu'il a son axe parallèle à celui du cône donné. Nous construirons facilement sa base circulaire dans le même plan de bout $a'b'$, en considérant la génératrice particulière qui passe par le point (c, c'). Par un rabattement de cette base sur le plan frontal de (o, o'), nous obtiendrons les génératrices du cône (i, i') situées dans le plan de bout $s'i'$. Leurs projections horizontales iu, iu_1 donneront les tangentes au point double i.

On remarque incidemment que les points i' et c' sont situés sur une même ligne de rappel. Car soit l' le point plus à droite du cercle (o'); d'après l'inclinaison du diamètre $o's'$, la corde $l'i'$, qui lui est perpendiculaire, est le côté d'un triangle équilatéral inscrit, dont c' est forcément le troisième sommet. Le côté $c'i'$ est alors perpendiculaire à $o'l'$. Il en résulte que la projection horizontale de (Γ) présentera en i un point triple, dont la troisième tangente sera, comme il a déjà été dit, confondue avec la ligne de rappel cc'.

2° Points situés sur le contour apparent horizontal de la sphère (o, o'). — On les obtient en prenant comme surface auxiliaire la sphère passant par le grand cercle horizontal, et dont le centre $(0, 0')$ est sur l'axe du cône. Elle coupe ce dernier suivant deux parallèles dont le plus grand seulement rencontre la sphère, et donne les points (λ, λ'), (λ_1, λ').

3° Points situés sur le contour apparent horizontal du cone. — Les deux génératrices de contour apparent, construites au moyen des points (μ, μ'), (μ_1, μ') où elles touchent la sphère inscrite (α, α'), sont situées dans un même plan de bout dont le rabattement sur le plan frontal de (o, o') permet de construire les points (ρ, ρ'), (ρ_1, ρ').

4° Points a tangentes remarquables. — On obtient immédiatement, en projection verticale, un point dont la tangente a une direction donnée à l'avance. Il suffit de remarquer que la tangente $m'i'$ est toujours perpendiculaire à $o'\sigma'$; on devra donc choisir σ' de manière que cette dernière droite soit perpendiculaire à la direction donnée.

C'est ainsi que nous avons déterminé, en particulier, le point (e, e') à tangente de profil, et le point le plus haut (g, g'), rappelé horizontalement en g et g_1. Pour ce dernier cas, le cercle bitangent se projette en vraie grandeur, ce qui est très utile pour le tracé de la boucle.

Enfin, on savait *a priori* que la projection verticale de la courbe est une parabole dont l'axe est perpendiculaire à celui du cône donné. On le détermine par l'intermédiaire du sommet ω', dont la tangente est parallèle à l'axe du cône.

Cette parabole sera un guide suffisant pour la jonction des points en projection horizontale. On aura ainsi un trifolium symétrique. On peut remarquer incidemment qu'en considérant la courbe (Γ) comme l'intersection des cônes (s, s') et (i, i'), on a une relation linéaire entre les longueurs des génératrices qui aboutissent en un même point de cette courbe, puisqu'il en est ainsi pour leurs projections sur la direction commune des axes. Donc si l'on avait projeté sur un plan perpendiculaire à cette direction, on aurait obtenu une cartésienne ayant pour foyers les pieds des deux axes. C'est un limaçon de Pascal.

M. MAZET, à Alger, a traité la question en coupant par des plans de bout passant par le sommet du cône. Cette méthode, outre la place qu'elle a exigée pour les rabattements, présente l'inconvénient de ne fournir que peu de points remarquables. En particulier, elle n'a pas révélé le contact de la projection horizontale de la courbe avec le contour apparent de la sphère. J. L.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1919)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (*suite*).

9997. Construire la courbe $y = \frac{x^2}{a} \cdot \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}$. Calculer l'aire limitée par cette courbe et les droites

$$y = 0, \qquad x = 0, \qquad x = a.$$

9998. — Discuter les tangentes menées à la courbe $x^3 - 3ay^2 = 0$ par un point quelconque.

9999. — Construire la courbe $x = \sin 2t$, $y = \sin 3t$, et calculer son aire.

10000. — Lieu des points tels que le produit de leurs distances aux sommets d'un polygone régulier soit constant.

10001. — Trouver le volume engendré par la courbe $\rho^2 = a^2 \cos 2\omega$ en tournant autour de l'axe polaire.

— **2.** — Construire la courbe $(x^2 + y^2)(y - 2x) - xy = 0$ en posant $y = tx$. On considère les trois points de la courbe dont les t sont racines de l'équation $t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = 0$. Former l'équation du cercle passant par ces trois points.

— **3.** — Longueur de l'arc de la courbe $\rho = \cos^2\omega$.

— **4.** — Déterminer une courbe telle que $\rho = \cos \alpha$, α étant l'angle de la tangente avec Ox.

— **5.** — Lieu des centres des cercles tangents à l'axe des y et à la courbe $y = Lx$.

— **6.** — Trouver l'aire limitée par la parabole $y^2 - 2px = 0$ et la droite $ux + vy + w = 0$.

— **7.** — Définition de l'hypocycloïde à trois rebroussements. Principales propriétés de la courbe.

— **8.** — Calculer le rayon de courbure à l'origine de la courbe $x^4 + y^4 - y + x = 0$.

— **9.** — On considère la courbe $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$. Trouver la longueur de l'arc situé dans l'angle xOy.

— **10.** — Rectifier la courbe $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

— **11.** — Dans quel cas peut-on rectifier la courbe $y = \frac{\alpha x^2 + bx + c}{\alpha x + \beta}$?

— **12.** — Enveloppe de la droite $(t + 1)^2 x - y - t^2 = 0$. On prend sur la courbe obtenue le point de paramètre θ. La tangente en ce point rencontre l'enveloppe en deux autres points : lieu du point de rencontre des tangentes en ces deux points.

— **13.** — Construire la courbe définie par les équations $x = a(2\cos t + \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$. On lui mène deux tangentes parallèles. Lieu du milieu des points de contact.

— **14.** — Trouver le volume engendré par une ellipse qui tourne autour d'un diamètre. Comment varie ce volume quand le diamètre tourne autour du centre?

— **15.** — On donne deux cercles C et C' ; on mène au cercle C une tangente variable T et au cercle C' une tangente T' perpendiculaire à T; lieu du point de rencontre de T et T'.

— **16.** — Trouver en coordonnées polaires l'équation de la podaire d'une ellipse par rapport à son centre. Volume engendré par cette podaire en tournant autour du grand axe de l'ellipse.

— **17.** — Construire la courbe définie par les équations

$$x = \frac{t^2}{t^2 + t - 2}, \qquad y = \frac{t^2 - 2t}{t - 1}.$$

On coupe cette courbe par une droite qui passe à l'origine : lieu du milieu des deux points de rencontre autres que l'origine.

— **18.** — Étudier la courbe $y = \cos\sqrt{x}$. Cas où x est négatif.

— **19.** — Calculer l'arc de la courbe $\omega\rho = a$, compris entre les points ρ_1 et ρ_2.

— **20.** — Construire la courbe $x^4 + y^4 = a^2x^2y^2$. Aire de la boucle.

— **21.** — Construire la courbe $x = a\frac{\sin 3t}{\sin^3 t}$, $y = a\frac{\cos 3t}{\sin^3 t}$. Trouver l'aire de la surface de révolution engendrée par cette courbe en tournant autour de Ox.

— **22.** — Construire la courbe $\rho^2 = a^2\cos 2\omega$. Évaluer l'aire engendrée par cette courbe en tournant autour de la droite $\omega = \alpha$.

— **23.** — On donne la courbe $y^2 = 3ax^2 - x^3$; la tangente en un point A rencontre la courbe en un autre point B. Démontrer que $\operatorname{tg} BOx + 2\operatorname{tg} AOx = 0$.

— **24.** — Construire la courbe $y^2 = x^3$. Trouver le lieu des milieux des cordes parallèles à la droite $\frac{x}{p} = \frac{y}{q}$.

— **25.** — Calculer la longueur de la cardioïde $\rho = a(1 + \cos\omega)$.

— **26.** — Longueur totale de l'enveloppe d'une droite de longueur constante qui s'appuie sur deux droites rectangulaires.

— **27.** — Caustique du dioptre plan.

— **28.** — Enveloppe d'une droite formant avec deux droites fixes un triangle de périmètre constant.

— **29.** — Trouver le rayon de courbure de l'enveloppe de la droite $x\cos t + y\sin t = f(t)$.

— **30.** — Trouver les courbes telles que $\frac{ds}{d\theta} = \frac{2a(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)^3}$, θ étant l'angle de la tangente avec une direction fixe.

— **31.** — On donne deux cercles qui se coupent aux points A et B. Par le point B on mène une sécante qui rencontre les cercles en M et M'. Lieu du centre du cercle circonscrit au triangle AMM'.

— **32.** — Étudier la courbe $y = ae^{\frac{s}{a}}$, s étant l'arc.

— **33.** — Construire la courbe $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Calculer sa longueur.

— **34.** — Construire la courbe $x^3 = a^2(x+y)$. La tangente au point A rencontre la courbe au point B. Lieu du milieu de AB.

— **35.** — Construire la courbe $y = 1 - \cos^3 x$. Calculer l'aire comprise entre la courbe, l'axe des x et les droites $x = 0$, $x = 2\pi$. Volume engendré par cette aire en tournant autour de Ox.

— **36.** — Construire la courbe $y^2(a-x) = x^3$. Combien peut-on lui mener de tangentes par un point? Discuter.

— **37.** — Enveloppe des droites coupant une cycloïde sous l'angle de 45°, ou sous un angle quelconque α.

— **38.** — Construire la courbe $(2a-x)y^2 = x^3$. Trouver l'aire de cette courbe comprise entre les ordonnées $x = 0$ et $x = 2a$.

— **39.** — Construire la courbe $x = a\sin t$, $y = \frac{a\cos^2 t}{2-\cos t}$; déterminer les points d'inflexion. Cafque

— **40.** — Calculer l'aire engendrée par un arceau de cycloïde tournant autour d'une tangente de rebroussement.

— **41.** — Trouver le lieu des milieux des cordes parallèles à Ox pour la cubique $y^2 = x(x^2 - y^2)$.

— **42.** — On donne deux droites parallèles Δ, Δ' et un cercle tangent à Δ' au point I. D'un point quelconque A de Δ on mène des tangentes au cercle, lesquelles rencontrent Δ' aux points B et C. Trouver la relation qui existe entre $\overline{IB}$ et $\overline{IC}$.

— **43.** — Construire la courbe $x = \frac{t^2}{t^4+1}$, $y = \frac{t^3}{t^4+1}$. Point double; aire de la boucle.

— **44.** — Développée de $y = a\sin\frac{x}{a}$.

— **45.** — Lieu des points de rebroussement des cubiques qui ont pour asymptotes trois droites données.

— **46.** — Démontrer que la transformation $X = e^x\cos y$, $Y = e^x\sin y$ conserve les angles.

— **47.** — On considère un cercle de centre O et un point A, situé dans son plan. D'un point M, variable sur le cercle, on abaisse MB perpendiculaire sur OA. Déterminer le point M de manière qne la bissectrice de l'angle BMA passe par le point O. En supposant que A se déplace sur un diamètre, trouver l'enveloppe de MA telle que MO soit bissectrice de l'angle BMA.

— **48.** — On mène à la cardioïde $\rho = a(1+\cos\omega)$ deux tangentes parallèles. Lieu du milieu des points de contact. orig. en $x = \frac{2a}{3}$ $\rho = \frac{a}{2}(1-\cos\omega)$

— **49.** — La tangente en un point M de la cardioïde $\rho = a(1+\cos\omega)$ rencontre la courbe en deux autres points A et B. Lieu du point de rencontre des tangentes en A et B. Conique

— **50.** — Que représentent les équations $x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$, $y = \frac{2t+1}{1-t^2}$? Trouver la relation qui existe entre les t de deux points diamétralement opposés.

— **51.** — Lieu des centres des cercles tangents à une parabole et passant par son sommet.

— **52.** — Trouver la normale à la parabole qui intercepte le plus petit arc.

— **53.** — Lieu des points d'où l'on peut mener à une parabole une tangente et une normale rectangulaires.

— **54.** — On donne une parabole et un point. Déterminer deux droites conjuguées rectangulaires par rapport à la parabole et passant par le point. Solutions analytique et géométrique.

— **55.** — On donne trois points en ligne droite A, B, C et on considère les paraboles qui passent par les points A, B et dont la tangente au sommet passe par le point C. Trouver le lieu des points de contact des tangentes issues de C.

— **56.** — Lieu des points d'où l'on peut mener deux normales rectangulaires à une hyperbole. Construire la courbe en coordonnées polaires.

— **57.** — Deux paraboles ont leurs axes parallèles et se coupent à angle droit, en leurs deux points d'intersection. La distance des axes étant constante et égale à a, trouver le minimum de l'aire comprise entre les deux courbes.

— **58.** — On considère la parabole $y^2 - 2px = 0$. On joint le point O à un point M de la courbe, et on prend la droite D symétrique de OM par rapport à la tangente au point M. Trouver l'enveloppe de la droite D.

— **59.** — On donne une droite D et un point F, et on demande l'équation générale des hyperboles admettant D comme asymptote et F comme foyer. Lieu des sommets.

— **60.** — On donne deux paraboles de même sommet, ayant leurs axes perpendiculaires. La tangente en un point A de l'une rencontre l'autre en B et C; trouver le lieu du point M, conjugué harmonique de A par rapport à B et C.

— **61.** — Trouver la directrice de la conique $x^2 - 2xy + y^2 - 2x = 0$. Équation générale des tangentes en fonction rationnelle d'un paramètre.

— **62.** — Une droite variable rencontre une parabole en deux points A et B, la tangente au sommet en C et l'axe en D. Trouver l'enveloppe de la droite quand C et D sont conjugués harmoniques par rapport à A et B.

— **63.** — Des rayons lumineux perpendiculaires à l'axe d'une parabole se réfléchissent sur la courbe. Trouver l'enveloppe des rayons réfléchis.

— **64.** — Deux tangentes perpendiculaires à une ellipse interceptent des cordes égales sur une hyperbole équilatère homofocale.

— **65.** — Enveloppe des asymptotes de la courbe $x^2 + 2xy - y^2 + 2x = 0$.

— **66.** — Équation générale des paraboles tangentes à une droite fixe D en un point fixe A, et dont le foyer est sur une droite donnée D′ passant au point A. Lieu des sommets.

— **67.** — La normale en un point M d'une parabole rencontre la courbe en un deuxième point, N. Trouver l'enveloppe de la perpendiculaire à la corde MN en son milieu.

— **68.** — Lieu des sommets des hyperboles équilatères ayant un foyer donné et passant par un point donné.

— **69.** — On projette un point M d'une ellipse en P et Q sur les axes. Trouver l'enveloppe de la droite PQ. Montrer que cette enveloppe est une développée d'ellipse.

— **70.** — En un point d'une ellipse on mène une droite faisant 45° avec la tangente en ce point. Trouver l'enveloppe de cette droite.

— **71.** — Sur la parabole $y^2 - 2px = 0$ on considère trois points variables dont les ordonnées sont racines de l'équation $y^3 + xy^2 - p^2y + xp^2 = 0$. Enveloppe des côtés du triangle défini par ces points.

— **72.** — Lieu des points tels que les quatre normales issues de ce point à une hyperbole équilatère forment un faisceau harmonique.

— **73.** — On donne une parabole $y^2 - 2px = 0$, et on considère un cercle ayant son centre au point de rebroussement de la développée. Déterminer le rayon du cercle pour qu'il existe un triangle inscrit dans la parabole et circonscrit au cercle.

— **74.** — Trouver le centre de la conique $x = \frac{1 - t + t^2}{1 + t + t^2}$, $y = \frac{1 + t - t^2}{1 + t + t^2}$.

— **75.** — Trouver la directrice de la parabole $x = 1 + t + t^2$, $y = -1 + 2t - 2t^2$.

— **76.** — Lieu du symétrique du centre de courbure en un point M d'une ellipse par rapport au point M.

— **77.** — On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy et on considère une ellipse variable passant par l'origine et dont les foyers sont respectivement sur Ox et Oy. En outre, la longueur du petit axe est constante; trouver le lieu du centre. $xy = \pm b^2$

— **78.** — On donne une parabole et un point. Par ce point on mène une sécante variable rencontrant la courbe aux points A et B. Trouver l'enveloppe du cercle ayant AB comme diamètre.

— **79.** — Lieu des pieds des normales abaissées d'un point sur des coniques homofocales.

— **80.** — Trouver la directrice de la parabole $x^2 - 2xy + y^2 - 2x = 0$.

— **81.** — Enveloppe des cordes d'une parabole vues d'un point fixe sous un angle droit.

— **82.** — Trouver le rayon de courbure en un point M de l'hyperbole équilatère $xy = k^2$. Comparer ce rayon à la longueur de la corde déterminée par la normale en M.

— **83.** — On considère une parabole $y^2 - 2px = 0$ et un cercle ayant son centre fixe sur l'axe et un rayon variable. Lieu des points de rencontre des tangentes communes.

— **84.** — On considère les hyperboles ayant une asymptote donnée et tangentes en un point donné à une droite donnée. Enveloppe des axes.

— **85.** — Polaire du point $\rho = 5$, $\omega = \frac{\pi}{4}$ par rapport à la conique $\rho = \frac{3}{1 - 2\cos\omega}$.

— **86.** — On donne une ellipse, et on demande le lieu des sommets des paraboles dont l'axe est parallèle à l'un des axes de l'ellipse et qui rencontrent l'ellipse orthogonalement en deux points.

— **87.** — On donne une parabole et un cercle tangent à la parabole au sommet. Lieu des cercles orthogonaux au cercle fixe et tangents à la parabole.

— **88.** — Lieu des foyers des paraboles tangentes aux côtés d'un triangle rectangle.

— **89.** — On donne une ellipse et un diamètre AB. On joint A et B à un point P intérieur à l'ellipse; les droites AP et BP rencontrent l'ellipse aux points A′ et B′. Soit Q le pôle de A′B′. Démontrer que PQ est parallèle au diamètre conjugué de AB.

— **90.** — Soit C le centre de courbure en un point M d'une parabole. Trouver le lieu du symétrique du point C par rapport au point M.

— **91.** — Le cercle osculateur en un point M d'une parabole rencontre la courbe au point N. Lieu du milieu de MN.

— **92.** — Sur la normale en un point M d'une ellipse on porte, à partir de M, une longueur MP égale au demi-diamètre conjugué de OM. Lieu du point P.

— **93.** — Déterminer les normales communes aux paraboles $y^2 - 2px = 0$, $x^2 - 2py = 0$.

— **94.** — On considère les coniques ayant un foyer fixe et tangentes à deux droites rectangulaires. Lieu du centre et enveloppe de l'axe non focal.

— **95.** — Conditions nécessaires et suffisantes pour que deux paraboles soient homothétiques.

— **96.** — On considère les coniques homofocales $\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1$. Lieu des points de contact des tangentes parallèles à la droite $y=mx$.

— **97.** — On donne un cercle et un point A sur ce cercle. Lieu des centres des hyperboles équilatères passant par le point A et qui admettent en ce point le cercle donné comme cercle de courbure.

— **98.** — Lieu des centres des hyperboles équilatères de grandeur donnée qui passent par deux points fixes.

— **99.** — On considère une ellipse et un point A fixe sur cette ellipse; deux diamètres conjugués variables sont vus du point A sous les angles V et V'. Relations entre V et V'.

— **100.** — Trouver l'enveloppe des droites qui coupent deux cercles suivant des couples harmoniques.

— **101.** — Lieu des sommets des paraboles conjuguées par rapport à un triangle rectangle.

— **102.** — Le cercle osculateur en un point A de l'hyperbole $xy=a^2$ rencontre la courbe au deuxième point B. Déterminer le point A de façon que la droite AB passe par un point donné P. Discussion.

— **103.** — Par un point A d'une parabole on mène les normales AB, AC, autres que la normale en A. Trouver l'enveloppe de la droite BC et le lieu des projections du sommet sur cette droite.

— **104.** — Trouver l'enveloppe des axes des paraboles qui passent par un point et qui ont en ce point un cercle de courbure donné.

— **105.** — Déterminer la podaire de la parabole par rapport à son sommet. Rectifier la courbe obtenue.

(A suivre.)

SUJETS DE CONCOURS

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Concours de 1917.

Mathématiques, 1re composition.

2336. — Étant donné le trièdre trirectangle $Oxyz$ auquel la droite D est rapportée par les équations $x-a=0$, $z-y=0$, on abaisse de chaque point M de cette droite, sur Oz, la perpendiculaire MI dont le pied est I; puis on considère le cercle C, de centre I et de rayon IM, dont le plan passe par Oz.

1° Trouver l'équation de la surface Σ engendrée par le cercle C.

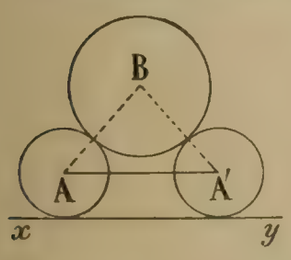
2° Étudier comment varie la section de cette surface par un plan parallèle à Oxy lorsque ce plan se déplace en conservant la même orientation.

3° Déterminer, sur la surface Σ, les systèmes de cercles autres que celui qui a servi à sa définition et faire voir comment on peut, pour chacun de ces systèmes, donner une construction géométrique des cercles qui le composent.

(Durée : 4 h.)

Mathématiques, 2e composition.

2337. — Dans un plan vertical, deux disques circulaires de centres A et A', de même rayon a, reposent sur une horizontale xy. Ils supportent un troisième disque circulaire B, de rayon b, Les disques sont homogènes; leurs poids, en kilogrammes, sont p pour les deux premiers, q pour le troisième.



1° Un fil inextensible de longueur l relie les deux disques inférieurs par leurs centres A et A' où il est attaché. L'équilibre étant établi, on demande de calculer les réactions des disques entre eux et avec xy, ainsi que la tension T du fil. On supposera ici les frottements négligeables.

2° Dans la même hypothèse, on remplace le fil inextensible par un ressort : l_0 est sa longueur naturelle et chaque unité de cette longueur reçoit un allongement k par kilogramme de tension. Étudier les conditions de l'équilibre.

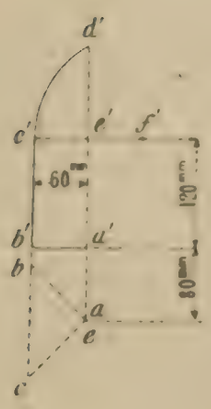
Le ressort, pour avoir une action efficace, ne devant être ni trop long ni trop mou, on supposera dans la discussion $l_0 < a + b$ et l'on admettra que, pour une tension égale à $\frac{q}{2}$, l'allongement a une valeur $l - l_0 < \sqrt{a^2 + b^2 - l_0^2}$.

3° Le coefficient de frottement f, supposé le même aux quatre contacts, cessant d'être négligé, examiner les conditions de l'équilibre sous l'effet du seul frottement, le fil AA' et le ressort étant supprimés.

L'angle $\widehat{ABA'} = 2\beta$ étant donné, quelle est la limite inférieure des valeurs que peut prendre f pour que l'équilibre existe ?

(Durée : 4 h.)

Epure.



2338. — Un solide opaque, en forme d'obus, est engendré par la révolution, autour de la verticale a, de la surface $abcd'e'a'$ située dans le plan de front de cette verticale ; $c'd'$ est un arc de cercle ayant pour centre le point f symétrique du point c' par rapport à l'axe.

Un paraboloïde hyperbolique est défini par un plan directeur qui est de profil et par deux génératrices horizontales (ab, $a'b'$), (ec, $e'c'$) inclinées à 45° sur ce plan de profil.

La surface du paraboloïde partage l'obus en deux parties.

On représentera celle qui contient l'arc $c'd'$.

On se conformera, pour la mise en place, aux données du croquis. Le point a sera pris sur l'axe de la feuille, à 80^{mm} au-dessus du bord inférieur de celle-ci.

(Durée : 4 h.)

Calcul.

Dans la formule

$$f\lambda, \theta = \frac{A\lambda^{-5}}{e^{\frac{B}{\theta}} - 1} \qquad \begin{cases} e = 2,718, \\ A = 1,09 \times 10^{-5}, \\ B = 1,46 \times 10^{-2}, \end{cases}$$

les variables λ et θ prennent respectivement les valeurs suivantes :

$\lambda = 0,$	$1,$	$2,$	$3,$	$4,$	5 ;
$\theta = 0,$	$1000,$	$2000,$	$3000.$		

Calculer les valeurs de $f\lambda, \theta$ pour les $6 \times 4 = 24$ combinaisons des valeurs des variables, à l'approximation de la règle à calcul.

N. B. — La formule est celle de l'émission calorifique des radiations de longueur d'onde λ dans le spectre d'un corps noir porté à la température θ.

(Durée : 1 h.)

Physique.

I. — De la clarté dans les instruments d'optique.

Application à la lunette astronomique et au microscope composé.

II. — **2339.** Un pendule est formé d'une tige mince, homogène, OI, de masse μ et de longueur l, supportant une sphère creuse homogène, mince, de masse m et de rayon $CI = r$.

La sphère est vide d'air et le pendule oscille dans le vide autour d'un axe de suspension horizontal SAS' passant par le point A de la tige OI.

1° Déterminer la distance $OA = x$ de façon que le pendule simple synchrone ait pour longueur AC. A quelle condition le point A ainsi trouvé coïncide-t-il avec le point O ?

2° Application numérique : Cette dernière condition étant supposée remplie, calculer la période d'oscillation T (durée d'une oscillation complète), en admettant :

$m = 27\mu$, $r = 3^{cm}$, accélération de la pesanteur : $g = 981$ C. G. S.

3° La tige et la sphère du pendule étant formées d'un même métal ayant pour coefficient de dilatation linéaire α, on élève la température de θ à $\theta + \Delta\theta$. Calculer la nouvelle valeur $T + \Delta T$ de la période.

Application numérique : $\alpha = 2 \times 10^{-5}$, $\Delta\theta = 20°$.

4° Par la méthode des coïncidences, on compare deux pendules ayant pour périodes T et $T + \Delta T$. Calculer l'intervalle de temps τ qui sépare deux coïncidences successives.

Application numérique aux deux périodes envisagées ci-dessus (2° et 3°).

(*Durée : 3 h.*)

Chimie.

I. — Anhydride sulfureux : préparation, propriétés, usages.

II. — **2340**. Étant donné un tube rempli de coke et chauffé à la température du rouge, on y dirige un courant d'air chargé de vapeur d'eau; on suppose l'air réduit à un simple mélange d'azote et d'oxygène. Indiquer :

1° la nature des gaz résultant de la réaction du mélange gazeux sur le coke,

2° des réactions permettant de caractériser chacun des gaz contenus dans le mélange,

3° la composition quantitative en volumes du mélange gazeux, en la déduisant des constatations que permettra de faire l'emploi d'un appareil constitué par un tube A en verre, rempli d'oxyde de cuivre et relié à un tube B en forme d'U contenant de la pierre ponce imbibée d'acide sulfurique, puis à un tube C de même forme contenant de la potasse humide.

On tare séparément les tubes A, B, C. Le tube A étant chauffé au rouge sombre, on dirige dans l'appareil 20 litres du mélange sec provenant de l'action de l'air humide sur le coke. On laisse refroidir le tube et l'on constate que le tube A a subi une diminution de poids de $7^g,142$ et que les tubes B et C ont augmenté respectivement de $4^g,018$ et $13^g,946$.

Poids atomiques : $H = 1$, $O = 16$, $Az = 14$, $C = 12$.

On prendra pour volume moléculaire celui de l'oxygène calculé avec la densité de ce gaz égale à 1,105.

(*Durée : 3 h.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

★On donne un système d'axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz, l'axe Oz étant dirigé suivant la verticale ascendante, et on considère la surface représentée dans ce système d'axes par l'équation

$$\frac{z}{h} = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x},$$

où h désigne une constante.

1° Trouver la projection sur le plan xOy du lieu des points de cette surface où le plan tangent est parallèle à la droite d'équations $x = az$, $y = bz$.

2° Sur cette surface se déplace sans frottement un point matériel A, de masse m, soumis d'une part à l'action de la pesanteur, d'autre part à celle d'une force F, parallèle au plan xOy et variable avec la position du point A. Comment doit être choisie cette force F pour que le point soit en équilibre sur la surface dans une position quelconque ? Quel est le moment de F par rapport à Oz ?

3° Calculer le travail de la force F lorsque le point A passe d'une position A_0 à une position A_1 en restant sur la surface.

(*Certificat de Mathématiques générales, Nancy, juillet 1912.*)

★Soit un polynome Z de degré $2n - 1$, homogène, de deux variables x et y. Montrer que ce polynome peut se mettre sous la forme de n puissances $(2n-1)^{\text{mes}}$ de quantités X, X étant un binome du premier degré en x et y.

Rechercher ces quantités X par la résolution d'une équation différentielle aux dérivées partielles d'ordre n de Z par rapport à x et y.

Application à la résolution de l'équation du troisième degré. A.

★Soient deux coniques S et S′ tangentes à deux droites T et T′. Il existe deux séries de coniques Σ tangentes à T et T′ ainsi qu'à S et S′.

Démontrer les points suivants :

1° Dans chaque série les coniques Σ sont conjuguées à une série de droites D et D′ qui enveloppent une conique E.

Il existe également d'autres coniques F tangentes à T et T′ et conjuguées aux droites D et D′.

2° Soit F_1 une de ces coniques. Les quatre tangentes communes à F_1 et à S et S′ autres que les droites T, T′ touchent ces coniques en quatre points qui sont les points de contact de S et S′ avec deux coniques Σ_3, Σ_4 de la série Σ.

Réciproquement, à deux coniques Σ_3, Σ_4 correspond une conique F_1 tangente aux quatre tangentes à S et S′ aux points de contact de Σ_3 et Σ_4.

3° Les deux coniques Σ_3, Σ_4 variant de manière à ce que les tangentes communes autres que T et T′ enveloppent une conique de la série F, montrer que les coniques F_1 correspondant à Σ_3 et Σ_4 comme il est défini au paragraphe précédent forment un faisceau tangentiel.

4° Σ_3 et Σ_4 variant dans les mêmes conditions, la droite conjuguée commune d'une droite fixe par rapport à ces deux coniques tourne autour d'un point fixe.

A.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

(**Cours préparatoires.**)

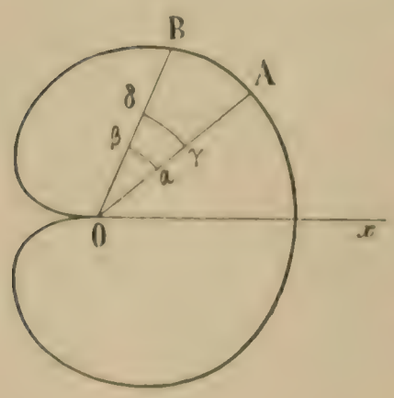
Concours de 1913.

2194. — *Soit la courbe dont l'équation en coordonnées polaires est*

$$\rho = 2a(1 + \cos\omega),$$

a étant un paramètre; on demande de calculer le moment d'inertie de l'aire de cette courbe par rapport au pôle.

La courbe considérée est une cardioïde dont la forme est bien connue. Nous chercherons d'abord le moment d'inertie du secteur limité par la courbe et deux rayons vecteurs OA, OB, relatifs aux angles polaires ω, $\omega + d\omega$, et pour cela, nous décomposerons ce secteur en éléments $\alpha\beta\gamma\delta$ limités par deux arcs de cercle $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ de rayons r, $r + dr$.



La surface de l'élément $\alpha\beta\gamma\delta$ est la différence des aires de deux secteurs circulaires $\frac{1}{2}(r + dr)^2 d\omega - \frac{1}{2}r^2 d\omega$, ou $r dr d\omega$, en négligeant les infiniment petits du troisième ordre; et le moment d'inertie de cet élément est $r^3 dr d\omega$.

Par suite, celui du secteur OAB est $d\omega \int_0^\rho r^3 dr$, ou $\frac{\rho^4}{4} d\omega$, ou comme

$$\rho = 2a(1 + \cos\omega), \qquad 4a^4(1 + \cos\omega)^4 d\omega.$$

Comme la cardioïde est symétrique par rapport à l'axe polaire, et que pour avoir la moitié de la courbe, il suffit de faire varier ω de 0 à π, le moment d'inertie demandé sera

$$2\int_0^\pi 4a^4(1 + \cos\omega)^4 d\omega, \qquad \text{ou} \qquad 8a^4 \int_0^\pi (1 + \cos\omega)^4 d\omega.$$

Nous avons

$$(1 + \cos\omega)^4 = 1 + 4\cos\omega + 6\cos^2\omega + 4\cos^3\omega + \cos^4\omega$$

et

$$\int (1 + \cos\omega)^4 d\omega = \omega + 4\sin\omega + 6\int \cos^2\omega\, d\omega + 4\int \cos^3\omega\, d\omega + \int \cos^4\omega\, d\omega.$$

Or
$$\int \cos^2\omega\, d\omega = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2\omega)\, d\omega = \frac{1}{2}\left(\omega + \frac{\sin 2\omega}{2}\right),$$
$$\int \cos^3\omega\, d\omega = \int (1-\sin^2\omega)\, d\sin\omega = \sin\omega - \frac{\sin^3\omega}{3};$$
enfin
$$\cos^4\omega = \frac{(1+\cos 2\omega)^2}{4} = \frac{1+2\cos 2\omega + \cos^2 2\omega}{4} = \frac{1+2\cos 2\omega + \frac{1+\cos 4\omega}{2}}{4},$$
$$\cos^4\omega = \frac{3+4\cos 2\omega + \cos 4\omega}{8},$$
et
$$\int \cos^4\omega\, d\omega = \frac{1}{8}\left(3\omega + 2\sin 2\omega + \frac{\sin 4\omega}{4}\right).$$

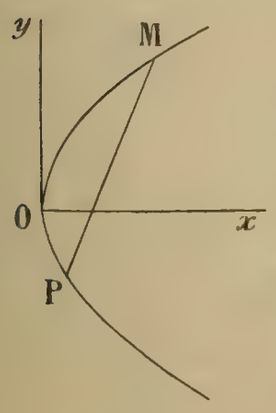
On a donc
$$\int (1+\cos\omega)^4 d\omega = \omega + 4\sin\omega + 3\left(\omega + \frac{\sin 2\omega}{2}\right) + 4\sin\omega - \frac{4\sin^3\omega}{3} + \frac{1}{8}\left(3\omega + 2\sin 2\omega + \frac{\sin 4\omega}{4}\right)$$
$$= \frac{35\omega}{8} + f(\omega),$$
$f(\omega)$ étant une fonction qui s'annule pour $\omega = 0$ et $\omega = \pi$.

On a donc
$$\int_0^\pi (1+\cos\omega)^4 d\omega = \frac{35\pi}{8},$$
et par suite le moment d'inertie demandé est
$$8a^4 \int_0^\pi (1+\cos\omega)^4 d\omega, \qquad \text{ou} \qquad 35\pi a^4.$$

TOPIN, à Grandvilliers.

Bonnes solutions par MM. Beaufrère, conducteur des ponts et chaussées, à Mondoubleau; J. Chaize et H. Gouet, école normale de l'enseignement technique; Emile Dion, école normale supérieure de Saint-Cloud; R. Dufour, école normale de Nancy; G. Lach, à Douai; A. Le Marchand, à Paris; E. Rouge, à Sainte-Barbe; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes; M. Roux, au Creusot.

2195. — *Par un point* M(α, β) *pris sur la parabole*
$$y^2 = 2px$$



rapportée à son axe et à sa tangente au sommet, on mène une corde MP *de coefficient angulaire m.*

1° *Former l'équation de l'hyperbole* H *circonscrite au triangle* OMP *et admettant les axes de coordonnées comme directions asymptotiques;*

2° *Montrer qu'il passe en* M *une seconde corde* MP′ *telle que l'hyperbole* H′ *correspondante (hyperbole obtenue avec* MP′ *comme* H *l'a été avec* MP) *soit égale à l'hyperbole* H;

3° *La corde* MP *étant donnée, déterminer les centres* C *et* C′ *des deux hyperboles* H *et* H′ *par une construction géométrique très simple.*

1. Comme l'hyperbole H passe par les points de rencontre de la parabole et des droites MP et Ox, son équation est de la forme
$$\lambda(y^2 - 2px) + y[y - \beta - m(x-\alpha)] = 0,$$

et on détermine λ en écrivant que cette courbe admet Oy comme direction asymptotique, ce qui donne $\lambda = -1$.

Par suite, l'équation de H est

$$xy - \frac{2p}{m}x - \left(\alpha - \frac{\beta}{m}\right)y = 0.$$

On peut aussi l'écrire

$$\left[x - \left(\alpha - \frac{\beta}{m}\right)\right]\left(y - \frac{2p}{m}\right) - \frac{2p}{m}\left(\alpha - \frac{\beta}{m}\right) = 0,$$

ce qui montre que le centre a pour coordonnées

$$(1) \qquad x = \alpha - \frac{\beta}{m}, \qquad y = \frac{2p}{m},$$

et, en transportant l'origine des coordonnées en ce point, l'équation de la courbe devient

$$(2) \qquad xy - \frac{2p}{m}\left(\alpha - \frac{\beta}{m}\right) = 0.$$

2. De même, l'hyperbole H′ relative à la corde MP′ de pente m' a pour équation

$$xy - \frac{2p}{m'}x - \left(\alpha - \frac{\beta}{m'}\right)y = 0,$$

ou en transportant l'origine au centre

$$(3) \qquad xy - \frac{2p}{m'}\left(\alpha - \frac{\beta}{m'}\right) = 0.$$

En comparant les équations (2) et (3) on voit que pour que les deux hyperboles H et H′ soient égales, il faut qu'on ait

$$(4) \qquad \frac{2p}{m}\left(\alpha - \frac{\beta}{m}\right) = \pm\frac{2p}{m'}\left(\alpha - \frac{\beta}{m'}\right).$$

Prenons d'abord le signe $+$. Cette égalité s'écrit

$$m'^2(\alpha m - \beta) - m^2(\alpha m' - \beta) = 0$$

ou

$$(m' - m)[\alpha mm' - \beta(m + m')] = 0,$$

ou, comme $m' - m$ n'est pas nul,

$$(5) \qquad \alpha mm' - \beta(m + m') = 0,$$

et cette équation définit une seule valeur de m', c'est-à-dire une seule hyperbole H′.

3. Soit à construire maintenant les centres C et C′ des courbes H et H′.

Si nous éliminons m entre les équations (1) nous obtenons l'équation

$$2px + \beta y - 2p\alpha = 0,$$

qui représente la droite joignant les projections A, B du point M sur les axes Ox, Oy. Cette droite est le lieu des centres des hyperboles H quand m varie; les points C et C′ sont donc sur cette droite.

De plus soient x, y les coordonnées du point C, x', y' celles du point C′, nous avons

$$x = \alpha - \frac{\beta}{m}, \qquad y = \frac{2p}{m},$$

$$x' = \alpha - \frac{\beta}{m'}, \qquad y' = \frac{2p}{m'},$$

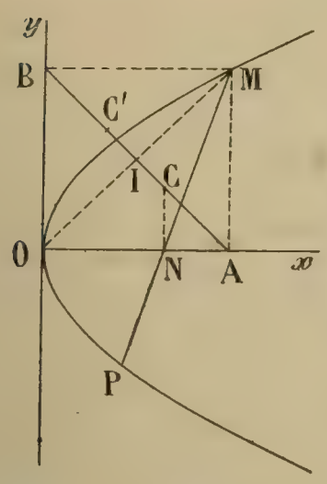
d'où

$$x + x' = 2\alpha - \beta\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right), \qquad y + y' = 2p\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right);$$

et comme de la relation (5) nous tirons $\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}=\frac{\alpha}{\beta}$, nous avons

$$x+x'=\alpha, \qquad y+y'=\beta;$$

et ceci montre que le milieu de CC′ coïncide avec le milieu I de OM.



D'autre part, remarquons que l'abscisse $\alpha-\frac{\beta}{m}$ du point C est égale à celle du point N où MP rencontre Ox; on en conclut la construction suivante des points C et C′ :

Le point C est le point de rencontre de AB et de la perpendiculaire à Ox menée par N, et le point C′ est le symétrique de C par rapport au point I, milieu de OM.

On déduit de là la construction de MP′, il suffit de joindre le point M au point N′, projection de C′ sur Ox.

Remarque. — Si dans le second membre de la formule (4) nous prenons le signe —, nous obtenons une équation de deuxième degré en m'

$$m'^2(\alpha m-\beta)+\alpha m^2 m'-\beta m^2=0,$$

qui admet deux racines réelles quand m est extérieur aux racines du trinome $\alpha^2 m^2+4\alpha\beta m-4\beta^2$.

Il existe donc encore deux autres hyperboles H′, égales à H ; leurs centres sont sur la droite AB, mais ne se construisent plus aussi aisément.

H. GOUET, école normale de l'enseignement technique, à Paris.

Bonnes solutions par MM. E. N. Barisien; Betbezé-Culi, lycée de Toulouse; J. Chaize, école normale de l'enseignement technique; G. Lach, à Douai; A. Le Marchand, à Paris; Marescalchi; Maurice Roi; E. Rouge, à Sainte-Barbe; A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes; M. Roux, au Creusot; L. Simon, à Fourmies; Topin, à Grandvilliers; R. Vaillant, à Vincennes.

2196. — *Combien l'équation*

$$\log x+\frac{2}{3+18x}+0{,}63436=0$$

a-t-elle de racines positives, le logarithme étant un logarithme vulgaire (base 10)?

Calculer avec trois décimales la racine ou les racines positives de cette équation. On pourra se contenter d'appliquer, dans ce but, la méthode de substitution.

La fonction

$$f(x)=\log x+\frac{2}{3+18x}+0{,}63436$$

est continue pour toutes les valeurs positives de x.

La dérivée est

$$f'(x)=\frac{M}{x}-\frac{2.18}{(3+18x)^2}=\frac{M(1+6x)^2-4x}{x(3+18x)^2}. \qquad \left(M=\frac{1}{L10}=\log e\right)=0{,}434\ldots$$

Le trinome $M(1+6x)^2-4x$ ou $36Mx^2+4x(3M-1)+M$ a visiblement ses racines imaginaires, car le discriminant $4(3M-1)^2-36M^2$ ou $4(-6M+1)$ est négatif. Donc la dérivée $f'(x)$ est positive, et la fonction $f(x)$ croissante.

D'autre part, comme $f(0)$ est négatif et $f(+\infty)$ positif, on en conclut que la fonction admet une seule racine positive.

Pour la calculer avec trois décimales, nous appliquerons la méthode de substitution, au moyen de la règle à calcul.

On a

$$f(0,1) = -1 + \frac{2}{4,8} + 0,63436 > 0,$$

ce qui montre que la racine est inférieure à 0,1.

Substituons 0,09 et 0,08

x	$\log x$	$\frac{2}{3+18x}$	$f(x)$
0,09	2,954	0,433	+ 0,02136
0,08	2,903	0,450	— 0,01264

La racine est comprise entre 0,08 et 0,09. Substituons maintenant 0,081, 0,082,

x	$\log x$	$\frac{2}{3+18x}$	$f(x)$
0,081	2,908	0,449	— 0,00864
0,082	2,913	0,447	— 0,00564
0,083	2,919	0,445	— 0,00164
0,084	2,924	0,443	+ 0,00136

La racine est comprise entre 0,083 et 0,084. La valeur à $\frac{1}{1000}$ près par défaut est 0,083.

Émile DION, école normale supérieure de Saint-Cloud.

Bonnes solutions par MM. H. Gouet, école normale de l'enseignement technique, à Paris; G. Lach, à Douai; A. Rousseau, à Fourmies-en-Weppes; M. Roux, au Creusot; Topin, à Grandvilliers.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1919)

ÉCOLE CENTRALE (*suite*.)

9805. — Racines cubiques de $1-i$, $1+i$, $i-1$, $i-\sqrt{3}$, $3+i\sqrt{3}$.

9806. — Racines quatrièmes de i.

9807. — Résoudre l'équation $x^6+1=0$; peut-elle admettre une racine double?

9808. — Résoudre l'équation $x^8+1=0$, somme des cubes des racines, décomposer le premier membre en facteurs réels du second degré.

9809. — Résoudre les équations

$x^{12}+1=0$, $x^8+x^4+1=0$, $x^{10}+x^5+1=0$, $x^{12}+x^6+1=0$, $x^{12}+2x^6+5=0$.

9810. — Démontrer que $e^{ia}\times e^{-ia}=1$.

9811. — Résoudre les équations $e^x=1-i$, $e^x=3-i\sqrt{3}$, $\frac{e^x-e^{-x}}{2i}=3$.

9812. — Résoudre l'équation $x^5-5x^3+6x^2-5x-1=0$.

9813. — Relations entre les coefficients et les racines de l'équation $x^3+px+q=0$. Former l'équation aux carrés des racines. Condition pour que l'équation admette une racine double. Somme des cubes des racines.

9814. — Condition pour que l'équation $x^3+px^2-q^2=0$ ait une racine double.

9815. — Conditions pour que l'équation $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ ait une racine triple.

9816. — Nombre de racines réelles de l'équation $x^5 + 5ax + b = 0$. Condition pour que cette équation admette une racine double.

9817. — Nombre des racines réelles de l'équation $e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) = 0$.

9818. — Décomposer en éléments simples réels les fractions suivantes :

$$\frac{1}{x^3 + 2x - 3}, \qquad \frac{1}{(x^2 - x)^2}, \qquad \frac{1}{x^4 + 1}.$$

9819. — Calculer tg 75°.

9820. — Résoudre l'équation $\cos 3x = m \cos^3 x$.

9821. — Résoudre un triangle connaissant un angle A, le côté opposé a, et la longueur l de la médiane issue de l'angle A.

Géométrie analytique (M. Tresse).

9822. — Construire $x = \dfrac{a^2\sqrt{b} + b^2\sqrt{c} + c^2\sqrt{a}}{a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a}}$.

9823. — Les côtés d'un triangle ont pour équations, par rapport à deux axes rectangulaires Ox, Oy,

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - a = 0,$$
$$x\cos\beta + y\sin\beta - b = 0,$$
$$x\cos\gamma + y\sin\gamma - c = 0;$$

a, b, c sont positifs, et l'origine O est à l'intérieur du triangle. Former les équations des bissectrices intérieures et extérieures. Propriétés de ces droites. Coordonnées des centres des cercles inscrits et ex-inscrits.

9824. — Étant donnés deux axes rectangulaires Ox, Oy, un point A sur Ox, un point B sur Oy et deux points P (x_1, y_1) et Q (x_2, y_2), déterminer un point R tel que le triangle PQR soit semblable au triangle AOB et de même sens que lui.

9825. — Que représente l'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$? Angle de ces deux droites.

9826. — Mener les tangentes communes aux deux cercles $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, $(x - d)^2 + y^2 - R^2 = 0$.

9827. — Construire les courbes $y = \dfrac{x^3 - 4x}{x^2 - 1}$, $\quad y = x\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$, $\quad y = \sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}$.

9828. — Construire la courbe $x = t^2 + 2t$, $y = \dfrac{1}{t^2} + \dfrac{2}{t}$; mener à cette courbe une tangente par le point A$(a, 0)$.

9829. — Construire les courbes

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{t+1}, \\ y = t^3; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{t^2}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{t^3}{1+t^2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{t^2}{t-1}, \\ y = \dfrac{t^4}{t-1}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2\cos t + \cos 2t, \\ y = 2\sin t + \sin 2t; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3\cos t + \cos 2t, \\ y = 3\sin t + \sin 2t; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \operatorname{tg} t + \sin t, \\ y = \dfrac{1}{\cos t}. \end{cases}$$

9830. — Construire les courbes

$$\rho = \frac{\cos 2\omega}{\cos\omega}, \qquad \rho = \frac{\cos 3\omega}{\sin^2\omega}, \qquad \rho = 1 - \operatorname{tg} 2\omega, \qquad \rho = a\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - 3\omega\right)}{\sin 2\omega}, \qquad \rho = \frac{\cos 2\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}, \qquad \rho = 2 + \cos\frac{\omega}{3}.$$

9831 — Construire la courbe $\rho = \cos\dfrac{2\omega}{3}$; on mène par le pôle une droite quelconque : combien la courbe aura-t-elle de points distincts du pôle situés sur cette droite?

9832. — On donne la courbe $\rho = \cos^3\dfrac{\omega}{3}$; lui mener une tangente parallèle à une direction donnée.

9833. — Directions asymptotiques de la courbe

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 + ex^2 + 2fxy + gy^2 = 0.$$

9834. — Déterminer les points d'inflexion de la courbe $y^5 = x^5 - x$.

9835. — Construire la courbe $x(y - x)^2 = x + y$; point de la courbe où la tangente est parallèle à la première bissectrice

9836. — Construire les courbes

$$y^2 - 2x^2y - x^2 + 2x = 0, \qquad x(x^2 - y^2) + 2x(x - y) - 4y = 0,$$
$$y^2(x - 3) + y(x - 2) + x(x - 2)^2 = 0, \qquad y^2(x - 2) - xy(x - 3) + x(x - 3)^2 = 0.$$

9837. — Sur la droite L $(y = a)$ on prend un point variable A; la symétrique de Ox par rapport à OA rencontre en B la parallèle à Oy menée par le point A; on achève le parallélogramme OAMB. Lieu du point M.

9838. — Lieu des points dont les symétriques par rapport aux trois côtés d'un triangle (rectangle) sont en ligne droite.

9839. — Lieu des projections du centre sur les normales à une ellipse.

9840. — Un point M décrit une ellipse; la normale à l'ellipse en ce point rencontre le petit axe en N; lieu du milieu I de MN.

9841. — Un point M décrit une ellipse; la tangente à l'ellipse en ce point rencontre le grand axe en T; lieu du centre ω du cercle circonscrit au triangle OMT.

9842. — D'un point P, on mène à une hyperbole les deux tangentes PM et PM′; lieu du point P, pour que ces deux tangentes soient également inclinées sur l'une des asymptotes.

9843. — On donne deux axes rectangulaires et un point B sur Oy; c'est le centre d'un cercle (B) de rayon R. Équation générale des cercles orthogonaux au cercle (B) et tangents à Ox; enveloppe de l'axe radical de ces deux cercles.

9844. — En un point M d'un cercle $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, on mène la tangente qui rencontre l'axe des x au point P; enveloppe de la bissectrice Δ de l'angle formé par la tangente MP avec Ox, quand le point M décrit le cercle.

9845. — La tangente à une ellipse, en un point M, rencontre l'axe focal en un point T, par lequel on mène la parallèle TL au diamètre conjugué à la tangente en M. Enveloppe de TL quand M décrit l'ellipse.

9846. — On donne une hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes; d'un point M sur cette hyperbole on abaisse la perpendiculaire MH sur le diamètre conjugué de OM. Enveloppe de la droite MH.

9847. — Enveloppe des droites coupant une parabole sous un angle de 45°.

9848. — Étant donnée la parabole $y^2 = 2px$, on projette un point M de cette courbe en P sur Ox, en Q sur Oy; trouver l'équation et la grandeur de PQ; enveloppe de PQ lorsque M décrit la parabole.

9849. — Enveloppe des droites menées par un point variable de la parabole et symétriques de la tangente en ce point par rapport à la parallèle à l'axe menée par le point. Lieu de la projection du sommet sur ces droites.

9850. — Équation générale des coniques passant par quatre points. Conique passant par cinq points.

(A suivre.)

SUJETS DE CONCOURS

ÉCOLE CENTRALE

Concours spécial d'octobre 1919.

Géométrie analytique.

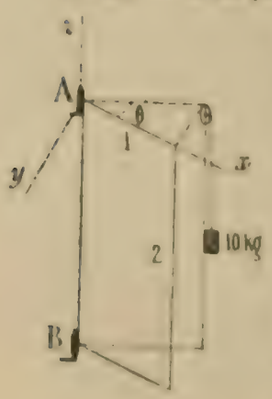
2341. — On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy, et on trace un cercle de centre O, de rayon R, rencontrant la partie négative de l'axe Ox en un point A. On définit un point M variable sur le cercle donné par l'angle θ que forme le rayon OM avec l'axe Ox, et on désigne par B le point de rencontre de l'axe Oy avec la parallèle à Ox menée par M.

1° Déterminer la courbe C lieu du point P de rencontre de la droite AB avec la parallèle à Oy menée par M. Construire la courbe C; déterminer les tangentes parallèles aux axes et les tangentes issues du point A.

2° La droite AB rencontre la courbe C en un second point variable P′ provenant d'une seconde position M′ du point M. Déterminer et construire l'enveloppe de la perpendiculaire abaissée du point B sur les droites MP′ ou M′P.

Mécanique.

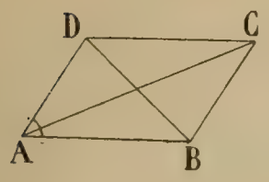
2342. — Une porte rectangulaire, homogène, ayant 2ᵐ de hauteur et 1ᵐ de largeur, du poids de 100ᵏᵍ, est montée sur deux gonds verticaux, placés aux angles; ces gonds sont agencés de telle façon que la réaction du gond supérieur est nécessairement horizontale, tandis que celle du gond inférieur peut avoir une direction quelconque.



1° Déterminer, graphiquement ou par le calcul, les efforts exercés par la porte sur les gonds.

2° A l'angle supérieur de la porte, on attache une ficelle qui passe sur une poulie très petite fixée à la paroi, à l'angle de la porte dans la position de fermeture, et on pend à cette ficelle un poids de 10ᵏᵍ. Déterminer la traction à exercer normalement à la porte et au milieu du bord vertical pour maintenir la porte ouverte sous un angle donné θ. Déterminer les efforts supportés par les gonds. On admet que le poids tenseur de 10ᵏᵍ tire sur la porte dans la direction de la ficelle; on néglige le poids de cette ficelle ainsi que tous les frottements.

Trigonométrie.



2343. — Dans un parallélogramme ABCD on donne l'angle A, le périmètre $2p$ et le rapport des diagonales $\frac{AC}{BD} = k$.

Calculer les côtés, la surface et le sinus de l'angle des diagonales du parallélogramme. Discuter.

Calcul.

Calculer, au moyen des tables de logarithmes, les côtés a, b, c et les angles A, B, C d'un triangle, définis par les formules

$$a = \sqrt{82\,448}, \qquad \operatorname{tg} A = \sqrt{\frac{265}{449}}, \qquad \operatorname{tg} B = 4 \operatorname{tg} A,$$

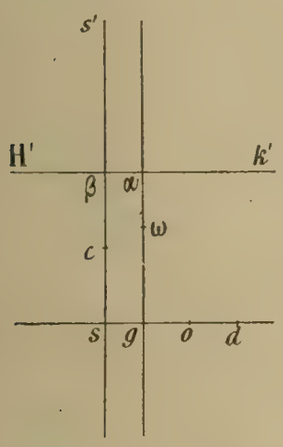
$$A + B + C = 2 \text{ droits}, \qquad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Épure.

2344. — Ni cadre, ni titre, ni flèches. Nom et signature au bas et à droite, à moins de 5^{cm} du coin de la feuille.

La ligne de rappel $g\omega\alpha$ est le grand axe de la feuille; ω est son centre.

$$\omega\alpha = 50^{mm}, \qquad \alpha\beta = 35^{mm} = gs, \qquad \beta c = cs = 70^{mm},$$
$$\beta s' = 140^{mm} = \alpha g, \qquad go = od = 43^{mm}.$$



Un cône a pour sommet le point (s, s') et pour base, dans le plan horizontal (H'), un cercle de centre (c) et de rayon 70^{mm}.

Un cylindre a pour base dans le plan horizontal (H') une ellipse dont le petit axe est le segment (gd); le grand axe, $2a = 140^{mm}$. On mène, graphiquement et *avec soin*, celle des deux tangentes communes aux deux bases qui rencontre la droite (gd) en un point (k) situé à droite de (d). — Cette tangente commune sera tracée en appliquant le bord de la règle contre les deux bases. Les génératrices du cylindre sont parallèles à la frontale $(sk, s'k')$.

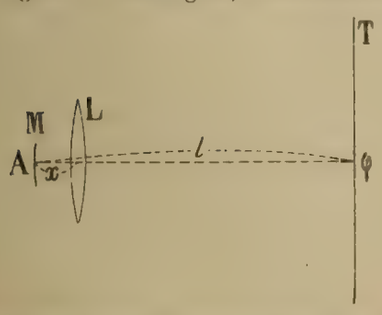
On cherchera l'intersection du cône et du cylindre, et on représentera, par ses deux projections, la portion du cône, supposé solide et opaque, extérieure au cylindre et limitée au sommet et au plan horizontal (H').

Nota. — Le résultat seul sera dessiné à l'encre noire : lignes vues en traits pleins, lignes cachées en points ronds. Tout le reste en traits rouges pleins. On fera les constructions nécessaires pour la détermination d'un point quelconque de la courbe d'intersection et de la tangente en ce point, des points et tangentes remarquables.

Les traits noirs et les traits rouges devront être fins. Aucun trait ne sera renforcé.

Physique.

I. — **2345.** Devant un petit miroir sphérique concave M mobile autour d'un axe vertical A on place une règle T rectiligne, horizontale, graduée, sur laquelle on cherche à obtenir l'image nette d'un filament lumineux, rectiligne et vertical d'une lampe électrique fixée dans le plan de la règle et mobile avec elle.



1° Si r est le rayon de courbure du miroir, on demande à quelle distance du miroir il faut placer la règle pour obtenir, sur elle, une image nette du filament, l'axe optique horizontal du miroir étant supposé perpendiculaire à la règle qu'il rencontre à la hauteur du filament.

Que peut-on observer sur la règle si le miroir tourne?

2° La longueur de la table sur laquelle doit être faite toute l'installation ne permet d'éloigner la règle du miroir qu'à une distance l insuffisante pour obtenir une image nette; on interpose alors entre le miroir et la règle, pour obtenir sur celle-ci une image nette du filament, une large lentille convergente de longueur focale f, à distance x du miroir; on demande d'établir la relation qui existe entre les longueurs f, r, l et x quand l'image est nette.

Application numérique : $r = 2^m$, $l = 0^m,80$, $f = 1^m,20$.

3° Dans la relation entre f, r, l et x, si r et l sont donnés et si $l < r$, f est fonction de x; on tracera la courbe figurative de cette fonction en portant f en ordonnée et x en abscisse; on tracera en traits pleins la région de la courbe qui correspond à des solutions réalisables expérimentalement sur la table donnée et en pointillé les régions de la courbe correspondant à des solutions purement mathématiques.

Parmi les valeurs de x qui correspondent à des solutions réalisables, dire celles qu'il est préférable d'adopter et celles qu'il faut rejeter au point de vue expérimental et en donner les motifs.

II. — Chaleur latente de vaporisation de l'eau à 100 degrés; sa mesure à l'aide d'un appareil à votre choix.

Chimie.

I. — Décrivez les préparations de l'acide sulfurique que l'industrie emploie actuellement.

Énumérez les utilisations les plus importantes de l'acide sulfurique.

II. — **2346**. Dans un eudiomètre, à 20^{cm3} d'un gaz composé d'hydrogène, de carbone et d'azote, que nous désignerons par A, on ajoute 30^{cm3} d'oxygène.

Une étincelle provoque une combustion; de la vapeur d'eau se condense, et le gaz sec qui reste dans l'eudiomètre a pour volume 35^{cm3}.

Dans ce gaz, la potasse absorbe 20^{cm3} d'anhydride carbonique.

Au gaz restant on ajoute 25^{cm3} d'hydronogène, fait passer une étincelle, et de l'eau se condense. Le volume restant, formé d'hydrogène et d'azote, est de 25^{cm3}.

1° Quelle est la formule moléculaire du corps A?

2° Quelles sont les formules des diverses réactions ainsi réalisées?

4° Les expériences décrites suffisent-elles pour établir que A ne contient que de l'hydrogène, du carbone et de l'azote?

QUESTIONS PROPOSÉES

2347. — On considère la fraction rationnelle

$$\frac{x^6 - 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + \alpha x + \beta}{x^4 - 2x^3 - \gamma x^2 - 2x + 1},$$

$\gamma = 3$

$\alpha - 1 + 2\beta = 0$

et on demande de déterminer γ, ainsi que la relation qui doit exister entre α et β pour que l'intégrale soit rationnelle.

2° On fait ensuite $\alpha = \beta$ et on demande de calculer cette intégrale, ainsi que la dérivée seconde de cette fraction rationnelle. Donner aussi le développement en série pour les petites valeurs de x. E. H.

2348. — On considère la courbe gauche définie en coordonnées rectangulaires par les équations suivantes où t désigne un paramètre variable

$$x = 1 - t^2 \sin t - 2t \cos t - 2 \sin t,$$
$$y = 2t \sin t - 2 \cos t,$$
$$z = (1 + t^2) \sin t - 2t \cos t - 2 \sin t.$$

1° Déterminer en fonction de t les cosinus directeurs α, β, γ de la tangente, et la longueur d'arc comptée à partir du point $t = 0$.

2° En appliquant les formules de Serret et Frenet, calculer les cosinus directeurs de la normale principale et la longueur du rayon de courbure.

(*Certificat de Mathématiques générales*, Rennes, novembre 1913.)

2349. — Une lentille plan-convexe, en verre, a la forme d'un hémisphère. Calculer ses aberrations longitudinales principales en la supposant successivement : 1° dans l'air, 2° dans l'eau. Indice du verre, $\frac{3}{2}$ de l'air, 1, de l'eau, $\frac{4}{3}$. Rayon de la lentille, a centimètres. C. R.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

Coulommiers. — Imp. PAUL BRODARD.

30e Année. Janvier 1920. N° 4.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SECTIONS PLANES ET SPHÉRIQUES DU TORE (*Fin*)

par M. **A. Sainte-Laguë**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Besançon.

Sections sphériques

9. La section d'un tore par une sphère est une courbe gauche du 4e degré, comme nous l'avons déjà dit. Le plan passant par le centre de la sphère et l'axe du tore est un plan de symétrie pour cette courbe, qui se projette par suite sur ce plan suivant une conique. Le cylindre projetant la courbe étant du second degré, la courbe est une biquadratique gauche.

L'étude de ces courbes peut se ramener à celle des quartiques planes dont nous venons de parler. Si l'on transforme en effet la sphère et le tore par inversion en prenant un des points de rencontre de la sphère et de l'axe du tore comme centre, avec une puissance convenable, on voit que l'on est ramené à une section plane du tore. Ceci est en particulier avantageux pour l'étude des cas de décomposition, bien que les points de rencontre de la sphère et de l'axe ne soient pas toujours réels. Signalons encore le cas où l'on transforme le tore par rapport à un des points coniques.

10. Nous allons étudier ces diverses décompositions de l'intersection par une méthode plus directe. Si la biquadratique se décompose en deux coniques, ces coniques seront des cercles. Si l'un d'eux est un parallèle, l'autre est aussi un parallèle et la sphère correspondante a son centre sur l'axe; c'est là le premier cas de décomposition. Si l'un d'eux est un méridien, le méridien symétrique du premier par rapport au plan de symétrie de la figure fait aussi partie de l'intersection, qui comprend ainsi deux cercles de même rayon. C'est le second cas.

Supposons enfin que l'un des deux cercles soit un cercle d'Yvon Villarceau; l'autre est aussi un tel cercle, puisque, d'après ce qui précède, ce ne peut être ni un parallèle ni un méridien. La sphère est alors bitangente au tore et le grand cercle de section de cette sphère par le plan de symétrie est tangent à chacun des cercles méridiens de ce plan; l'un des contacts est intérieur et l'autre extérieur.

11. La courbe du 4e degré qui constitue l'intersection est anallagmatique. Prenons en effet le point de l'axe qui est le centre radical des sphères méridiennes et de la sphère donnée. On voit que c'est un centre d'anallagmatie pour la biquadratique. En particulier, si l'intersection comprend deux cercles d'Yvon Villarceau, ils sont sur un même cône ayant ce point comme sommet.

Si le centre de la sphère est dans le plan équatorial, ce plan est un nouveau plan de symétrie pour la biquadratique. Si la sphère est simplement tangente au tore, le point de contact est un point double de la courbe. Les tangentes en un tel point sont les cordes communes aux indicatrices des deux surfaces. On sait donc les construire à la règle et au compas. Elles peuvent être rectangulaires, quel que soit le point de contact, si le rayon de la sphère sécante a une grandeur convenable; mais elles ne

peuvent être confondues que si la sphère sécante a son centre sur l'axe de révolution, ou est une sphère méridienne, cas où la courbe est formée d'un cercle double.

12. Il nous reste à étudier un peu plus en détail la courbe d'intersection dans le cas général. On a immédiatement la tangente en un point A à l'aide des normales aux deux surfaces. On peut même avoir le rayon de courbure, soit en transformant par inversion la sphère en plan sécant, car on sait que l'inverse d'un cercle de courbure est encore un cercle de courbure, soit de façon directe en employant une méthode générale : les sections planes du tore par des plans pivotant autour de la tangente en A à la biquadratique étudiée ont leurs centres de courbure sur un cercle de Meunier que l'on sait étudier. Il en est de même pour la sphère, et ici la construction de ce cercle est immédiate. Ces deux cercles du plan normal en A ont un point commun autre que A : c'est le centre de courbure cherché. On a en outre, comme on le voit, le plan osculateur.

Pour terminer l'étude de ces sections sphériques, nous supposerons que le plan horizontal de projection est le plan équatorial : le plan de symétrie passant par l'axe du tore et le centre de la sphère sera pris comme plan vertical et nous allons étudier les projections de la biquadratique sur ces deux plans de projection.

13. La projection horizontale ne présente en général aucune particularité remarquable. Elle n'a aucun point double réel, ni aucun point double apparent à distance finie. C'est une quartique dont on construit immédiatement les points situés sur les contours apparents de chacune des deux surfaces. Le cas particulier où la sphère passe par l'un des points coniques ne présente aucune difficulté.

Cette projection est un peu plus intéressante dans le cas particulier où le centre de la sphère sécante est dans le plan équatorial, car la projection sur ce plan est alors une conique Γ. Si l'on considère le tore comme enveloppe de ses sphères méridiennes, on se trouve amené à considérer la biquadratique comme enveloppe des cercles communs à la sphère donnée et aux sphères méridiennes, et par suite Γ comme l'enveloppe des droites projections horizontales de ces cercles. On a d'ailleurs par ce même raisonnement le point de contact d'une de ces droites avec son enveloppe, en remarquant que c'est le centre radical de deux sphères méridiennes infiniment voisines et de la sphère sécante. Si A est le centre de la sphère méridienne, O celui de la sphère sécante et C celui du tore, on voit que le point de contact est sur CA, la tangente étant perpendiculaire à OA.

Nous laissons au lecteur le soin de déduire de cette génération, qui ne fait plus intervenir les propriétés de l'espace et permet de se borner à la projection horizontale, diverses remarques concernant la conique Γ. Nous signalerons simplement les suivantes : Γ est une hyperbole si O est extérieur au cercle lieu de A, et les tangentes de O à ce cercle sont perpendiculaires aux asymptotes. Si Γ est sur ce cercle, on a une parabole. Il va sans dire que les branches infinies sont des branches parasites. Le centre du tore est foyer de la conique Γ du plan équatorial. La construction des éléments de Γ résulte de cette propriété et aussi de ce fait que la construction d'une tangente de direction donnée est immédiate d'après ce qui précède.

14. Le plan vertical de projection que nous avons défini étant un plan de symétrie, la projection de la biquadratique sur ce plan est dans tous les cas une conique Γ. On sait que l'on peut avoir un point de la courbe et sa tangente en se bornant à considérer la projection verticale, puisqu'il s'agit de surfaces de révolution dont les axes sont dans le plan de projection. Si l'on choisit chaque fois de façon convenable l'axe de révolution de la sphère, on a de façon simple la tangente en un point. On retrouve cette même construction, en considérant le tore comme enveloppé par des sphères de centre sur l'axe. Un raisonnement déjà fait, montre que l'enveloppe des plans radicaux de ces sphères avec la sphère sécante est le cylindre projetant la conique Γ. On en déduit immédiatement la construction d'un point de Γ connaissant la direction de la tangente en ce point.

Ici encore nous nous bornerons à énumérer les principales propriétés de la conique Γ. Cette conique est une ellipse tangente aux plans du parallèle supérieur et du parallèle intérieur du tore, et

ayant par suite son centre dans le plan équatorial du tore. Ses axes sont parallèles aux bissectrices de l'angle formé en joignant le centre de la sphère sécante aux centres des deux cercles méridiens du plan de figure. Leur direction ne dépend pas du rayon de la sphère considérée. En général l'ellipse Γ a des branches parasites.

Si la sphère est bitangente au tore, les remarques qui précèdent permettent de construire immédiatement la projection commune des deux cercles communs à cette sphère et au tore.

ANALYSE

2217. — *Intégrer les équations différentielles*

$$y + y'' + y^{(\text{IV})} = 0, \qquad y + y' + y'' - y''' - y^{(\text{IV})} - y^{(\text{V})} = 0.$$

On peut résoudre directement ces deux équations différentielles ou y parvenir en effectuant le changement de variable

$$z = y + y' + y''.$$

La méthode directe est préférable, au moins pour la première.

Nous avons en effet l'équation caractéristique

$$r^4 + r^2 + 1 = 0,$$

dont les racines sont les racines carrées des racines cubiques de l'unité; par conséquent, cette équation a pour racines

$$j, \ -j, \ j^2, \ -j^2,$$

et les solutions particulières de l'équation différentielle sont e^{jx}, e^{-jx}, ... Groupons celles qui sont imaginaires conjuguées; nous aurons

$$\frac{e^{jx} + e^{j^2x}}{2}, \qquad \frac{e^{jx} - e^{j^2x}}{2i},$$

ou

$$e^{-\frac{x}{2}} \cos\frac{x\sqrt{3}}{2}, \qquad e^{-\frac{x}{2}} \sin\frac{x\sqrt{3}}{2},$$

$$e^{\frac{x}{2}} \cos\frac{x\sqrt{3}}{2}, \qquad e^{\frac{x}{2}} \sin\frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

La solution générale est donc

$$e^{-\frac{x}{2}}\left(\mathrm{A}\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + \mathrm{B}\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + e^{\frac{x}{2}}\left(\mathrm{A}'\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + \mathrm{B}'\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right).$$

Pour la seconde, l'équation caractéristique est

$$r^5 + r^4 + r^3 - r^2 - r - 1 = 0,$$

ou

$$(r-1)(r^2 + r + 1)^2 = 0.$$

Les solutions particulières sont e^r, e^{jr}, e^{j^2r}, et xe^{jr}, xe^{j^2r}. On trouve dès lors tout de suite la solution générale

$$\mathrm{A}e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left(\mathrm{B}\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + \mathrm{C}\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + xe^{-\frac{x}{2}}\left(\mathrm{D}\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + \mathrm{E}\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right).$$

L. NAUCELLE, à La Châtre.

Bonnes solutions : MM. A. Berlande, à Saint-Cloud; E. Krauss; L. Simon, à Fourmies; L. Jolly, à Honfleur; Aurousseau; G. Lach, à Douai.

2221. — *On considère l'équation différentielle*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 11y = e^{3x}(\sin\sqrt{2}x + x^2 + 1)$$

et on demande :

1° de trouver l'intégrale générale;

2° de trouver l'intégrale particulière qui représente par rapport à deux axes de coordonnées rectangulaires l'équation d'une courbe C passant par l'origine et admettant comme tangente en ce point la bissectrice des axes $y - x = 0$;

3° de construire la portion de cette courbe comprise entre l'origine et le point où elle coupe la droite

$$x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Calculer l'aire comprise entre l'axe Ox, la portion de courbe précédemment construite, et la droite

$$x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

(*Certificat de Mathématiques générales, Grenoble*, 1912.)

1° L'intégrale générale de cette équation s'obtient en ajoutant à l'intégrale générale de l'équation sans second membre une solution particulière de l'équation complète.

Or l'équation sans second membre est

$$y'' - 6y' + 11y = 0;$$

l'équation caractéristique est

$$r^2 - 6r + 11 = 0;$$

elle a pour racines $r = 3 \pm i\sqrt{2}$; par conséquent, nous avons les deux solutions particulières

$$e^{x(3+i\sqrt{2})}, \qquad e^{x(3-i\sqrt{2})};$$

ces deux solutions peuvent se remplacer par leur demi-somme et leur demi-différence, c'est-à-dire par

$$e^{3x}\cos x\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad e^{3x}\sin x\sqrt{2}.$$

Donc, la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y = e^{3x}(\lambda\cos x\sqrt{2} + \mu\sin x\sqrt{2}),$$

λ et μ étant deux constantes arbitraires.

Cherchons maintenant une solution de l'équation avec second membre : pour cela, posons

$$y = ze^{3x},$$
$$y' = e^{3x}(3z + z'),$$
$$y'' = e^{3x}(z'' + 6z' + 9z),$$

et l'équation deviendra

$$z'' + 2z = \sin x\sqrt{2} + x^2 + 1;$$

nous avons maintenant à trouver une solution particulière de chacune des deux équations différentielles

$$z'' + 2z = \sin x\sqrt{2},$$
$$z'' + 2z = x^2 + 1.$$

La seconde admet évidemment pour solution $\frac{x^2}{2}$, et il ne reste qu'à intégrer la première : à cet effet nous poserons

$$z = u\cos x\sqrt{2};$$

nous avons
$$z' = u' \cos x\sqrt{2} - \sqrt{2}\, u \sin x\sqrt{2},$$
$$z'' = u'' \cos x\sqrt{2} - 2u'\sqrt{2} \sin x\sqrt{2} - 2u \cos x\sqrt{2}.$$
Donc
$$z'' + 2z = u'' \cos x\sqrt{2} - 2\sqrt{2}u' \sin x\sqrt{2} = \sin x\sqrt{2}.$$

Nous satisfaisons à cette équation en posant
$$u' = -\frac{1}{2\sqrt{2}},$$
et, par suite,
$$u = -\frac{x}{2\sqrt{2}}.$$

La solution générale de l'équation proposée est donc
$$y = e^{3x}\left(\lambda \cos x\sqrt{2} + \mu \sin x\sqrt{2} - \frac{x \cos x\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + \frac{x^2}{2}\right).$$

2° Pour que la courbe C passe au point O et admette pour tangente en ce point la droite $y = x$, il faut que, pour $x = 0$, y soit nul et $y' = 1$. La première condition donne $\lambda = 0$; nous supprimerons immédiatement le terme correspondant et nous ne prendrons y' qu'après cette simplification; en outre nous n'écrirons de y' que les termes non nuls pour $x = 0$; nous avons ainsi
$$y' = e^{3x}\left(\sqrt{2}\mu \cos x\sqrt{2} - \frac{\cos x\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right) + \ldots.$$

Pour $x = 0$, ceci nous donne
$$\mu\sqrt{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = 1;$$
donc
$$\mu = \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Par conséquent, l'équation de la courbe C est
$$y = e^{3x}\left(\frac{2\sqrt{2}+1}{4} \sin x\sqrt{2} - \frac{x \cos x\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + \frac{x^2}{2}\right).$$

3° Quand x varie de 0 à $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, $x\sqrt{2}$ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$; par conséquent, le sinus augmente de 0 à 1, le cosinus diminue de 1 à 0; d'autre part, y est un produit de deux facteurs; le premier est toujours positif et croissant, le second part de 0; il nous suffit donc de prouver qu'il est aussi croissant dans l'intervalle; or, sa dérivée est
$$\cos x\sqrt{2} + \frac{x}{2}(2 + \sin x\sqrt{2}),$$
et il est visible que chacun de ses termes est positif dans l'intervalle indiqué. La fonction y est donc croissante, elle part de 0 et elle atteint la valeur
$$y\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right) = e^{\frac{3\pi}{2\sqrt{2}}}\left(\frac{2\sqrt{2}+1}{4} + \frac{\pi^2}{16}\right).$$

Il est facile de voir que cette valeur est plus grande que $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. Cela est évident du premier facteur et il est visible que le second facteur est plus grand que 1.

D'autre part, la dérivée de y peut s'écrire
$$y' = 3y + e^{3x}\left[\cos x\sqrt{2} + \frac{x}{2}(2 + \sin x\sqrt{2})\right],$$
et il est visible maintenant qu'elle est positive, ce qui corrobore la conclusion précédente.

Il est facile de voir aussi que le facteur

$$\cos x\sqrt{2} + \frac{x}{2}(2 + \sin x\sqrt{2})$$

est croissant et positif; par conséquent,

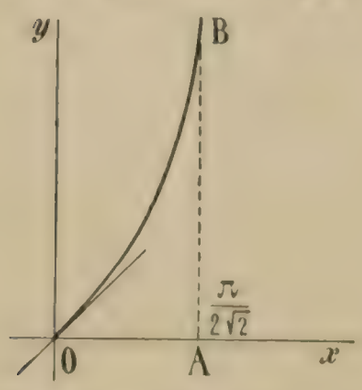
$$e^{3x}\left[\cos x\sqrt{2} + \frac{x}{2}(2 + \sin x\sqrt{2})\right]$$

est croissante aussi et a sa dérivée positive. Donc la dérivée y'' est positive aussi et la courbe tourne sa concavité vers les y positifs. Le coefficient angulaire de la tangente au point $x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ est

$$y'\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right) = 3y\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right) + e^{\frac{3\pi}{2\sqrt{2}}} \cdot \frac{3\pi}{4\sqrt{2}},$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right) = e^{\frac{3\pi}{2\sqrt{2}}}\left(\frac{3 + 6\sqrt{2}}{4} + \frac{3\pi^2}{16} + \frac{3\pi\sqrt{2}}{8}\right);$$

c'est un nombre assez grand numériquement; la tangente en ce point est donc presque verticale.



Pour obtenir l'aire de cette courbe, il faut d'abord trouver la primitive de y, que nous appellerons Y. Un moyen simple de l'obtenir est d'intégrer l'équation différentielle terme à terme.

Ceci donne

$$y' - 6y + 11Y = \int e^{3x}\sin x\sqrt{2}\,dx + \int e^{3x}x^2dx + \int e^{3x}dx.$$

Les trois intégrales du second membre sont faciles à obtenir : la troisième est

$$\int e^{3x}dx = \frac{e^{3x}}{3};$$

la seconde s'obtient en intégrant deux fois par parties :

$$\int e^{3x}x^2dx = \frac{x^2e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx,$$

$$\int xe^{3x}dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \int\frac{e^{3x}dx}{3},$$

finalement,

$$\int x^2e^{3x}dx = e^{3x}\left(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}\right);$$

enfin, la première s'obtient aussi après deux intégrations par parties :

$$\int e^{3x}\sin x\sqrt{2}\,dx = \frac{e^{3x}\sin x\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\int e^{3x}\cos x\sqrt{2}\,dx,$$

$$\int e^{3x}\sin x\sqrt{2}\,dx = -\frac{e^{3x}\cos x\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}\int e^{3x}\cos x\sqrt{2}\,dx;$$

il n'y a plus qu'à multiplier la première par $\frac{3}{\sqrt{2}}$, la seconde par $\frac{\sqrt{2}}{3}$, et ajouter, pour avoir

$$\frac{11}{3\sqrt{2}}\int e^{3x}\sin x\sqrt{2}\,dx = e^{3x}\left(\frac{\sin x\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{\cos x\sqrt{2}}{3}\right),$$

$$\int e^{3x}\sin x\sqrt{2}\,dx = \frac{e^{3x}}{11}(3\sin x\sqrt{2} - \sqrt{2}\cos x\sqrt{2}).$$

Nous avons donc finalement

$$11Y = 6y - y' + e^{3x}\left(\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{11}{27} + \frac{3\sin x\sqrt{2} - \sqrt{2}\cos x\sqrt{2}}{11}\right),$$

et, en remplaçant y' par sa valeur,

$$11Y = 3y + e^{3x}\left(\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{11}{27} - x + \frac{3\sin x\sqrt{2} - \sqrt{2}\cos x\sqrt{2}}{11} - \cos x\sqrt{2} - \frac{x}{2}\sin x\sqrt{2}\right).$$

Il suffit maintenant d'y faire $x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, $x = 0$, puis de retrancher les deux résultats. Ceci donne, en appelant A l'aire cherchée,

$$11A = e^{\frac{3\pi}{2\sqrt{2}}}\left(\frac{3 + 6\sqrt{2}}{4} + \frac{3\pi^2}{16} + \frac{\pi^2}{24} - \frac{11\pi}{18\sqrt{2}} + \frac{11}{27} + \frac{3}{11} - \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right) - \frac{11}{27} + \frac{\sqrt{2}}{11} + 1.$$

Telle est la formule numérique qui donne l'aire demandée A.

Bonnes solutions : MM. M. Roux, au Creusot; F. Aurousseau, à Toul; L. Simon, à Fourmies; M. Mazet, à Alger; G. Lach, à Douai; A. Berlande, à Saint-Cloud; L. Naucelle, à La Châtre; H. Mennessier; E. Krauss; A. Prachay, à Lyon; E. Dion, école normale supérieure de Saint-Cloud; J. Chazelet, lycée de Clermont-Ferrand.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2218. — *Dans un plan, on donne un cercle fixe de rayon* R *et une courbe* C. *Une droite passant par le centre du cercle rencontre celui-ci en un point* A *et la courbe* C *en un point* M. *Déterminer cette courbe de façon que la tangente au cercle au point* A *et la tangente à la courbe au point* M *se coupent sur une droite donnée* Δ.

Étudier les différentes formes des courbes C *suivant que varient la distance du centre du cercle à la droite* Δ *et la constante d'intégration.*

Prenons pour axes deux diamètres rectangulaires du cercle, l'un d'eux étant perpendiculaire à la droite donnée Δ. Soient $x = a$ l'équation de cette droite et $\rho = f(\omega)$ l'équation polaire de la courbe cherchée. La tangente à cette courbe aura pour équation

$$\frac{X - \rho\cos\omega}{\rho'\cos\omega - \rho\sin\omega} = \frac{Y - \rho\sin\omega}{\rho'\sin\omega + \rho\cos\omega};$$

celle du cercle, qui correspond au même ω, est

$$X\cos\omega + Y\sin\omega - R = 0.$$

Soit λ la valeur commune des deux premiers rapports; nous aurons

$$X = \rho\cos\omega + \lambda(\rho'\cos\omega - \rho\sin\omega),$$
$$Y = \rho\sin\omega + \lambda(\rho'\sin\omega + \rho\cos\omega),$$

et, en portant dans la seconde équation,

$$\rho - R + \lambda\rho' = 0,$$

puis,

$$\lambda = \frac{R - \rho}{\rho'}.$$

En écrivant que $X = a$, nous avons

$$-a\rho' + \rho\rho'\cos\omega + (R - \rho)(\rho'\cos\omega - \rho\sin\omega) = 0,$$
$$-a\rho' + R\rho'\cos\omega - \rho(R - \rho)\sin\omega = 0.$$

De là on déduit

$$\frac{\rho'}{\rho(R-\rho)} = \frac{\sin\omega}{R\cos\omega - a}.$$

Les variables sont séparées et l'intégration s'achève sans peine : le premier membre s'écrit

$$\frac{\rho'}{R}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{R-\rho}\right)$$

et nous avons finalement

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\rho}{R-\rho} = \frac{R\sin\omega\, d\omega}{R\cos\omega - a}.$$

L'intégration est immédiate et donne

$$L\frac{\rho}{R-\rho} = L\frac{C}{R\cos\omega - a},$$

$$\frac{\rho}{R-\rho} = \frac{C}{R\cos\omega - a},$$

$$\rho(C - a + R\cos\omega) = CR.$$

Les courbes (C) sont donc des coniques ayant l'origine pour foyer et l'axe des x pour axe focal.

Ce résultat est évident *a priori*, si on remarque que la transformation indiquée équivaut à une homologie dont la droite Δ est l'axe et le centre du cercle, le centre.

L. NAUCELLE, à La Châtre.

Bonnes solutions : MM. Jolly, à Honfleur ; L. Simon, à Fourmies ; P. Roberti, à Douai ; G. Lach, à Douai.
Solution géométrique : M. L. Troin.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1919)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (*Suite*)

10106. — On donne sur une conique deux points fixes A et B ; par ces points on mène deux parallèles qui rencontrent la conique en A' et B'. Lieu du point de rencontre de AB' et BA'.

— **107.** — Par un point du cercle $2x^2 + 2y^2 = 1$ on mène une tangente à l'ellipse $3x^2 + 4y^2 = 1$, et par ce point une perpendiculaire à la tangente. Montrer que cette perpendiculaire est tangente à la deuxième ellipse $4x^2 + 6y^2 = 1$.

— **108.** — Que représente l'équation $\rho = \frac{2}{1 + \cos\omega}$? Lieu des points d'où l'on peut mener à cette courbe deux tangentes rectangulaires.

— **109.** — Lieu des sommets des hyperboles qui ont un foyer donné et une asymptote donnée.

— **110.** — On donne deux paraboles ayant même sommet et leurs axes rectangulaires. Lieu des pôles des normales de l'une par rapport à l'autre.

— **111.** — On considère l'hyperbole $xy = a^2$. Trouver l'enveloppe d'un cercle ayant son centre sur cette hyperbole et tangent à Oy.

— **112.** — On considère une ellipse. Par le foyer de droite on mène une sécante variable ; on fait passer un cercle par l'autre foyer et les deux points de rencontre de la sécante et de l'ellipse ; ce cercle coupe l'ellipse en deux autres points M et N. Trouver l'enveloppe de la droite MN.

— **113.** — Former l'équation générale des ellipses admettant un segment AB pour l'un des diamètres conjugués égaux.

— **114.** — On donne la parabole $y^2 - 2px = 0$. Trouver le lieu des points tels que parmi les trois normales issues de l'un d'eux à la courbe, l'une d'elles soit bissectrice de l'angle des deux autres.

— **115.** — Lieu des sommets d'un triangle d'aire minimum circonscrit à une ellipse.

— **116.** — On considère une ellipse, un foyer F, un point M et la tangente en ce point. Du foyer on abaisse la perpendiculaire sur la tangente. Soient ρ la longueur du rayon vecteur FM, p celle de la perpendiculaire ; montrer qu'on a $b^2\rho = p^2(2a - \rho)$.

— **117.** — On considère une parabole, son sommet S et son foyer F. De S comme centre on décrit un cercle qui passe par F; ce cercle coupe la parabole aux points A et B. Comparer les angles ASB et AFB.

— **118.** — Lieu des points d'où l'on peut mener deux normales rectangulaires à la parabole $y^2 - 4px = 0$.

— **119.** — On considère la conique $\rho = \frac{p}{1 + e\cos\omega}$; trouver le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes rectangulaires.

— **120.** — Équation de la polaire d'un point (ω_0, ρ_0) par rapport à la même conique.

— **121.** — On considère une ellipse, ses foyers F, F′ et ses sommets A, A′. Des deux foyers on abaisse des perpendiculaires FP, F′P′ sur une tangente. Lieu du point de rencontre de AP et A′P′. 2 hyperbole,

— **122.** — On donne la parabole $y^2 - 4x = 0$, et le point $x = 2$, $y = 3$. Trouver l'équation du cercle qui passe aux pieds des trois normales issues de ce point à la courbe.

— **123.** — Par les pieds des normales issues d'un point P à une ellipse on peut faire passer deux paraboles. Trouver le point de rencontre de leurs axes. Lieu de ce point quand le point P décrit la courbe $f(x, y) = 0$.

— **124.** — Équation générale des paraboles ayant un sommet donné et tangentes à une droite donnée. Enveloppe de la directrice. $4y^3 - 27hx^2 = 0$

— **125.** — Enveloppe des cordes d'une ellipse telles que l'aire comprise entre l'ellipse et la corde ait une valeur donnée.

IV. — Géométrie analytique à trois dimensions.

— **126.** — Trouver la perpendiculaire commune aux deux droites.

$$\begin{cases} x = az + p, \\ y = bz + q, \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= a'z + p', \\ y &= b'z + q', \end{aligned}$$

et calculer leur plus courte distance.

— **127.** — Mener par la droite $3x + 2y - z - 1 = 0$, $x - y + z = 0$ un plan faisant un angle de 60° avec la droite $2x + 1 = 3y - 2 = z - 1$.

— **128.** — Calculer la plus courte distance des deux droites $x = y = z$ et $x = 2y + 1$, $y = 3z + 2$.

— **129.** — Faire tourner le point (a, b, c) de l'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de l'axe $x = y = z$.

— **130.** — On considère la courbe $y = \frac{x^2}{2a}$, $z = \frac{x^3}{6a^2}$. Montrer que les tangentes à cette courbe font un angle constant avec une direction fixe.

— **131.** — Trouver l'équation du cône qui a pour sommet le point (1, 1, 1) et pour directrice la courbe $x = t^3$ $y = t^2$, $z = t$.

— **132.** — Trouver l'angle maximum de deux génératrices du cône $x^2 - y^2 + 2yz = 0$. Même question pour $x^2 - yz = 0$.

— **133.** — Trouver les bissectrices de la tangente et de la normale principale en un point de la courbe $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$. Même question en prenant la tangente et la binormale.

— **134.** — Trouver l'aire latérale du cylindre parallèle à Oz, ayant pour base la cubique $x^2 + y^2 = ax(x^2 - 3y^2)$, et limitée au paraboloïde $y = zx$.

— **135.** — Montrer que la surface $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = a^3$ est de révolution et déterminer la méridienne.

— **136.** — Trouver l'aire et le volume du tore engendré par le cercle $x = R\sin t$, $y = a + R\cos t$ en tournant autour de Ox.

— **137.** — Rectifier la courbe $y = x^2$, $z = \frac{2x^3}{3}$.

— **138.** — Étudier la courbe $x = \cos t + \sqrt{3}\sin t$, $y = \cos t - \sqrt{3}\sin t$, $z = 2\cos t$. Est-elle sur une sphère? Relation entre les t de deux rayons rectangulaires.

— **139.** — On donne deux sphères S et S′ et un plan P qui passe par la ligne des centres. On considère une sphère Σ tangente à S et S′ et au plan P en M. Lieu du point M quand Σ varie.

— **140.** — On donne un tore de collier nul ayant pour axe Oz et pour centre le point O. Trouver l'aire de la section faite par le plan $x = z$.

— **141.** — On considère la surface réglée engendrée par une droite qui rencontre Oz sous un angle de 45° et qui s'appuie sur un cercle situé dans le plan des xy et tangent à Oy au point O. Trouver l'équation de la surface. Sections par des plans parallèles au plan des xy. Pouvait-on prévoir le résultat géométriquement? Calculer le volume limité par cette surface et deux plans parallèles au plan des xy.

— **142.** — On donne un cercle de centre O, une droite D perpendiculaire au plan du cercle en un point A du cercle, et une droite D′ perpendiculaire au plan passant par le point O et la droite D. Former l'équation de la surface engendrée par une droite assujettie à rencontrer le cercle et les droites D et D′. Étudier les sections de la surface par des plans parallèles au plan du cercle.

— **143.** — Que représente l'équation $\sin(x + y + z) = \cos(x + y - z)$?

— **144.** — On donne deux points A, B et une droite Δ. Lieu des centres des sphères passant par le point A et telles que le plan polaire du point B passe par Δ.

— **145.** — Lieu des sommets des cônes de révolution passant par une conique.

— **146.** — On considère la courbe $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$. Par un point M de cette courbe on mène MN perpendiculaire au plan xOy, puis sur cette perpendiculaire on porte à partir du point M dans le sens MN une longueur MP égale à l'arc OM. Lieu de P. C'est une conique : trouver son plan et sa nature.

— **147.** — Trouver l'équation d'un cône qui a pour sommet l'origine et pour directrice un cercle passant par trois points situés sur les axes.

— **148.** — On coupe le cylindre parabolique $y^2 - 2px = 0$ par le plan $x - 2y + 3z = 1$: trouver le sommet de la parabole section.

— **149.** — Tangentes communes aux deux surfaces $x^2 + y^2 - 2az = 0$. Équation de la surface engendrée par celles qui s'appuient sur la droite $x = a$, $z = 0$.

— **150.** — Aire latérale d'un cône ayant son sommet sur Oz et pour base un cercle tangent en O à Oy dans le plan des xy.

— **151.** — On donne trois axes rectangulaires et une sphère ayant son centre sur Ox. Former l'équation du conoïde engendré par une droite rencontrant Oz, parallèle au plan xOy et tangente à la sphère. Calculer le volume limité par le conoïde, la sphère, le plan yOz et les plans tangents à la sphère parallèles au plan xOy.

— **152.** — On donne deux droites D et D′ dans l'espace. Du milieu de la perpendiculaire commune on abaisse des perpendiculaires sur toutes les droites qui s'appuient sur D et D′. Lieu des pieds de ces perpendiculaires.

— **153.** — On donne deux cercles fixes sur une sphère. Trouver le lieu des pôles d'un cercle variable tangent à ces deux cercles.

— **154.** — On donne deux sphères égales ayant leurs centres sur Ox et Oy et un cône de révolution ayant pour axe Oz. Trouver le lieu des centres des sphères tangentes aux trois surfaces.

— **155.** — Trouver l'équation de la surface de révolution engendrée par la droite $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{4}$ en tournant autour de l'axe $x = 1$, $y = 2$.

— **156.** — Dans deux plans rectangulaires on donne deux cercles tangents à l'arête du dièdre en un même point. Déterminer les normales communes à ces deux cercles. Cas où les cercles sont égaux.

— **157.** — Trouver l'équation du cylindre de révolution qui a pour axe la droite $x = 2y + 1$, $z = 3y - 2$ et qui passe par l'origine.

— **158.** — On donne la parabole $y^2 - 2px = 0$, $z = 0$ et la droite $y = 0$, $z = h$. Trouver la surface engendrée par une normale à la parabole rencontrant la droite. Montrer que les parallèles aux génératrices de la surface menées par l'origine sont dans un plan passant par Oy.

— **159.** — Montrer que la surface $z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ est réglée. Trouver le lieu des pieds des normales abaissées d'un point sur les génératrices.

— **160.** — Trouver le volume compris entre la surface $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16 - z^2} = 1$ et les plans $z = 0$, $z = 2$.

— **161.** — Étudier la surface $z(x^2 + y^2) + x^2 - y^2 + 2xy - 1 = 0$. Lieu des axes des sections par des plans parallèles au plan des xy. Lieu des sommets. Volume limité par la surface et les plans $z = 2$, $z = 3$.

— **162.** — On considère la surface $x(x^2 + y^2 + z^2) - a(z^2 - y^2) - a^2x = 0$. Chercher les droites de cette surface. Peut-on en déduire un mode de génération ?

— **163.** — Discuter la réalité des plans osculateurs à la courbe $y = x^2$, $z = x^3$ passant par un point.

— **164.** — Pour quelles valeurs de a peut-on calculer l'arc de la courbe $x = az^3$, $y = z^2$? Calculer l'aire cylindrique limitée par la courbe, sa projection sur le plan des xy et une droite MH parallèle à Oz.

— **165.** — On donne deux cercles égaux de centres O et O′, situés dans des plans parallèles, et on considère la droite D perpendiculaire aux plans des cercles et passant par le milieu de OO′. Trouver la surface engendrée par une droite rencontrant les cercles et la droite D.

— **166.** — Équation de la surface engendrée par le cercle $x^2 + y^2 - 4x = 0$ en tournant autour de la droite $\frac{x}{a} = 2y = z + 1$.

— **167.** — Déterminer λ pour que le plan $z = \lambda y$ coupe la surface $x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 10yz = 0$ suivant deux génératrices rectangulaires.

— **168.** — On donne un plan P et une droite D non située dans le plan, et on considère une droite Δ située dans le plan P et telle que la plus courte distance de D et Δ soit constante. Trouver l'enveloppe de Δ.

— **169.** — Un cylindre creux de révolution limité à une base a son axe à 45° sur le plan horizontal. Quel est le volume de l'eau qu'on peut introduire de façon que le niveau affleure au bord supérieur du fond ?

— **170.** — Déterminer l'aire latérale du cylindre $x^2 + y^2 - 4x$ situé à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

— **171.** — Lieu des droites qui s'appuient sur une droite donnée et sont orthogonales à un cercle fixe.

— **172.** — Lieu des pieds des normales abaissées des points d'une droite donnée sur un cône de révolution.

— **173.** — Perpendiculaire commune à une droite fixe et à une droite variable qui tourne dans un plan fixe autour d'un point fixe. Lieu de cette perpendiculaire commune. Définition géométrique de la surface.

(A suivre.)

SUJETS DE CONCOURS

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Concours de 1918.

Mathématiques.

2350. — On donne dans un plan un système d'axes rectangulaires Ox, Oy, un cercle fixe (ω), de centre O et de rayon R, enfin deux points fixes A, B, situés sur l'axe Ox, dont les abcisses sont désignées respectivement par αR et βR.

Un point mobile M décrivant le cercle (ω), on considère le cercle variable (γ) circonscrit au triangle MAB. Soit M′ le second point de rencontre de (ω) et de (γ).

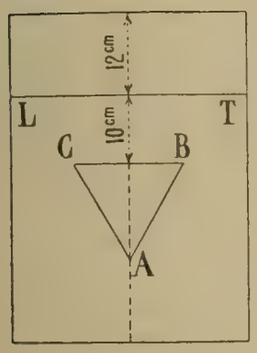
1° Trouver le lieu du centre du cercle (γ'), orthogonal à (γ), qui passe en M et M′. Cas où ce lieu est un cercle.

2° La loi du mouvement de M sur (ω) étant supposée donnée, on désigne par V et V′ respectivement les valeurs algébriques des vitesses de M et de M′ sur le cercle (ω). Montrer que le rapport $\frac{V}{V'}$ ne dépend que de la position de M, et non de la loi du mouvement; trouver le lieu du point P de la droite MM′ qui est défini par la condition que l'on ait, en grandeur et en signe, $\frac{\overline{PM}}{\overline{PM'}} = \frac{V}{V'}$.

3° Soit θ l'angle polaire (Ox, OM) de M, et soit ρ le rayon du cercle (γ). Calculer la valeur moyenne du rapport $\frac{R}{\rho}$, considéré comme fonction de θ, pour un tour complet de M sur le cercle (ω). On supposera, pour ce calcul, que A et B sont tous deux intérieurs au cercle (ω); on montrera que la valeur moyenne demandée est alors une fonction continue du seul produit $\alpha\beta$. En est-il de même pour les autres positions de A et B?

(*Durée : 4 h.*)

Épure.



2351. — Un triangle équilatéral ABC, de 16cm de côté, est tracé dans le plan horizontal de projection. Le côté BC est parallèle à la ligne de terre LT; le sommet A est sur le grand axe de la feuille. On considère les trois paraboles circonscrites au triangle ABC et ayant pour sommets respectivement les trois points A, B et C.

Chacune de ces trois paraboles, en tournant autour de son axe, engendre un paraboloïde de révolution.

On représentera par ses deux projections le solide commun aux trois paraboloïdes supposés pleins.

On se conformera, pour la mise en place des données, aux indications du croquis ci-contre.

(*Durée : 4 h.*)

Calcul.

Une masse d'air $M = 10^g$, de masse spécifique $\mu = 1{,}293.10^{-3}$ C.G.S., est prise à la température absolue de la glace fondante $T_0 = 273°$, sous la pression atmosphérique $p_0 = 1{,}013.10^6$ C.G.S. Son volume v_0 est réduit par une compression brusque (dite adiabatique). Au cours de cette opération, la température absolue T, la pression p de la masse considérée, et le travail W à fournir pour réaliser la compression, sont donnés, en fonction de v, par les formules

$$T.v^{\gamma-1} = T_0 v_0^{\gamma-1}, \qquad pv^{\gamma} = p_0 v_0^{\gamma}, \qquad W = -\int_{v_0}^{v} p\,dv, \qquad \gamma = 1{,}404.$$

Pour le volume $v = \frac{v_0}{10}$, calculer, au moyen des tables de logarithmes, T, p, W, en degrés, atmosphères et joules.

(*Durée : 1 h.*)

Physique.

I. — Loi de Jurin. Étude expérimentale et théorique.

II. — **2352**. Le réseau des isothermes d'une masse donnée d'un fluide est représenté par l'équation de Van der Vaals

$$(1) \qquad \left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT.$$

1° Les constantes critiques T_c, p_c, v_c étant données, calculer les coefficients a, b, R de l'équation (1).

Pour 1g d'un certain fluide satisfaisant à l'équation de Van der Vaals, les constantes critiques sont :

température absolue, $T_c = 400°$; volume spécifique, $u_c = 4^{cm3}$;
pression, $p_c = 60$ atmosphères (1 atm. = 1 033g poids par cm²).

Calculer les valeurs correspondantes de a, b, R.

2° Pour la masse donnée du fluide, quand v croît indéfiniment, montrer que l'équation de Van der Vaals se réduit à celle des « gaz parfaits ». On suppose que tous les corps soient amenés à cet état limite et qu'ils obéissent en outre à la loi d'Avogadro : montrer que, dans les équations $pv = RT$ relatives aux masses moléculaires des divers gaz parfaits, la constante R est la même pour les gaz. Calculer cette constante au moyen des données suivantes relatives à l'oxygène : masse moléculaire de l'oxygène, $O^2 = 32^g$; densité de l'oxygène relative à l'air, 1,1052; masse du cm³ d'air normal, 0g,001 293.

Des résultats obtenus, déduire la masse moléculaire du fluide ci-dessus défini par ses constantes critiques.

3° Étant donnés, pour une suite d'isothermes, les couples des valeurs correspondantes des masses spécifiques d et d' du liquide et de sa vapeur saturée, à la pression F de cette vapeur saturée, montrer comment on peut calculer, au moyen de l'équation (1), les valeurs de F et T correspondant aux couples de valeurs de d et d'.

En particulier, calculer les valeurs de F et T correspondant aux densités $d = 0,56$, $d = 0,04$ relatives au fluide ci-dessus défini par ses constantes critiques.

4° Dans ce dernier cas, évaluer en kilogrammètres le travail nécessaire à la liquéfaction de 40g de vapeur saturée. (*Durée : 3 h.*)

Chimie.

I. — Ammoniac : Sa préparation dans les laboratoires et dans l'industrie ; ses principales propriétés.

Pour les préparations industrielles, on se bornera à l'indication des réactions usitées, sans entrer dans aucune description d'appareils.

II. — **2353**. Étant donné un poids de phosphore égal à 3g,1, on le fait réagir sur le gaz provenant de l'action d'un excès d'acide chlorhydrique sur un poids de 17g,4 de bioxyde de manganèse pur. On suppose ce gaz totalement absorbé par le phosphore. Dire quelle sera la composition qualitative et quantitative du produit ainsi obtenu.

Une certaine quantité de ce produit étant mise en présence d'un grand excès d'eau, indiquer les réactions qui se produiront.

D'autre part, on effectue cette même décomposition par l'eau sur $\frac{1}{10}$ du produit de l'action du chlore sur le phosphore et l'on dirige dans la solution aqueuse un courant de chlore jusqu'à ce que ce gaz cesse d'être absorbé. On suppose que le liquide ne retienne pas de chlore libre, on le neutralise exactement par une solution alcaline et on l'additionne d'un excès d'une solution d'azotate d'argent. Il se forme un précipité dont on demande la nature et le poids.

Indiquer enfin les réactifs courants qui permettraient la vérification de la nature simple ou complexe du précipité argentique.

Poids atomiques : O = 16; P = 31; Cl = 35,5; Mn = 55; Ag = 108. (*Durée : 3 h.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

2354. — Transformer homographiquement et démontrer la propriété suivante : lorsque deux coniques, l'une inscrite dans un triangle, l'autre circonscrite au même triangle, sont tangentes l'une à l'autre, la corde commune à ces coniques, associée à la tangente au point où elles se touchent, passe par un point fixe.

R. Bouvaist.

2355. — Le pôle normal d'une corde focale d'une ellipse est situé sur la parallèle au grand axe menée par le milieu de cette corde.

R. Bouvaist.

2356. — Trouver le lieu des axes des cônes circonscrits à une famille de quadriques homofocales et ayant pour sommet un point donné.

R. Bouvaist.

DEUXIÈME PARTIE

ANALYSE

2162. — 1° *Trouver la fonction la plus générale, définie entre* 0 *et* $+\infty$, *qui satisfasse à l'équation différentielle*

$$xy' + y = 2x + 2 - \frac{1}{x},$$

et indiquer d'une façon sommaire les variations de cette fonction ainsi que la courbe représentative.

2° *Trouver le lieu des minima de cette fonction quand la constante d'intégration varie et trouver la valeur de cette constante qui sépare les fonctions qui s'annulent pour deux valeurs positives de* x, *de celles qui ne s'annulent pas.*

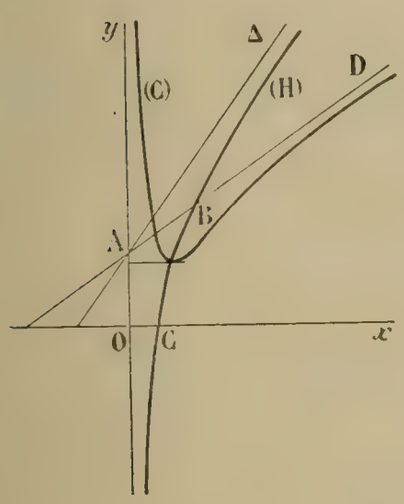
1. Cette équation différentielle est une équation linéaire du premier ordre qui s'intègre commodément par le procédé classique. Mais elle est bien plus facile encore à intégrer par la remarque que le premier membre est la dérivée de xy. Nous trouvons ainsi

$$xy = x^2 + 2x - \mathrm{L}x + \mathrm{C},$$

puis

$$y = x + 2 + \frac{\mathrm{C} - \mathrm{L}x}{x}.$$

Cette fonction est bien définie de 0 à $+\infty$; pour $x = +\varepsilon$, elle est égale à $+\infty$, quel que soit C ; pour $x = +\infty$, elle est encore égale à $+\infty$. La branche infinie correspondante est asymptote à la droite D, $y = x + 2$, et au-dessous de cette droite. Il est probable que la fonction passe par un minimum. Pour le vérifier, prenons la dérivée



$$y' = 1 - \frac{\mathrm{C}}{x^2} + \frac{\mathrm{L}x}{x^2} - \frac{1}{x^2};$$

cette dérivée a donc le signe de

$$z = x^2 - (\mathrm{C} + 1) + \mathrm{L}x.$$

Or $z' = 2x + \dfrac{1}{x}$ est toujours positive dans le champ des valeurs positives ; donc z est toujours croissante, et, comme elle part de $-\infty$ pour aller à $+\infty$, elle s'annule une fois et passe du négatif au positif. Tout est vérifié, et la courbe a une forme analogue à celle qui est figurée (C).

Le minimum peut être au-dessus, au-dessous de la droite D($y = x + 2$) ou sur cette droite. La suite nous montrera les divers cas qui se présentent.

2. Le x du minimum est racine de l'équation $z = 0$ ou

$$x^2 - (\mathrm{C} + 1) + \mathrm{L}x = 0.$$

Le lieu du minimum s'obtient en éliminant C entre cette équation et celle qui donne y ; nous avons d'abord

$$\mathrm{C} - \mathrm{L}x = x^2 - 1,$$

puis
$$y = x + 2 + \frac{x^2 - 1}{x} = 2x + 2 - \frac{1}{x}.$$

Le lieu est une hyperbole qui a pour asymptotes $x = 0$ et $y = 2x + 2$. Ce lieu s'obtient d'ailleurs plus simplement en faisant $y' = 0$ dans l'équation différentielle. Nous avons placé sur la figure la branche de droite, (H), de cette hyperbole et son asymptote Δ. Elle coupe la droite D au point d'abscisse 1 et rien n'est plus simple que de suivre dès lors le déplacement du minimum.

Il nous reste ensuite à voir comment varie C en fonction de l'abscisse.

Or, nous avons
$$C = x^2 - 1 + Lx,$$
$$\frac{dC}{dx} = 2x + \frac{1}{x};$$

comme cette quantité est positive, C croît avec x; donc quand le minimum descend sur la branche H, C diminue. Pour $x = 1$, C est nul; la constante est donc positive quand le minimum est au-dessus de D, et négative au-dessous. Donc, quand le minimum atteint le point C, c'est-à-dire l'axe des x, la constante C est négative. Or, le x du point C est donné par l'équation
$$2x^2 + 2x - 1 = 0;$$
il a pour valeur
$$x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2},$$
et la valeur correspondante de C est
$$C_0 = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{4} - 1 + L\frac{\sqrt{3} - 1}{2},$$
$$C_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + L\frac{\sqrt{3} - 1}{2};$$
c'est une somme de deux quantités négatives.

Quand $C > C_0$, les racines de l'équation $y = 0$ sont imaginaires; quand $C < C_0$, il y a deux racines réelles, et, quand $C = C_0$, deux racines confondues.

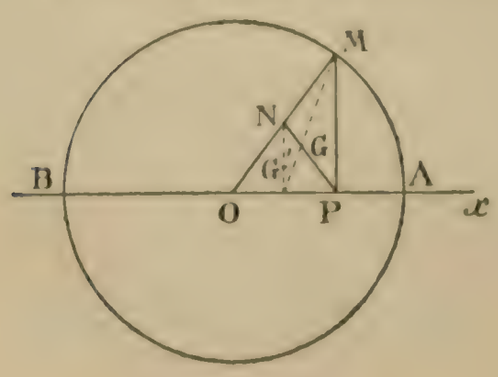
Bonnes solutions : MM. L. Naucelle, à La Châtre ; L. Simon, à Fourmies ; E. Rouge, à Quéant ; E. Dion, école normale de Saint-Cloud ; R. Dufour, à Nancy ; M. Roi ; A. Berlande, à Saint-Cloud ; M. Roux, au Creusot ; G. Lach, à Denain ; J. Chaize.

Assez bonnes solutions : MM. L. Geoffroy, à Péronne ; Dolle, lycée Saint-Louis ; A. Rousseau, à Fourmes-en-Weppes ; Fritz, à Bourges.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2212. — *D'un point* M *variable sur un cercle de centre* O, *on abaisse une perpendiculaire* MP *sur un diamètre fixe* AB *du cercle. Soit* N *le milieu de* OM. *Montrer que les lieux des centres de gravité,* G *et* G', *des deux triangles* OMP *et* ONP *sont deux ellipses.*

Démontrer que la médiane issue de M *est normale à l'ellipse lieu de* G. *Lieu du point de concours des normales à ces ellipses en* G *et* G'.



Soit φ l'angle de OM avec Ox; les coordonnées du point M sont $R\cos\varphi$, $R\sin\varphi$; celles du point P, $R\cos\varphi$ et 0; celles du point O, 0 et 0. Par conséquent, les coordonnées du point G sont
$$x = \frac{2R\cos\varphi}{3}, \qquad y = \frac{R\sin\varphi}{3}.$$

Le lieu de ce point est donc l'ellipse $\frac{9x^2}{4} + 9y^2 = R^2$.

Les coordonnées du point N sont $\frac{R\cos\varphi}{2}$, $\frac{R\sin\varphi}{2}$. Celles du point G′ sont donc

$$x = \frac{\frac{R\cos\varphi}{2} + R\cos\varphi}{3} = \frac{R\cos\varphi}{2}, \qquad y = \frac{R\sin\varphi}{6}.$$

Le lieu de ce point est donc l'ellipse

$$4x^2 + 36y^2 = R^2.$$

Les normales aux deux courbes en fonction de φ sont

$$-\left(x - \frac{2R\cos\varphi}{3}\right) 2\sin\varphi + \left(y - \frac{R\sin\varphi}{3}\right)\cos\varphi = 0$$

$$-\left(x - \frac{R\cos\varphi}{2}\right) 3\sin\varphi + \left(y - \frac{R\sin\varphi}{6}\right)\cos\varphi = 0.$$

La première passe visiblement au point M.

Pour avoir le lieu du point de rencontre de ces deux droites, cherchons d'abord les coordonnées de ce point. A cet effet, retranchons les deux équations l'une de l'autre; nous aurons

$$x\sin\varphi = \frac{2R\sin\varphi\cos\varphi}{6}, \qquad x = \frac{R\cos\varphi}{3};$$

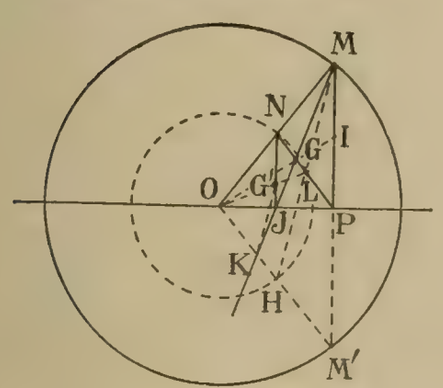
puis, $y = -\frac{R\sin\varphi}{3}$.

Le lieu de ce point est donc un cercle, le cercle

$$x^2 + y^2 = \frac{R^2}{9}.$$

Bonnes solutions : MM. E.-N. Barisien; G. Hèle, à Lille; Topin, à Grandvilliers; R. Picard; Grandemange, à Montmédy; P. Bessot, lycée de Toulouse; A. Berlande, à Saint-Cloud; R. Harmégnies; Mlles Barbillon, à Nancy; Hérel, à Lille; M. Gironnet, lycée Saint-Louis; Deperrois, à Évreux.

Solution géométrique. — Le milieu I de MP décrit une ellipse, projection du cercle donné, dont le plan aurait tourné de 60° autour du diamètre fixe.



Le point G décrit l'homothétique de cette ellipse par rapport à O, et dans le rapport d'homothétie $\frac{2}{3}$.

Le point N décrit un cercle.

Le point G′, qui se déduit de N en prenant le $\frac{1}{3}$ des ordonnées, décrit une ellipse.

La droite NP a une longueur constante $\frac{R}{2}$. Quand elle se déplace, les normales aux différentes courbes que décrivent chacun de ses points sont concourantes au centre instantané de rotation. Or, les extrémités N et P décrivent l'une un cercle, l'autre une droite, et les normales en N et P à ces lieux concourent au point M. Il s'ensuit que la médiane MJ issue de M dans le triangle OMP est normale à l'ellipse lieu de G. Cette normale coupe le rayon OM′ symétrique de OM en un point K tel que $OK = \frac{OM'}{3}$. (Les droites OK et GP étant parallèles, et J le milieu de OP, les triangles JOK et PJG sont égaux, donc

$$OK = PG = \frac{2}{3}PN = \frac{1}{3}OM\Big).$$

Démontrons que la normale en G′ à l'ellipse lieu de G′ passe également en K. Le point L, milieu de NP, décrit une ellipse homothétique, et les normales à ces deux ellipses, lieu de G′ et lieu de L sont

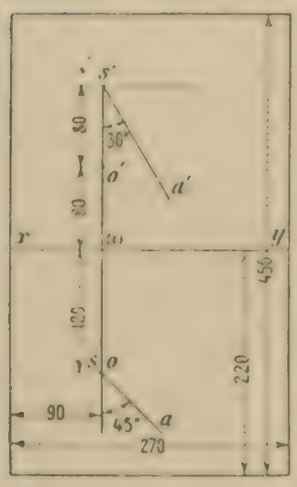
toujours parallèles. Or, la normale à l'ellipse lieu de L est la droite ML, puisqu'elle doit passer par le centre instantané de rotation. Cette droite ML coupe le rayon OM parallèle à NP en son milieu H. Dans le triangle OLH la parallèle menée par G' à la base LH partage le côté OH dans le rapport $\frac{2}{3}$, donc passe au point K. Dès lors ce point K est le point de concours des normales aux deux ellipses, et son lieu est un cercle concentrique au cercle donné et de rayon trois fois plus petit.

(M. JOLLY, à Honfleur, et Henri LATIL, élève à l'école Sainte-Geneviève.)

Bonnes solutions : MM. Marescalchi; E. Gautier; H. Lecouffe; L. Simon, à Fourmies; G. Lach, à Douai; Henriot, à Nancy; Alexandre, à Lyon; M. Roux, Le Creusot; Desfond; Charcles, à Clermont-Ferrand; E. Dion, à Saint-Cloud; P. Ducoudray, à Toulouse; J. Chaize; H. Mennessier.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

2278. — Sphère entaillée par un cône. — *Cadre* $\frac{450^{mm}}{270}$. *Placer la ligne de terre xy, parallèlement aux petits côtés du cadre et à 220mm du côté inférieur.*



On considère :

1° Une sphère de 80mm de rayon reposant sur le plan horizontal; son centre (o, o') est dans le premier dièdre à 120mm en avant du plan vertical; la ligne de rappel oo' est à 90mm du grand côté gauche du cadre;

2° Un cône de révolution ayant son sommet (s, s') au point le plus élevé de la sphère, et pour axe la droite (sa, s'a') telle que sa fait un angle de 45° avec la ligne de rappel oo' et s'a' un angle de 30° avec la même droite.

Ce cône est tangent au plan horizontal qui passe par le point (s, s').

Après avoir déterminé la ligne commune aux deux surfaces, sphérique et conique, on représentera les projections de la partie de la sphère extérieure au cône.

Dans la mise à l'encre on indiquera les constructions d'un point quelconque de l'intersection, de la tangente en ce point, ainsi que les constructions des points et droites remarquables.

Titre extérieur : Géométrie descriptive. Titre intérieur : Sphère entaillée par un cône.

Nota. — *Couper la feuille, extérieurement au cadre, de manière à laisser une marge de 25 à 30mm.*

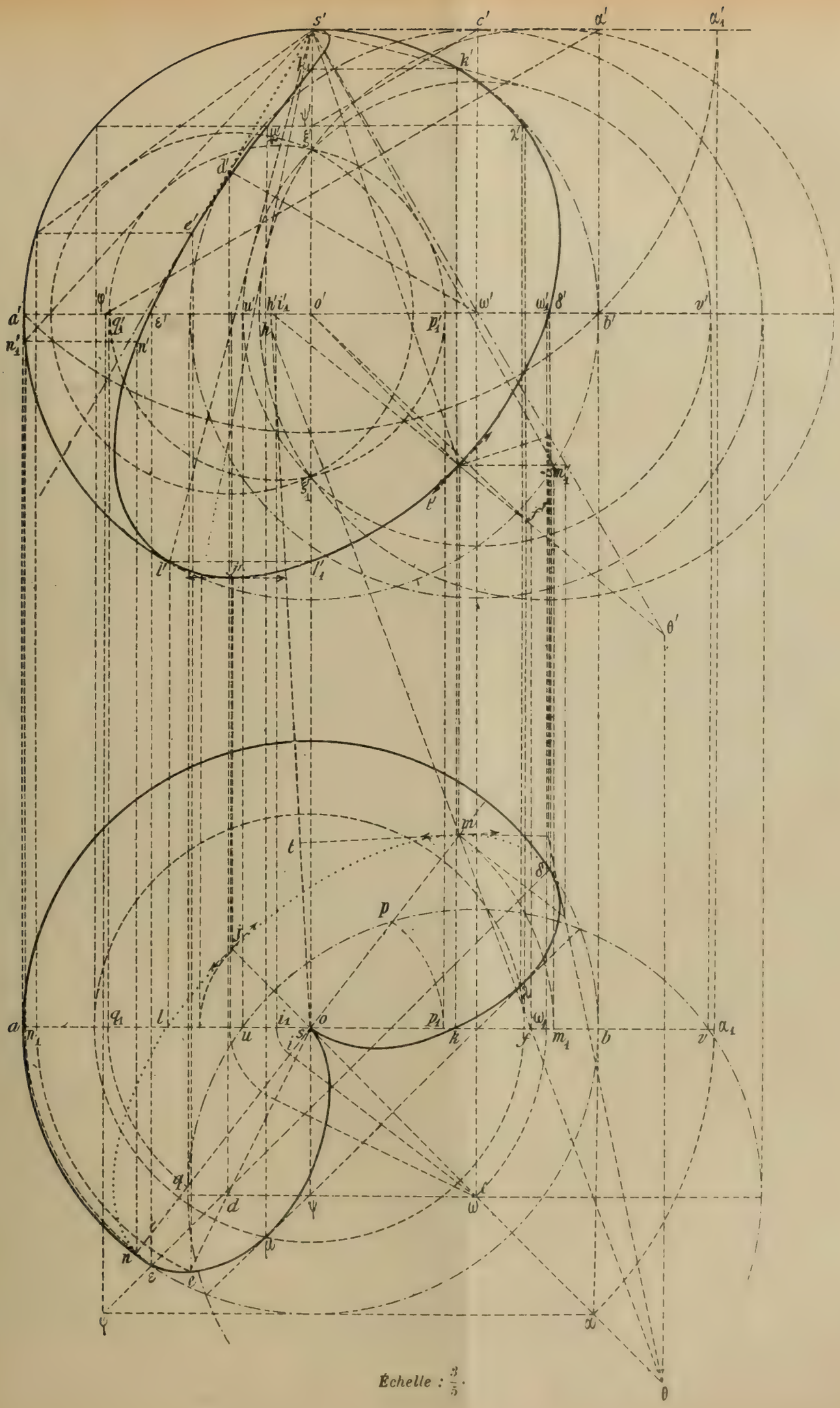
(*École Centrale*, 1914.)

Le plan tangent au point le plus haut de la sphère étant aussi tangent au cône, le contour apparent vertical de celui-ci se composera, en projection, de l'horizontale $s'c'$, et de sa symétrique $s'd'$ par rapport à la projection $s'\omega'$ de l'axe. Il n'y a pas de contour apparent horizontal, car la verticale du sommet est intérieure au cône. On verra plus loin qu'elle rencontre une sphère inscrite en des points qui nous seront utiles.

1. *Construction d'un point quelconque de l'intersection.* — On peut traiter l'intersection de la sphère et du cône comme celle de deux surfaces de révolution dont les axes sont situés dans un même plan vertical, incliné à 45° sur le plan vertical de projection. En le rendant frontal, on applique la méthode des sphères auxiliaires en procédant, par exemple, comme nous l'avons déjà fait à propos de la question 2254. Dans ce but, on n'aura qu'à effectuer une rotation provisoire de 45° autour de la verticale du centre (o, o') de la sphère, ou à prendre le plan des axes comme plan vertical auxiliaire. On fait ensuite retour au système primitif.

Nous allons profiter de ce que le sommet S du cône est situé sur la verticale du centre de la sphère, pour employer une autre méthode qui s'en trouvera simplifiée. Nous couperons par un plan variable (Π) passant par la verticale OS; il donnera dans la sphère un grand cercle, et dans le cône deux droites. La rotation autour de OS, qui amènera ce plan à être frontal, fera coïncider le cercle avec le contour apparent vertical de la sphère, ce qui n'exigera aucun tracé. Tout reviendra à déterminer les positions des génératrices du cône. Les points communs à ces droites et au cercle seront ensuite ramenés dans le plan initial.

Nous effectuerons nos diverses constructions sur le cône (S) au moyen d'une sphère inscrite, et nous aurons tout intérêt à choisir son centre (ω, ω') sur l'axe de manière que sa cote soit égale à celle de (o, o'), et



Échelle : $\frac{3}{5}$.

que la sphère soit égale à la proposée. D'après le principe des surfaces circonscrites, le plan auxiliaire coupe le cône suivant les deux tangentes menées de S au petit cercle déterminé dans la sphère Ω.

Menons donc par o, dans le plan horizontal, une droite arbitraire qui sera la trace d'un plan (H). Les points p et q où elle rencontre le cercle de contour apparent ω sont les projections des extrémités du diamètre horizontal du cercle déterminé dans la sphère inscrite. Par une rotation autour de la verticale de s, s' nous amènerons ce diamètre dans la position frontale $(p_1q_1, p_1'q_1')$, et les tangentes menées de s' au cercle de diamètre $p_1'q_1'$ donneront les génératrices du cône déplacées. Leurs points de rencontre m_1', n_1' avec le grand cercle (o') se rappelleront en m_1 et n_1 sur le diamètre frontal ab du cercle (o), et la rotation inverse les ramènera à leurs véritables positions (m, m'), (n, n').

Il est essentiel de remarquer que tous les cercles (p_1q_1) passent par deux points fixes ξ', ξ_1 qui sont les projections verticales des points où la verticale de S perce la sphère Ω. Ces deux points, qui sont communs à tous les cercles que nous considérons dans les plans (H), restent fixes dans les rotations correspondantes. Il sera bon de les construire *a priori*, par exemple en coupant par le plan frontal de S, qui sera d'ailleurs un plan auxiliaire remarquable de notre série. Chacun des cercles du faisceau sera alors suffisamment déterminé par son centre i_1', déduit par une rotation du milieu i de la corde pq.

Tangente en un point (m, m') de la courbe. — Nous appliquerons la méthode du plan normal. Les normales aux deux surfaces sont : 1° le rayon $(om, o'm')$ de la sphère, 2° la droite $(m\theta, m'\theta')$ qui aboutit au point de rencontre (θ, θ') de l'axe du cône et du plan perpendiculaire en (m, m') à la génératrice de ce point. En coupant par le plan horizontal et le plan frontal de (o, o'), nous obtenons l'horizontale $(oh, o'h')$ et la frontale $(of, o'f')$ du plan normal. Les projections mt, $m't'$ de la tangente de l'espace sont respectivement perpendiculaires à oh, et $o'f'$.

III. *Points remarquables.* — 1° Points situés sur les génératrices de contour apparent vertical du cône. — Ces génératrices sont tangentes à la sphère inscrite aux points (c, c') et (d, d'), le premier étant le point le plus haut de la sphère (ω, ω'). La première droite ne fournit que le point (s, s'), qui est un rebroussement de l'intersection, puisque la sphère et le cône y admettent le même plan tangent. La génératrice $(sd, s'd')$ donne ensuite le point (e, e').

2° Points situés sur le contour apparent vertical de la sphère[1]. — Le plan frontal de (o, o') est le plan (H) particulier auquel nous avons déjà fait allusion, et qui détermine dans la sphère Ω le cercle $(uv, u'v')$ projeté verticalement en vraie grandeur. Les tangentes menées de s' coupent directement le cercle (o') aux points k' et l', rappelés en k et l sur ab.

Remarquons que, dans la symétrie par rapport au plan vertical mené par l'axe du cône, aux points (k, k'), (l, l') correspondent deux points de mêmes cotes, situés dans le plan de profil de (o, o') et dont les projections verticales k_1, l_1, sont les points, autres que s', où la projection de la courbe rencontre la ligne de rappel oo'.

3° Points situés sur le contour apparent horizontal de la sphère. — Le cercle de contour apparent horizontal appartient à une sphère de sommet (s, s') qui coupe la nappe utile du cône suivant un cercle rencontrant le précédent en deux points (δ, δ'), $(\varepsilon, \varepsilon')$. Pour les obtenir, il suffit de construire la trace $\delta\varepsilon$ du plan du second cercle sur le plan horizontal $a'b'$. Sa direction est perpendiculaire à $o\omega$, et on en détermine un point φ à l'aide de la frontale $(\alpha\varphi, \alpha'\varphi')$ du point (α, α') où la sphère auxiliaire rencontre la génératrice horizontale du cône. On remarque que le point α est sur la ligne de rappel bb'.

4° Point le plus bas. — C'est le point (j, j') fourni par le plan de symétrie vertical $o\omega$.

5° Points situés sur la bitangente de la projection horizontale. — La sphère (ω, ω') a en commun avec le cône un cercle double, et avec la sphère (o, o') un autre cercle bitangent à la courbe aux points où il rencontre le premier. Ce dernier cercle, situé dans le plan radical des deux sphères, est vertical, et projeté suivant l'axe radical des grands cercles (o) et (ω), qui est ainsi bitangent en λ et μ à la projection horizontale de la courbe. Pour avoir les points de contact, nous construirons l'horizontale qui les joint dans l'espace, et qui est l'intersection des plans des deux cercles. Elle est déterminée par le point (ψ, ψ') fourni par la frontale du point (c, c') perpendiculaire à l'axe du cône. Le plan horizontal de ce point coupe la sphère (o, o') suivant un cercle dont la projection horizontale va passer par λ et μ.

Pour le tracé définitif, on voit immédiatement que les portions $\delta b\varepsilon$, $h'b'l'$ des contours apparents de la sphère doivent être enlevées. La courbe est vue tout entière en projection verticale; en projection horizontale, l'arc $\delta j\varepsilon$ est caché. Enfin, sur la projection verticale, on a à figurer en pointillé la partie sc' du contour apparent du cône, qui s'imprime en creux dans la sphère.

Assez bonne épure de M. Mazel, à Alger. J. L.

[1] Le lecteur rétablira sans peine, sur la projection verticale, l'arc de courbe omis par le dessinateur entre les points s' et k', et qui diffère très peu du contour apparent de la sphère.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1919)

ÉCOLE CENTRALE (*Suite*)

9851. — Coniques passant par les extrémités de deux diamètres conjugués d'une ellipse.

9852. — Déterminer une conique ayant ses axes sur Ox et Oy, connaissant la polaire Δ d'un point donné P.

9853. — Déterminer une conique connaissant un axe, un sommet sur cet axe, et la polaire Δ d'un point donné P.

9854. — Équation des hyperboles ayant pour asymptote une droite donnée (Ox) et admettant pour polaire d'un point P (x_0, y_0) une droite donnée Δ.

9855. — On donne deux points : A sur Ox, B sur Oy et une droite OD; équation générale des hyperboles passant par A et B et admettant OD comme direction asymptotique.

9856. — Former l'équation de l'hyperbole équilatère passant par les extrémités de deux diamètres conjugués d'une ellipse.

9857. — Équation de la parabole ayant Ox pour axe et qui passe par deux points donnés A et B.

9858. — Équation des paraboles d'axe Ox et pour lesquelles deux points donnés P et Q sont conjugués.

9859. — Les plans perpendiculaires aux arêtes d'un tétraèdre en leurs milieux se coupent suivant quatre droites concourantes.

9860. — Distance d'un point à une droite parallèle au plan des xy.

9861. — Condition pour qu'un plan fasse des angles égaux avec deux droites données. Interprétation géométrique. Mener par un point de l'espace M (a, b, c) un plan faisant avec trois droites de l'espace des angles égaux; nombre de solutions.

9862. — On donne trois axes rectangulaires et un point M (a, b, c). Équations de la droite symétrique de Oz par rapport à OM.

9863. — Soient M (x, y, z) un point de l'espace; A, B, C, ses projections sur les trois axes (rectangulaires). On trace le cercle circonscrit au triangle ABC; lieu du point M pour que ce cercle passe par un point fixe I (x_0, y_0, z_0).

9864. — Un point M (a, b, c) a pour projections sur les plans de coordonnées (rectangulaires) les trois points P, Q, R: coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle PQR.

9865. — Équation générale des sphères tangentes à Oz en O, et tangentes à une droite donnée Δ parallèle à Ox ($y = b$, $z = c$). Lieu des centres de ces sphères.

9866. — Équation du cylindre ayant pour directrice la courbe

$$x^2 + y^2 - 2pz = 0, \qquad y = mx,$$

et dont les génératrices sont parallèles à la droite $x = y = z$.

9867. — Équation du cône de sommet S (a, b, c) et ayant pour directrice la courbe $x^2 - y^2 - 2z = 0$, $x = h$.

9868. — On donne le cône $z^2 = 2xy$; lieu des perpendiculaires menées de l'origine sur les plans tangents à ce cône.

9869. — On donne une parabole $y^2 - 2px = 0$ dans le plan des xy et un point S sur l'axe Oz. Équation du cône engendré par les perpendiculaires abaissées de S sur les tangentes à la parabole.

9870. — Équation d'un cône de sommet O et s'appuyant sur la courbe d'intersection de deux quadriques ayant même plan polaire de ce point O.

9871. — Équation d'une surface de révolution autour de Oz; équation de la normale en un point M; montrer qu'elle rencontre l'axe et que le point de rencontre reste fixe quand M se déplace sur un parallèle.

9872. — Équation du cylindre de révolution ayant pour axe la droite

$$5x - y - z - 2 = 0, \qquad x - 2y + z - 1 = 0$$

et passant par l'origine.

9873. — Équation de la surface engendrée par la courbe d'équations

$$z = mx, \qquad (x - a)^2 + y^2 = R^2,$$

en tournant autour de Oz.

9874. — On donne la courbe $x = \frac{1}{t-a}$, $y = \frac{1}{t-b}$, $z = \frac{1}{t-c}$; équation du cône ayant pour sommet l'origine et cette courbe pour directrice.

9875. — On considère la courbe $y = x^2$, $z = x^3$; équation de la surface engendrée par les normales horizontales à cette courbe.

9876. — Mener par un point (a, b, c) les normales à la courbe

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad z = \operatorname{tg} t.$$

9877. — Lieu des points dont la somme des carrés des distances à deux droites fixes est constante.

9878. — Lieu des points de l'espace dont le rapport des distances au point O et à une droite D ($x = a$, $y = 0$) est constant.

9879. — Lieu des droites passant par un point donné S et équidistantes de deux points donnés A et B.

9880. — On considère trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, et un point M (a, b, c). Dans le plan MOz, on trace la droite OL, symétrique de Oz par rapport à OM; OL rencontre en P la perpendiculaire MH à Oz. Lieu de P lorsque M décrit une droite parallèle à Ox.

9881. — On donne trois axes rectangulaires et un point A sur Ox, par lequel on a mené Az parallèle à Oz; une droite Δ s'appuie sur Oy et sur Az', elle fait un angle de 45° avec Az'; équation de la surface engendrée par cette droite Δ.

9882. — On donne trois axes rectangulaires et un point B sur Oy, par lequel on a mené Bx parallèle à Ox; une droite Δ s'appuie sur Oz et sur Bx'; elle coupe Oz sous un angle de 45°; équation de la surface engendrée par cette droite Δ.

9883. — On donne trois axes rectangulaires et dans le plan des xy une circonférence tangente à Oy; équation de la surface engendrée par une droite PQ qui rencontre Oz en P et coupe en Q la circonférence sous un angle de 45°.

9884. — On donne les trois droites $A \begin{cases} y = b, \\ z = -c; \end{cases}$ $B \begin{cases} z = c, \\ x = a; \end{cases}$ $C \begin{cases} x = a, \\ y = -b; \end{cases}$

équation de la surface engendrée par une droite Δ s'appuyant sur les trois droites A, B, C.

9885. — Diamètres dans l'ellipsoïde rapporté à ses axes.

9886. — Un ellipsoïde est coupé par une droite Δ; mener par la droite un plan tel que Δ soit un diamètre de la section.

9887. — Mener par une droite Δ un plan tel que cette droite soit normale à la section déterminée par ce plan dans un ellipsoïde.

9888. — Placer sur l'hyperboloïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ une circonférence de rayon donné R.

9889. — Trouver les génératrices parallèles des deux surfaces

$$3x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0, \qquad x^2 - y^2 - 2z = 0.$$

9890. — Trouver sur l'hyperboloïde $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ les génératrices parallèles au plan $y = x$.

9891. — Démontrer qu'une section plane d'un paraboloïde de révolution se projette suivant un cercle sur un plan perpendiculaire à l'axe. Lieu du centre de la section quand le rayon de la projection reste constante.

9892. — Équation générale des paraboloïdes ayant deux plans principaux donnés (xOz, yOz, rectangulaires) et un plan de sections circulaires donné. Conditions de possibilité.

9893. — Équation générale des paraboloïdes elliptiques passant par un cercle donné.

9894. — Former l'équation d'un paraboloïde admettant pour plans principaux deux plans rectangulaires P et Q donnés (xOz, yOz), tangents à un plan R et passant par deux points A et B.

9895. — Mener à un paraboloïde elliptique une normale par un point donné.

9896. — Soit un point fixe A sur la surface $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0$; lieu des sommets des paraboles tracées sur cette surface et qui passent par le point A.

9897. — Équation d'un paraboloïde hyperbolique ayant deux plans principaux donnés et passant par une droite donnée.

Mécanique (M. Tresse).

9898. — Sur un axe Ox, on considère les deux points A et M, tels que l'on ait $OA = 4 \sin t$, $AM = t^2$; étudier le mouvement du point M.

9899. — Soient deux points A et B sur une horizontale; position d'équilibre d'un point matériel pesant M dont le poids est 5^{kg}, soumis à deux forces attractives émanant de A et de B et respectivement égales à 4^{kg} et 3^{kg}.

9900. — On donne deux points O et O'; un point M pesant est attiré par le point O suivant une force $(MF) = (MO)$ et repoussé par le point O' suivant une force $(MF') = 2(O'M)$; position d'équilibre de M.

9901. — On donne une parabole dans un plan incliné à 45° sur le plan horizontal, la tangente au sommet étant horizontale; un point pesant est placé sur la parabole, le coefficient de frottement est égal à f; équilibre.

9902. — On donne un vecteur AF et une droite Δ. En un point O de Δ on construit le vecteur $(OG) = (M'_0AF)$; lieu de l'extrémité G de ce vecteur quand le point O décrit la droite Δ.

9903. — On donne une droite Δ et deux points O et A; lieu de l'extrémité du moment par rapport à O d'une force AF dont l'extrémité F décrit Δ.

9904. — On considère une force AF dont l'origine A est située sur Ox ($OA = 4^m$); le moment de F par rapport au point O égale 10^{kgm}; lieu de l'extrémité de F.

9905. — Placer dans un plan P une force F de 15^{kg} dont le moment par rapport à un axe Δ parallèle à P et à une distance donnée de P ait une valeur donnée.

9906. — On considère un cube pesant de poids $P = 1^{kg}$; les faces ABCD, A'B'C'D' sont horizontales; placer dans le plan de la face supérieure une force d'intensité 20^{kg} et dont le moment par rapport à AB soit égal à celui de P.

9907. — On considère deux axes qui se coupent Ox, Oy. Démontrer que toutes les forces qui ont un moment constant A par rapport à Ox, et un moment constant B par rapport à Oy, s'appuient sur une droite fixe.

9908. — Δ est un axe parallèle à Ox, situé dans le plan des xy; on donne $M^t_\Delta F = A$ et $M^t_{Oz} F = C$. Placer la force F dans l'espace.

9909. — On donne une force OF; on prend le moment SG de cette force par rapport à un point S variable sur la courbe $z = h$, $y^2 = 2px$; lieu de l'extrémité du vecteur SG.

9910. — On donne trois axes rectangulaires et un point fixe A sur Ox; une force d'origine A a son extrémité M qui décrit une courbe $x = f(z)$, $y = g(z)$. Lieu de l'extrémité du moment de cette force par rapport au point O.

9911. — On a un triangle équilatéral ABC de centre O, situé dans le plan horizontal de cote 0; on prend dans le plan horizontal de cote 2 les points A', B', C' qui ont pour projections sur le premier A, B et C. On considère les trois forces AB', BC', CA'. Trouver leur résultante générale et leur moment résultant par rapport au point O.

9912. — On considère trois axes rectangulaires $Oxyz$; sur Ox deux points A et A', sur Oy deux points B et B' qui sont les quatre sommets d'un carré (de centre O); par A, B, A', B' on mène quatre forces : celle qui est appliquée en A est parallèle à la bissectrice de l'angle yOz; les autres s'en déduisent par des rotations de 90° autour de Oz. Trouver la résultante générale et le moment résultant de ce système par rapport au point O.

9913. — On prend sur l'arête d'un dièdre $\widehat{PQ}$ deux points A et B distants de 2^m; au point A est appliquée une force AF_1 [illegible] ée dans le plan P et telle que $\widehat{BAF_1} = 45°$; au point B, une force $BF_2 = 1^{kg}$ située dans le plan Q et telle que $\widehat{ABF_2} = 45°$. Résultante générale et moment résultant du système.

9914. — On donne une force F dont l'origine a pour coordonnées a, b, c et les composantes sont A, B, C; trouver un système de trois forces équivalent à la force F, la première force ayant son point d'application en O, la seconde étant parallèle à Oz et la troisième étant portée par la droite $x = y = z$.

9915. — Trouver un système de trois forces équivalent à une force donnée F et remplissant les conditions suivantes : l'une est appliquée en O, l'autre est parallèle à Oz et la troisième est parallèle au plan xOy.

9916. — Un système de forces a été réduit à trois forces P, Q, R appliquées en trois points donnés A, B, C; en déduire toutes les réductions possibles en trois forces appliquées en ces mêmes points A, B, C.

9917. — Remplacer un système de deux forces AP, BQ par un système équivalent composé de deux forces A'P', B'Q' respectivement parallèles aux premières.

9918. — On donne un système de forces par sa résultante générale OR et son moment résultant OG, par rapport au point O; le remplacer par un système équivalent formé de trois forces situées respectivement dans les plans $y + z = 0$, $z + x = 0$, $x + y = 0$.

9919. — Étant donné un système de forces par sa résultante générale OR et son moment résultant OG, par rapport au point O, le remplacer par un système équivalent formé d'un couple dans le plan xOy et d'une force.

9920. — On donne deux forces, l'une F_1 dans le plan xOy et parallèle à la première bissectrice, l'autre F_2 dans le plan xOz et parallèle à la seconde bissectrice; les points d'application sont les deux points A et A' sur Ox et symétriques l'un de l'autre par rapport à l'origine. Remplacer ce système par un système équivalent composé de deux forces l'une P dans le plan xOy, l'autre Q dans le plan xOz.

9921. — On donne un dièdre $\widehat{PQ}$; deux forces de 1^{kg} appliquées respectivement aux points A et B de l'arête et situées dans les faces font avec l'arête AB les angles $\widehat{BAF_1} = \widehat{ABF_2} = 45°$. Trouver tous les systèmes équivalents formés de deux forces égales, ayant également pour origines les points A et B et situées dans les faces P et Q du dièdre.

9922. — Réduire un système de forces à deux dont l'une soit appliquée en un point donné.

9923. — Réduire un système de forces à deux, dont l'une soit portée par une droite donnée.

9924. — On donne un système de forces caractérisé par sa résultante générale OR et son moment résultant OG; peut-on réduire ce système à deux forces, l'une appliquée en O, l'autre parallèle à Oz? Dans le cas où cela est possible, combien de solutions?

9925. — Remplacer un système de forces (X, Y, Z, L, M, N) par deux forces, l'une appliquée en un point donné de Oz, l'autre située dans le plan des xy.

9926. — Un système de forces est caractérisé par sa résultante générale R $(a, 0, a)$ et son moment résultant G placé suivant Oz. Réduire ce système à deux forces, l'une située dans le plan $x + y + z = 0$, l'autre appliquée en un point B de Oy.

9927. — On donne la résultante générale OR (1, 0, 1) et le moment résultant OG (0, 0, 2) d'un système de forces. Trouver un système de deux forces, l'une appliquée en O, l'autre d'intensité 2, équivalent au système proposé.

9928. — Réduire un système de forces à deux, l'une parallèle à xOy, l'autre tangente à la courbe $x = z^2$, $y = \frac{2z^3}{3}$.

9929. — Un système de forces est réductible à une force $OF = 1^{kg}$ placée sur Oz et à un couple dans le plan xOy, d'axe égal à 1^{kgm}. Le remplacer par un système équivalent formé de deux forces d'égale intensité, dont l'une appliquée en O.

9930. — Peut-on réduire un système de forces à deux forces appliquées en deux points donnés O et O'? Condition de possibilité. Appliquer à l'exemple suivant : le système donné est composé de deux forces, l'une AP égale à 1^{kg}, parallèle à Ox et appliquée au point A (1, 1, 1), l'autre BQ, égale à 1^{kg}, parallèle à Oy et appliquée au point B (—1, —1, —1). On prendra O' sur Oz (0, 0, h).

9931. — On donne un cube et des forces parallèles appliquées aux sommets. Trouver le centre des forces parallèles.

9932. — Étant donné un triangle ABC de côtés 4, 5, 6, on place suivant les côtés trois forces représentées respectivement par AB, BC, CA; placer sur les côtés du triangle ayant pour sommets les milieux des côtés du premier trois forces telles qu'il y ait équilibre.

9933. — On a dans un même plan deux triangles ABC, A'B'C' et l'on considère les forces AB, BC, CA, A'B', B'C', C'A' : condition d'équilibre du système formé par ces six forces.

9934. — Un tétraèdre SABC est soumis à l'action de trois forces AB, BC et CA; on demande d'équilibrer ce système par trois autres forces portées respectivement par les côtés du triangle A'B'C', obtenu en coupant le tétraèdre par un plan parallèle à la base.

9935. — Un cube, ayant deux faces horizontales ABCD, A'B'C'D', est soumis à son poids, égal à sa diagonale, et à une force représentée par l'une des diagonales de sa face supérieure, soit B'D'; en supposant le sommet A fixe, placer dans la face inférieure une force maintenant ce cube en équilibre.

(A suivre.)

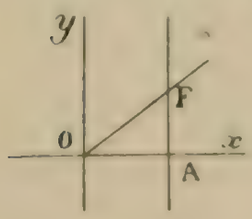
SUJETS DE CONCOURS

ÉCOLE CENTRALE

Concours de 1917.

Géométrie analytique.

2357. — Soient Ox et Oy deux axes de coordonnées rectangulaires et AB la droite dont l'équation, par rapport à ces axes, est $x - a = 0$, a étant une longueur positive donnée. A chaque point F de cette droite correspond une parabole (P) ayant pour foyer F, pour axe principal la droite OF et tangente à l'axe Ox.



On demande de trouver, de reconnaître et de construire, le point F décrivant AB.

1° le lieu du sommet S de (P);

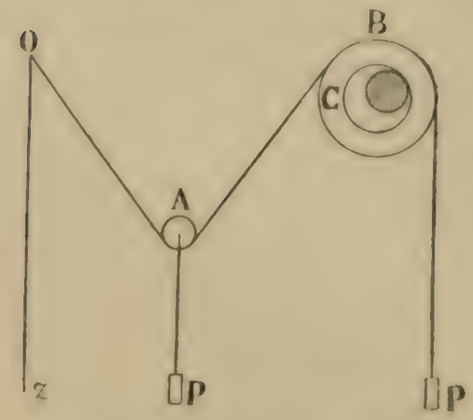
2° le lieu du point Q, pied de la directrice de (P) sur son axe OF;

3° l'enveloppe de la directrice de (P).

Nota. — Les considérations géométriques seront appréciées.

Mécanique.

2358. — Dans un plan vertical V pris pour plan de la figure, on considère un point fixe O et deux poulies circulaires non déformables : l'une A mobile, l'autre B fixe, c'est-à-dire soutenue par une tige cylindrique C invariable de forme et de position et dont les génératrices rectilignes sont perpendiculaires à V. Le rayon de la poulie B est le triple de celui de son œil, de même centre et circulaire, et la section droite de la tige cylindrique C par V est un cercle de rayon quelconque moindre que celui de l'œil.



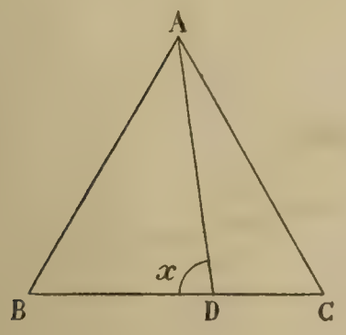
Un cordon flexible, de résistance illimitée et d'épaisseur négligeable, est attaché au point fixe O; il soutient la poulie A, passe sur la poulie B et supporte un poids tenseur P. Au centre de la poulie A est suspendue une charge égale aussi à P. On admettra qu'il n'y a pas de frottement du cordon sur la poulie A et que ce cordon ne peut pas glisser sur la poulie B. On ne tiendra pas compte des poids des poulies et du cordon.

1° Dans l'hypothèse où il n'y a pas de frottement de la poulie B sur la tige C, calculer l'angle aigu α que fait le cordon avec la verticale Oz, lorsque l'appareil est en équilibre.

2° Dans l'hypothèse où il y a frottement, de coefficient égal à l'unité, de la poulie B sur la tige C, calculer à un millième près les cosinus des angles aigus α' et α'', valeurs de l'angle α qui correspondent aux positions d'équilibre limite de l'appareil, et, pour chacune de ces positions, calculer à un gramme près les réactions du point fixe O et de la tige fixe C, sachant que $P = 1\,750^g$.

Nota. — On suppose la distance de C à Oz assez grande, les rayons des poulies assez petits et la longueur totale du cordon assez grande pour assurer le libre jeu de l'appareil, tout au moins dans les limites qui comprennent les positions d'équilibre visées ci-dessus.

Trigonométrie.



2359. — Étant donné un triangle équilatéral ABC dont le côté est égal à l'unité de longueur, on considère un point variable D sur le côté BC entre B et C, et on désigne par x l'angle ADB.

1° Exprimer en fonction de x les distances du point A aux centres des cercles inscrits dans les deux triangles ADB et ADC, puis étudier les variations de la somme et du produit de ces deux distances quand on fait varier x.

2° Déterminer x de façon que la somme des rayons des cercles inscrits dans ces deux triangles ADB et ADC soit égale à une quantité donnée k. Discuter calculer le produit de ces deux rayons en fonction de leur somme k et trouver pour quelle valeur de k l'un des rayons est double de l'autre.

Calcul.

Calculer les angles A, B, C et les côtés a, b, c d'un triangle, sachant que

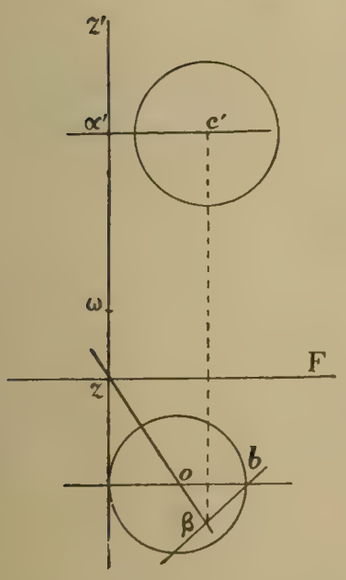
$$\cos A = \sqrt{\frac{21486}{84325}}, \quad \cos B = \sqrt{\frac{26264}{82643}}, \quad A + B + C = 2 \text{ droits},$$

$$a = \frac{48 + \sqrt{3}}{23 + \sqrt{2}}, \qquad \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

Géométrie descriptive.

2360. — Ni cadre, ni lettres, ni flèches. $z\omega\alpha' z'$ grand axe de la feuille, ω centre.

$$\omega z = 6^{cm}, \qquad \omega\alpha' = 9^{cm}, \qquad \widehat{Fzo} = 60^{\circ}, \qquad zo = 6^{cm}, \qquad ob = 3^{cm};$$



$b\beta$ est perpendiculaire sur zo et la ligne de rappel menée par β donne le point c'; ob et $\alpha' c'$ sont parallèles à zF.

La verticale zz' est l'axe d'une surface de révolution engendrée par la courbe d'intersection de deux cylindres de révolution de même rayon 3^{cm}. Le premier a pour axe la verticale du point o; le second a pour axe la ligne de bout du point c'.

On cherchera d'abord la méridienne située dans le plan de front zF et on représentera la surface supposée opaque. La courbe qui engendre la surface sera supposée existante sur cette surface opaque et l'on distinguera les parties vues et les parties cachées.

Nota. — Les résultats seuls seront à l'encre noire (le caché en points ronds). Les constructions seront faites à l'encre rouge (traits plutôt fins). On déterminera un point quelconque de la méridienne principale et la tangente en ce point, les points et les tangentes remarquables. Les tangentes trouvées seront à l'encre rouge, un peu accentuées aux environs des points de contact.

Physique.

I. — Le vernier.

II. — **2361.** On se propose de déterminer une valeur approchée de l'équivalent mécanique de la chaleur, en utilisant le dispositif suivant :

Un calorimètre cylindrique, contenant de l'eau et muni de palettes fixes, est mobile, sans frottement, autour de son axe; suivant ce même axe et à l'intérieur du calorimètre est disposé un arbre garni également de palettes et que l'on peut faire tourner à l'aide d'une énergie extérieure, sans que les deux systèmes de palettes puissent se toucher; l'eau transmet le mouvement de rotation de l'arbre au calorimètre qui est entraîné dans le même sens.

La vitesse constante de rotation de l'arbre est de mille tours à la minute; il faut exercer sur le calorimètre, pour l'empêcher de tourner, un couple de $1{,}24 \times 10^7$ unités C. G. S.

La température de l'eau monte de $0^{\circ},91$ par minute : la masse du calorimètre, de l'arbre et de leurs palettes est de 500^{g} ; la chaleur spécifique du métal qui les constitue est 0.1 ; la masse de l'eau (y compris le thermomètre réduit en eau) est de 2000^{g}.

1° Quelle valeur de l'équivalent mécanique de la calorie-gramme déduirait-on de cette expérience ?

2° Étant donné que l'élévation de température de $0^{\circ},91$ par minute résulte de la mesure de l'élévation totale de température pendant 5 minutes et que la seule cause d'erreur dont on tienne compte est celle qui résulte de l'emploi d'un thermomètre dont la lecture comporte une erreur absolue possible de $\frac{1}{50}$ de degré, à chaque pointé, on demande de calculer la valeur maximum de l'erreur relative possible sur l'évaluation de J.

Chimie.

I. — **2362**. Un composé gazeux, que nous désignerons par X, contenant du phosphore, du fluor, et peut-être un autre élément, a été étudié par Moissan qui a réalisé, entre autres, les opérations suivantes :

Pesée du gaz X. — Un ballon de 164^{cm3} contenait $0^{g},607$ de ce gaz, à la température 22° et à la pression $772^{mm},5$.

Dosage du fluor. — $80^{cm3},3$ du gaz X, chauffés avec du verre, ont fourni $60^{cm3},2$ de fluorure de silicium, dans les mêmes conditions de température et de pression.

Dosage du phosphore. — $124^{cm3},6$ du gaz X, dans les conditions normales de température et de pression, soumis à une série de traitements convenables, ont donné $0^{g},618$ de pyrophosphate de magnésium, contenant tout le phosphore du gaz traité.

On demande :

1° de montrer qu'il résulte, de ces trois opérations, que X ne contient pas, en quantité appréciable, d'autres corps que du phosphore et du fluor ;

2° d'établir la formule moléculaire du gaz X ;

3° d'imaginer les opérations chimiques successives qui pourraient, vraisemblablement, être utilisées pour le dosage du phosphore à l'état de pyrophosphate de magnésium, et de formuler les réactions correspondantes.

N. B. — Les erreurs des expériences sont telles que la précision de la règle à calcul, dont l'emploi est facultatif, est suffisante.

Chaque candidat reçoit un tableau des poids atomiques.

II. — Préparations de l'acide sulfurique et de l'anhydride sulfurique. Propriétés physiques de ces corps.

QUESTIONS PROPOSÉES

2363. — On considère la fonction

$$y = x^2 \mathrm{L}(1 + x) - x^2,$$

calculer les dérivées première, seconde et troisième. Étudier les variations de cette fonction.

Mêmes questions pour

$$y = \frac{\mathrm{L}(1 + x^2) - x^2 + \frac{x^4}{2}}{x^2},$$

$$y = x^2 \mathrm{L}\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x - \frac{1}{2}.$$

E. H.

2364. — Le centre d'une hyperbole équilatère et le pôle d'une corde AB de cette conique sont conjugués par rapport au cercle ayant pour diamètre AB.

R. Bouvaist.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

Coulommiers. — Imprimerie Paul BRODARD.

30e Année. Février 1920. N° 5.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

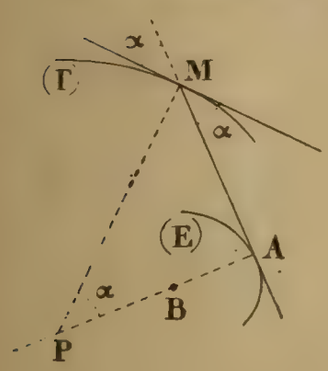
Note de la Rédaction. — Ne seront pas publiées les solutions des questions 2291, 2292, 2319, 2320, 2325, 2331.

PREMIÈRE PARTIE

ENVELOPPE DES DROITES OBTENUES EN FAISANT TOURNER D'UN ANGLE CONSTANT, α, LES TANGENTES A UNE COURBE PLANE AUTOUR DE LEURS POINTS DE CONTACT

Par M. **Jean Mourret**, élève de l'école normale supérieure.

Considérons une courbe (E), une tangente AM à cette courbe, et le point de rencontre M de cette droite avec une deuxième courbe (Γ). Appelons θ l'angle de la tangente AM avec Ox, θ', celui de la tangente à la courbe (Γ) avec Ox, x et y les coordonnées de A, X et Y celles de M, et l la valeur algébrique du vecteur AM. Nous aurons



$$X = x + l\cos\theta,$$
$$Y = y + l\sin\theta;$$

par suite,

$$dX = dx - l\sin\theta\, d\theta + dl\cos\theta,$$
$$dY = dy - l\cos\theta\, d\theta + dl\sin\theta.$$

Multiplions la première équation par $\cos\theta$, la seconde par $\sin\theta$ et ajoutons; multiplions ensuite par $-\sin\theta$ et $\cos\theta$, et ajoutons encore; nous aurons les deux équations nouvelles

$$dl = dX\cos\theta + dY\sin\theta - dx\cos\theta - dy\sin\theta,$$
$$l\,d\theta = -dX\sin\theta + dY\cos\theta + dx\sin\theta - dy\cos\theta;$$

comme $\cos\theta = \dfrac{dx}{ds}$, $\cos\theta' = \dfrac{dX}{ds'}, \ldots,$ ces equations s'écrivent

$$dl = ds'\cos(\theta' - \theta) - ds = ds'\cos\alpha - ds,$$
$$l\,d\theta = ds'\sin(\theta' - \theta) = ds'\sin\alpha,$$

ds et ds' désignant les éléments d'arc des deux courbes, aux points correspondants.

La deuxième nous montre que $\dfrac{ds'}{d\theta}$ est représenté par le vecteur MP, et la première nous donne alors

$$\frac{dl}{d\theta} = \mathrm{MP}\cos\alpha - \frac{ds}{d\theta}.$$

Or $\dfrac{ds}{d\theta}$ est le rayon de courbure de la courbe (E) au point A; soit AB ce rayon; nous pouvons écrire

$$\frac{dl}{d\theta} = \mathrm{AP} - \mathrm{AB} = \mathrm{BP}.$$

Ceci nous donne la variation infiniment petite du segment l, $dl = \mathrm{BP}\, d\theta$.

Remarquons en outre que, si α est constant, $d\theta' = d\theta$, et $\frac{ds'}{d\theta} = \frac{ds}{d\theta}$; MP est le rayon de courbure de la courbe (Γ), ρ' et $\mathrm{BP} = \rho' \cos\alpha - \rho$.

Partons maintenant de la courbe (Γ) et supposons qu'autour du point de contact, M, de la tangente, on fasse tourner celle-ci d'un angle donné, α, dans le sens inverse; le point de contact de cette nouvelle droite avec son enveloppe s'obtient en abaissant du centre de courbure, P, de (Γ) une perpendiculaire sur la droite.

Le rayon de courbure de cette enveloppe, (E), est AB; il est donné par

$$\rho = \mathrm{AP} - \mathrm{BP}.$$

Or,

$$\mathrm{AP} = \rho' \cos\alpha; \qquad \mathrm{BP} = \frac{dl}{d\theta} = \frac{d\rho' \sin\alpha}{d\theta}; \qquad \mathrm{BP} = \sin\alpha \frac{d\rho'}{d\theta};$$

par conséquent,

$$\rho = \rho' \cos\alpha - \sin^2\alpha \frac{d\rho'}{d\theta}. \qquad d\theta = d\theta'$$

1. Supposons que la courbe enveloppe soit un cercle et proposons-nous de trouver les trajectoires sous l'angle α de ces tangentes.

Remplaçons ρ' par R (constante), ρ' par ρ, θ par θ; ρ sera donné par une équation linéaire très simple :

$$\sin\alpha \frac{d\rho}{d\theta} - \rho \cos\alpha + \mathrm{R} = 0;$$

puis x et y par

$$dx = \rho \cos\theta\, d\theta, \qquad dy = \rho \sin\theta\, d\theta.$$

2. Voyons maintenant dans quels cas les courbes (Γ) et (E) sont égales. Les angles de contingence des deux courbes sont égaux; les deux valeurs de ds aussi; donc les rayons de courbure doivent être les mêmes, si les éléments égaux des deux courbes se correspondent en M et A. Le rayon de courbure est alors donné par l'équation différentielle

$$\sin\alpha \frac{d\rho}{d\theta} - \rho \cos\alpha + \rho = 0.$$

Remarque. — Cette condition de l'égalité des rayons de courbure correspondants n'est nullement nécessaire. En effet, dans le cas où la courbe (Γ) est une cycloïde toutes les courbes (E) sont des cycloïdes égales; mais les rayons de courbure aux points correspondants ne sont pas égaux.

Soient N le point de contact du cercle mobile avec la base et M le point qui décrit la cycloïde; la droite MN est la normale. Faisons tourner MN d'un angle constant, α, autour de M; nous aurons l'une des droites MA. Menons NQ parallèle à MP; la corde MQ est constante et le point Q est un point du cercle invariablement lié au point M. Ce point décrit une cycloïde (Γ_1), égale à (Γ). La normale, QN, enveloppe une autre cycloïde (Γ'), égale à (Γ_1) et, par suite, à (Γ). La droite PM se déduit de NQ par la translation NP; donc elle enveloppe elle-même une cycloïde égale aux autres.

ALGÈBRE ET ANALYSE

2222. — *Calculer les intégrales*

$$\int_0^\infty \frac{x\mathrm{L}x}{(x^2+1)^2}dx, \qquad \int_0^\infty \frac{x^2+3x+3}{(x^2+1)^3}e^{-x}\sin x\,dx.$$

(*Faculté des Sciences de Paris.*)

1° L'intégrale $\int \frac{x\mathrm{L}x\,dx}{(x^2+1)^2}$ se calcule facilement, en posant $u=\mathrm{L}x$, $dv=\frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$, et intégrant par parties. On obtient ainsi

$$\mathrm{J}=\int \frac{x\mathrm{L}x\,dx}{(1+x^2)^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{L}x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x(1+x^2)},$$

et l'on est ramené à l'intégration d'une différentielle rationnelle. Or

$$\frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2},$$

et l'intégrale $\int\frac{dx}{x(1+x^2)}$ est égale à

$$\mathrm{L}x-\frac{1}{2}\mathrm{L}(1+x^2)=\mathrm{L}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Nous avons donc finalement

$$\mathrm{J}=\frac{1}{2}\mathrm{L}\frac{x}{x^{\frac{1}{1+x^2}}\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}\mathrm{L}\frac{x^{\frac{x^2}{x^2+1}}}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Pour $x=0$, l'expression $x^{\frac{x^2}{x^2+1}}$ a pour limite 1, car le logarithme de cette expression, $\frac{x^2}{x^2+1}\mathrm{L}x$, a pour limite 0; nous avons donc $\mathrm{J}(0)=0$.

Pour $x=+\infty$, la quantité $\sqrt{1+x^2}$ s'écrit

$$x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{+\frac{1}{2}};$$

l'expression $\frac{x^{\frac{x^2}{x^2+1}}}{\sqrt{1+x^2}}$ s'écrit donc $x^{-\frac{1}{1+x^2}}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Le premier facteur tend vers 1, le second aussi; donc $\mathrm{J}(+\infty)=\mathrm{L}1$, $\mathrm{J}(+\infty)=0$.

L'intégrale définie

$$\int_0^\infty \frac{x\mathrm{L}x\,dx}{(1+x^2)^2}$$

est donc nulle.

2° Pour intégrer

$$\int\frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3}e^{-x}\sin x\,dx$$

nous allons d'abord décomposer la fraction $\frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3}$ en éléments simples; nous remarquons, à cet effet, que

$$x^2+3x+3=(x+1)^2+(x+1)+1;$$

alors l'intégrale se décompose en trois :

$$A = \int \frac{e^{-x} \sin x \, dx}{x+1},$$

$$B = \int \frac{e^{-x} \sin x \, dx}{(x+1)^2},$$

$$C = \int \frac{e^{-x} \sin x \, dx}{(x+1)^3}.$$

Pour calculer C, nous poserons $u = e^{-x} \sin x$, $dv = \frac{dx}{(x+1)^3}$, et nous aurons

$$C = -\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-x} \sin x}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{e^{-x}(\cos x - \sin x)\, dx}{(1+x)^2}, \qquad C = -\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-x} \sin x}{(x+1)^2} - \frac{B}{2} + \frac{D}{2},$$

en posant $D = \int \frac{e^{-x} \cos x \, dx}{(1+x)^2}$.

Calculons B; nous poserons encore $u = e^{-x} \sin x$ et dv, cette fois égal à $\frac{dx}{(x+1)^2}$, et nous aurons

$$B = -\frac{e^{-x} \sin x}{x+1} + \int \frac{e^{-x}(\cos x - \sin x)\, dx}{1+x},$$

puis

$$A + B = -\frac{e^{-x} \sin x}{x+1} + E,$$

en posant

$$E = \int \frac{e^{-x} \cos x \, dx}{1+x}.$$

Nous calculerons encore D par un procédé semblable, et nous aurons

$$D = -\frac{e^{-x} \cos x}{1+x} + \int \frac{e^{-x}(-\cos x - \sin x)\, dx}{1+x}, \qquad A + D + E = -\frac{e^{-x} \cos x}{1+x}.$$

Portons enfin dans C la valeur de D, nous aurons

$$C = -\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-x} \sin x}{(x+1)^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-x} \cos x}{1+x} - \frac{A}{2} - \frac{E}{2} - \frac{B}{2};$$

or

$$E = A + B + \frac{e^{-x} \sin x}{x+1};$$

donc

$$C = -\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-x} \sin x}{(1+x)^2} + \frac{e^{-x} \cos x}{1+x} + \frac{e^{-x} \sin x}{1+x}\right] - A - B,$$

et, par suite,

$$A + B + C = -\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-x} \sin x}{(1+x)^2} + \frac{e^{-x} \cos x}{1+x} + \frac{e^{-x} \sin x}{1+x}\right].$$

Il n'y a plus qu'à prendre les variations de cette fonction, J, quand x croît de 0 à $+\infty$. Or

$$J(+\infty) = 0, \qquad J(0) = -\frac{1}{2};$$

donc la valeur de l'intégrale définie est $\frac{1}{2}$.

E. KRAUSS.

Bonne solution : M. G. Lach, à Douai.

Assez bonnes solutions : M. L. Simon, à Fourmies; A. Pavchay, à Lyon; R. Hanneguin, H. Menessier.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2229. — *Étant donnés une hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes et un point* A(α, β) *de cette courbe : 1° déterminer sur l'hyperbole un point* M *tel qu'il existe une circonférence tangente en* M *à l'hyperbole, passant en outre par* A *et par le centre* O *de l'hyperbole; démontrer qu'il existe quatre points* M *répondant à la question et que ces quatre points sont sur une même circonférence* C *passant par* O; *2° trouver l'enveloppe de* C *quand* A *parcourt l'hyperbole donnée; 3° démontrer que, si par un point* P *quelconque* (x_0, y_0) *de cette enveloppe on lui mène les tangentes autres que la tangente en* P, *les points de contact de ces quatre tangentes sont en ligne droite, et trouver l'enveloppe de cette droite quand* P *varie.*

1. Soient $xy = a^2$ l'équation de l'hyperbole et x, y les coordonnées du point M. Représentons par

$$X^2 + Y^2 - 2\lambda X - 2\mu Y = 0$$

un cercle qui passe au point O, et écrivons que ce cercle passe au point (α, β), au point (x, y) et a même tangente en ce point que l'hyperbole; nous aurons successivement

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\lambda\alpha - 2\mu\beta = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2\mu y = 0,$$
$$x^2 - y^2 - \lambda x + \mu y = 0.$$

En éliminant λ et μ entre ces équations, nous obtiendrons l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 + \beta^2 & 2\alpha & 2\beta \\ x^2 + y^2 & 2x & 2y \\ x^2 - y^2 & x & -y \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation représente une cubique qui coupe l'hyperbole aux points M, et, comme nous allons le voir, deux fois au point A. Développons, en effet, cette équation, et remplaçons-y y par $\frac{a^2}{x}$; nous aurons d'abord

$$\alpha y(3x^2 - y^2) + \beta x(3y^2 - x^2) - 2xy(\alpha^2 + \beta^2) = 0;$$

puis, en remplaçant en outre β par $\frac{a^2}{\alpha}$,

$$\frac{\alpha a^2}{x}\left(3x^2 - \frac{a^4}{x^2}\right) + \frac{a^2 x}{\alpha}\left(\frac{3a^4}{x^2} - x^2\right) - 2a^2\left(\alpha^2 + \frac{a^4}{\alpha^2}\right) = 0,$$

$$\alpha(3x^4 - a^4) + \frac{x^2}{\alpha}(3a^4 - x^4) - 2x^3\left(\alpha^2 + \frac{a^4}{\alpha^2}\right) = 0,$$

$$x^6 - 3\alpha^2 x^4 + 2\left(\alpha^3 + \frac{a^4}{\alpha}\right)x^3 - 3a^4x^2 + a^4\alpha^2 = 0.$$

Cette équation est divisible par $x - \alpha$; le quotient $x^5 + \alpha x^4 - 2\alpha^2 x^3 + \frac{2a^4x^2}{\alpha} - a^4x - a^4\alpha = 0$, est encore divisible par $x - \alpha$, et nous avons finalement

$$x^4 + 2\alpha x^3 + \frac{2a^4 x}{\alpha} + a^4 = 0.$$

De là, nous tirerons les abscisses des quatre points M indiqués dans l'énoncé. D'autre part, cette équation peut s'écrire

$$x^2 + \frac{a^4}{x^2} + 2\alpha x + \frac{2a^4}{\alpha x} = 0,$$

ou, en remplaçant $\frac{a^2}{x}$ par y et $\frac{a^2}{\alpha}$ par β,

$$x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y = 0.$$

Ceci nous montre que les quatre points M sont sur un cercle qui passe au centre de l'hyperbole et qui a pour centre le point A′, symétrique de A par rapport au point O.

2. Portons dans cette équation $\beta = \frac{a^2}{\alpha}$, et exprimons que l'équation du second degré en α ainsi obtenue a une racine double, nous aurons

$$x^2 + y^2 + 2\alpha x + \frac{2a^2 y}{\alpha} = 0,$$

$$2\alpha^2 x + \alpha(x^2 + y^2) + 2a^2 y = 0,$$

et, enfin,

$$(x^2 + y^2)^2 - 16a^2 xy = 0.$$

Cette équation représente l'enveloppe du cercle C, quand le point A parcourt l'hyperbole. Cette enveloppe est une lemniscate ayant son point double à l'origine et ayant la première bissectrice pour axe de symétrie. C'est une courbe unicursale et on obtient immédiatement une représentation paramétrique rationnelle, en posant $y = t^2 x$; ceci donne

$$x = \frac{4at}{1 + t^4}, \qquad y = \frac{4at^3}{1 + t^4},$$

et va nous permettre de traiter aisément les deux dernières parties.

3. Désignons par x, y, z les coordonnées homogènes du point courant de la lemniscate; nous aurons

$$x = 4at, \qquad y = 4at^3, \qquad z = 1 + t^4,$$

et l'équation de la tangente au point t sera

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4at & 4at^3 & 1 + t^4 \\ 4a & 12at^2 & 4t^3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} x & y & az \\ 4t & 4t^3 & 1 + t^4 \\ 1 & 3t^2 & t^3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou enfin, développée,

$$(t^6 - 3t^2)x + (1 - 3t^4)y + 8at\,z = 0.$$

En exprimant que cette droite passe au point de paramètre θ (x_0, y_0), nous obtenons une équation du sixième degré en t qui admet deux fois la racine θ,

$$4a\theta(t^6 - 3t^2) + 4a\theta^3(1 - 3t^4) + 8a(1 + \theta^4)t^3 = 0,$$

$$\theta t^6 - 3\theta^3 t^4 + 2(1 + \theta^4)t^3 - 3\theta t^2 + \theta^3 = 0.$$

Divisons deux fois par $t - \theta$, nous aurons successivement

$$\theta t^5 + \theta^2 t^4 - 2\theta^3 t^3 + 2t^2 - \theta t - \theta^2 = 0,$$

puis

$$\theta t^4 + 2\theta^2 t^3 + 2t + \theta = 0.$$

Cette dernière équation donne les t des points de contact des quatre tangentes menées du point (x_0, y_0), autres que la tangente au point (x_0, y_0).

Cherchons alors les t des points de rencontre d'une droite quelconque $ux + vy + wz = 0$ avec la lemniscate; nous trouvons

$$wt^4 + 4avt^3 + 4aut + w = 0;$$

cette équation peut être identifiée avec la précédente et donne

$$u = \frac{1}{2a}, \qquad v = \frac{\theta^2}{2a}, \qquad w = \theta.$$

Les quatre points sont donc bien situés sur une droite, sur la droite

$$\frac{x}{2a} + \frac{\theta^2 y}{2a} + \theta = 0.$$

L'enveloppe de cette droite, quand θ varie, est l'hyperbole équilatère

$$1 - \frac{xy}{a^2} = 0.$$

C'est l'hyperbole donnée.

Remarques géométriques. — Il est facile de vérifier que la lemniscate est la courbe inverse de l'hyperbole équilatère par rapport à son centre, avec $4a^2$ pour puissance. Il en résulte évidemment que le premier problème est une conséquence du second : lorsqu'on connaît la propriété de la lemniscate relative aux tangentes issues d'un de ses points et que l'on a trouvé l'enveloppe de la droite qui porte les quatre points de contact, il suffit de transformer cette figure par inversion en prenant pour pôle le centre de la lemniscate pour avoir le premier problème.

Ces propriétés de la lemniscate ont été établies à diverses reprises dans la *Revue*. Le fait que la transformée d'une hyperbole équilatère par inversion, le pôle étant au centre, est une lemniscate est un fait très connu et qui peut se démontrer géométriquement de diverses manières.

Enfin, le problème actuel peut se généraliser en remplaçant l'hyperbole équilatère par une conique quelconque et le triangle OIJ par un triangle conjugué à cette conique. Les cercles de la question seraient remplacés par des coniques circonscrites au triangle OIJ.

G. R., à Marseille, et René HARMEGNIES.

Bonnes solutions : MM. Jolly, à Honfleur; G. Lach, à Douai; A. Roux, lycée de Lille; L. Simon, à Fourmies.

MÉCANIQUE

2225. — 1° *On considère la droite variable*

$$x = z + 2t, \qquad y = tz + 2t^2; \tag{1}$$

trouver la surface qu'elle engendre quand t varie. Cette surface est un paraboloïde qui est coupé par le plan $y = tz + 2t^2$ suivant une autre droite. On demande le lieu de l'intersection des deux droites quand t varie.

2° *On considère deux génératrices, t et t', du système* (1), *rectangulaires. Former les équations de la perpendiculaire commune à ces deux droites et le lieu du pied de cette perpendiculaire sur l'une d'elles.*

3° *Trouver le plan tangent à la quadrique en un point de la génératrice* (1), *le plan asymptote et le plan tangent perpendiculaire au plan asymptote, pour la même génératrice. Lieu du point de contact de ce plan quand t varie.*

4° *On suppose maintenant que t désigne le temps et que la courbe ainsi trouvée soit parcourue par un point mobile de masse* 1, *suivant les lois indiquées par les valeurs de x, y, z. Trouver la force qui actionne ce mobile.*

5° *On suppose ensuite que ce même point soit astreint à se mouvoir sans frottement sur le paraboloïde, sous l'action d'une force tangentielle; trouver la réaction normale de la surface sur le point, la force tangentielle et le lieu de la droite de support de cette dernière force.*

1. L'élimination de t entre les deux équations (1) donne immédiatement l'équation de la surface

$$x(x - z) - 2y = 0.$$

Cette surface est un paraboloïde hyperbolique dont les deux plans directeurs sont les plans $x = 0$ et $x - z = 0$.

Le plan $y = tz + 2t^2$ contient une génératrice; donc c'est un plan tangent et il coupe le paraboloïde suivant deux droites, celle qui est donnée, et une seconde. Pour avoir celle-ci, il suffit de remplacer y par $tz + 2t^2$ dans l'équation du paraboloïde et de résoudre l'équation

$$t(x - z) - 2tz - 4t^2 = 0$$

par rapport à x. Nous avons ainsi les deux équations

$$x - 2t = 0 \qquad \text{et} \qquad x - z - 2t = 0.$$

La seconde, combinée avec l'équation $y = tz + 2t^2$, redonne la première droite; l'autre conduit à la nouvelle droite cherchée :

$$y = tz + 2t^2, \qquad x + 2t = 0.$$

Le lieu du point de rencontre des deux droites s'obtient en combinant les trois équations; c'est la courbe

$$x = -2t, \qquad z = -4t, \qquad y = -2t^2.$$

Cette ligne est une parabole située dans le plan $z = 2x$ et sur le cylindre parabolique $2y + x^2 = 0$. Elle est aussi située sur le cylindre parabolique $z^2 + 8y = 0$, et, comme, dans le plan des yz, la parabole $z^2 + 8y = 0$ est l'enveloppe des droites

$$y = tz + 2t^2,$$

nous voyons que cette courbe est le contour apparent de la surface par rapport au plan des yz. Cela était d'ailleurs évident *a priori*, car, le plan $y = tz + 2t^2$ contenant les deux droites, le point de rencontre de celles-ci est le point de contact du plan, et, comme il est parallèle à Ox, le lieu de son point de contact est le contour apparent relatif à la direction Ox.

2. Les paramètres de direction de la droite (1) sont 1, t et 1. Si donc on considère deux droites t et t', la condition de perpendicularité est $1 + tt' + 1 = 0$ ou $tt' = -2$. Nous aurons ici la perpendiculaire commune en menant par chacune des droites un plan perpendiculaire à l'autre. Soit

$$\lambda(x - z - 2t) + y - tz - 2t^2 = 0$$

un tel plan; pour qu'il soit perpendiculaire à la seconde droite, il faut que

$$\frac{\lambda}{1} = \frac{1}{t} = -\lambda - t;$$

ces deux équations sont compatibles et donnent $\lambda = \frac{1}{t}$ ou $\lambda = -\frac{t}{2}$. Le plan a donc pour équation

$$-t(x - z - 2t) + 2y - 2tz - 4t^2 = 0,$$

ou

$$tx - 2y + tz + 2t^2 = 0.$$

L'autre plan est

$$t'x - 2y + t'z + 2t'^2 = 0,$$

ou, en remplaçant t' par $-\frac{2}{t}$,

$$\frac{x}{t} + y - \frac{z}{t} + \frac{4}{t^2} = 0,$$

$$tx + t^2y + tz - 4 = 0.$$

En retranchant les équations des deux plans l'une de l'autre, il vient

$$y = 2,$$

ce qui montre que le lieu du point indiqué est la section de la surface par le plan $y = 2$. C'est l'hyperbole $y = 2, \qquad x(x - z) - 4 = 0.$

3. Un plan passant par la génératrice (1) a pour équation

$$\lambda(x - z - 2t) + y - tz - 2t^2 = 0;$$

pour qu'il soit tangent au point de cote $z = \zeta$, il faut qu'il contienne une tangente à une courbe de la surface passant en ce point. Prenons la courbe d'intersection du paraboloïde par le plan $z = \zeta$; elle a pour équations paramétriques

$$x = \zeta + 2t, \qquad y = t\zeta + 2t^2, \qquad z = \zeta,$$

et les paramètres de la tangente sont

$$x' = 2, \qquad y' = \zeta + 4t, \qquad z' = 0;$$

d'autre part, nous devons avoir

$$\lambda(x' - z') + y' - tz' = 0,$$

ou

$$2\lambda + \zeta + 4t = 0.$$

Nous avons donc $\lambda = -\frac{\zeta + 4t}{2}$, et le plan tangent au point ζ de la génératrice t a pour équation

$$(\zeta + 4t)(x - z - 2t) - 2y + 2tz + 4t^2 = 0.$$

Ce sera le plan asymptote si ζ est infini. Ceci donne

$$x - z - 2t = 0.$$

Le plan perpendiculaire à celui-ci est donné par la relation

$$u - w = 0$$

ou

$$\zeta + 4t + \zeta + 2t = 0, \qquad \zeta = -3t;$$

par conséquent, le point de contact a pour coordonnées

$$x = -t, \qquad y = -t^2, \qquad z = -3t.$$

C'est le point *central*. Le lieu de ce point, quand t varie, la *ligne de striction*, est donc une parabole située dans le plan $z = 3x$, et ayant pour projection $y = -x^2$.

4. La force a pour expression $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$; ses composantes sont donc $0, -2, 0$. Cette force est constante, parallèle à Oy, dirigée vers Oy', et a pour intensité 2.

5. Soient X, Y, Z les composantes de la force tangentielle; celles de la réaction normale sont proportionnelles aux dérivées partielles du premier membre de l'équation du paraboloïde; elles ont donc pour expressions

$$\lambda(2x - z), \qquad -2\lambda, \qquad -\lambda x,$$

ou, en fonction de t,

$$\lambda t, \qquad -2\lambda, \qquad \lambda t.$$

Les équations qui donnent X, Y, Z sont donc

$$X + \lambda t = 0, \qquad Y - 2\lambda = -2, \qquad Z + \lambda t = 0;$$

il faut y joindre la relation qui exprime que la force X, Y, Z est dans le plan tangent, c'est-à-dire perpendiculaire à la normale. Cette relation est

$$tX - 2Y + tZ = 0;$$

donc, en multipliant les trois équations précédentes par t, -2, t et ajoutant, on a de suite la valeur de λ, $\lambda = \frac{4}{4 + 2t^2} = \frac{2}{2 + t^2}$.

Par conséquent, X, Y, Z ont pour valeurs

$$X = -\frac{2t}{2 + t^2}, \qquad Y = -\frac{2t^2}{2 + t^2}, \qquad Z = -\frac{2t}{2 + t^2}.$$

Les paramètres de la direction de cette force sont 1, t, 1; ce sont précisément ceux de la génératrice (1). La force est donc dirigée suivant cette génératrice et elle a pour intensité $\frac{2t}{\sqrt{2+t^2}}$.

Il va sans dire que le lieu de la ligne d'action de cette force est le paraboloïde.

Quant à la réaction normale, elle a pour composantes

$$\frac{2t}{2+t^2}, \qquad \frac{-4}{2+t^2}, \qquad \frac{2t}{2+t^2}.$$

Son intensité a pour valeur numérique

$$2\sqrt{\frac{2}{2+t^2}}.$$

Il serait facile d'avoir le lieu de la droite de support de cette force.

M. JOLLY, à Houlleur, et G. LACH, à Douai.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1919)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (*Suite*)

10174. — On donne trois axes rectangulaires et dans le plan zOx une hyperbole ayant pour asymptotes Ox et Oz. Un plan P parallèle au plan des xy rencontre l'hyperbole au point M et Oz au point N; on considère le cercle C de diamètre MN situé dans le plan P. Trouver la surface engendrée par ce cercle quand le plan P se déplace parallèlement au plan xOy. On coupe la surface par un cylindre de révolution tangent au plan zOx suivant Oz; démontrer que l'intersection est orthogonale à tous les cercles C.

— **175.** — On considère la surface définie par les équations $x = \cos u - v \sin u$, $y = \sin u + v \cos u$, $z = v + u$. Cette surface est-elle réglée? Trouver ses contours apparents sur les plans de coordonnées.

— **176.** — On donne deux droites D et D′ perpendiculaires, non situées dans un même plan, et on considère toutes les droites qui s'appuient sur D et D′ et qui sont à une distance donnée du milieu de la perpendiculaire commune à D et D′. Trouver la surface engendrée par ces droites.

— **177.** — Lieu des points d'un ellipsoïde en lesquels les normales ont leurs milieux dans l'un des plans principaux.

— **178.** — Génération du paraboloïde hyperbolique. Lieu des points par où passent deux génératrices rectangulaires.

— **179.** — Que représentent les équations $x = \frac{t}{1-t^2}$, $y = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $z = \frac{1+t}{1+t^2}$? Trouver l'aire limitée par cette courbe.

— **180.** — Lieu des points d'où l'on peut mener deux plans tangents rectangulaires au cône $z^2 - 2axy = 0$.

— **181.** — Que représentent les équations

$$x^2 = \frac{(a^2+u)(a^2+v)(a^2+w)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \qquad y^2 = \frac{(b^2+u)(b^2+v)(b^2+w)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}, \qquad z^2 = \frac{(c^2+u)(c^2+v)(c^2+w)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)},$$

où u et v sont deux paramètres variables et a^2, b^2, c^2, w des constantes?

— **182.** — Que représente l'équation $xz = 2a(x+y+z-a)$? Trouver le volume limité par cette surface et les trois plans de coordonnées.

— **183.** — Trouver la surface engendrée par la droite $z = 0$, $x = y - 1$ en tournant autour de $y = 0$, $x = z$.

— **184.** — Génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe. Lieu des projections du centre sur les génératrices.

— **185.** — Lieu des pôles des plans qui coupent l'hyperboloïde à une nappe suivant des paraboles.

— **186.** — Lieu des perpendiculaires communes à Oz et aux génératrices de $xy = az$.

— **187.** — Condition pour que les deux plans tangents à l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ menés par la droite $\frac{x-x_0}{u} = \frac{y-y_0}{v} = \frac{z-z_0}{w}$ soient rectangulaires.

— **188.** — Trouver la surface engendrée par les perpendiculaires communes à Oy et aux génératrices de la surface $\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} + 2x = 0$.

— **189.** — Conditions pour que la surface $ayz + bzx + cxy = 0$ soit de révolution.

— **190.** — Sections circulaires de l'hyperboloïde à une nappe. Trouver le volume limité par la surface et deux plans parallèles de sections circulaires.

— **191.** — On considère la surface $\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$; soient M un point de la surface, P le plus tangent en ce point et G une génératrice passant au point M. On désigne par p la distance du point O au plan P, et par r la distance du point M à la trace de G sur le plan xOy. Démontrer que $p^2(r^2 + c^2) = a^2c^2$.

— **192.** — Lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits à la quadrique

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda xz - 2\mu x - 4\nu z = 0.$$

— **193.** — Que représente l'équation $x^2 + y^2 - 2yz - z^2 = 0$? On la coupe par le plan $y = mx + 2z$. Déterminer m de façon que l'angle des génératrices soit maximum.

— **194.** — Lieu des pieds des normales abaissées d'un point (α, β, γ) sur les cercles de la surface

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

— **195.** — Que représente l'équation $4x^2 - z^2 = 2y + 1$? Génératrices de cette surface.

— **196.** — Trouver les génératrices de la surface $\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1$. On obtient deux systèmes λ et μ. Lieu des symétriques des génératrices μ par rapport à la génératrice $\lambda = 1$.

— **197.** — Génératrices rectilignes de la surface $x^2 - 3xz + 2z^2 - 4y - 4 = 0$.

— **198.** — On considère les droites situées dans un plan donné et par lesquelles on peut mener deux plans tangents perpendiculaires à un paraboloïde hyperbolique. Trouver l'enveloppe de ces droites : montrer que c'est une parabole.

— **199.** — Equation générale des quadriques passant par le cercle $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $z = 0$ et par l'axe Oz. Lieu des centres.

— **200.** — On donne trois axes rectangulaires, un point A sur Ox, un point B sur Oy, un point C sur Oz. Équation générale des quadriques passant par les droites AB, BC, CO et OA.

— **201.** — Former l'équation générale des paraboloïdes équilatères passant par deux droites données.

— **202.** — Couper la surface $x^2 + 4y^2 - 2az = 0$ suivant un cercle de rayon R.

— **203.** — Lieu des droites conjuguées des génératrices d'un hyperboloïde de révolution par rapport à une sphère tangente à l'axe de l'hyperboloïde au centre.

— **204.** — Lieu des sommets des paraboles sections de la surface $x^2 + y^2 - z^2 - a^2 = 0$ par des plans passant par un point fixe (x_0, y_0, z_0).

— **205.** — On donne un paraboloïde de révolution et une droite. Un point lumineux décrit cette droite. Déterminer ce point de manière que l'ombre portée par le paraboloïde sur le plan tangent au sommet soit tangente à une droite donnée. Étude du faisceau des coniques d'ombre. Équation tangentielle. Dans le cas particulier où la droite est perpendiculaire à l'axe, trouver l'enveloppe des axes de la conique d'ombre.

— **206.** — Trouver le volume de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ compris entre le plan yOz et un plan cyclique.

V. — Géométrie descriptive.

— **207.** — On donne un axe vertical et un segment de droite $(ab, a'b')$; on demande de faire tourner ce segment autour de l'axe pour l'amener à être vu d'un point (c, c') sous un angle droit.

— **208.** — Construire un cube connaissant une diagonale et la direction de la projection horizontale d'une arête.

— **209.** — On donne un triangle isocèle qui est la projection horizontale d'une face d'un tétraèdre régulier. Construire ce tétraèdre.

— **210.** — On donne un cercle dans le plan horizontal; c'est la directrice d'un cylindre dont la direction des génératrices est donnée. On le coupe par un plan défini par ses traces. On prend cette section comme base d'un cône de sommet donné. Trouver les contours apparents de ce cône.

— **211.** — Un cône a pour sommet un point (s, s') et pour directrice un cercle situé dans un plan défini par ses traces et donné par son rabattement. Trouver la section du cône supplémentaire par le plan horizontal. Tangente en un point. Nature de la section.

— **212.** — Construire une normale commune à un cône qui a pour base un cercle dans le plan horizontal et à un cylindre qui a pour base un cercle dans le plan vertical.

— **213.** — On considère un cylindre de front dont la directrice est un cercle situé dans un plan défini par ses traces et donné par son rabattement. On coupe le cylindre par le premier bissecteur et on prend la section comme base d'un cône de sommet donné (s, s'). Trouver le contour apparent du cône.

— **214.** — On considère un cercle ayant son centre en un point donné et tangent à la ligne de terre. Trouver les contours apparents du cylindre qui a pour base ce cercle et dont les génératrices ont une direction donnée.

— **215.** — On donne un cône ayant pour base un cercle dans le plan horizontal. On coupe le cône par le deuxième plan bissecteur. Déterminer un point et la tangente. Trouver le point de la conique section où la tangente fait l'angle de 30° avec la ligne de terre.

— **216.** — On donne un cercle C dans le plan horizontal. Lieu du sommet d'un cône ayant pour base le cercle C et tel que le plan horizontal coupe le cône supplémentaire suivant une hyperbole de directions asymptotiques données. On se donne le sommet; construire les asymptotes de l'hyperbole.

— **217.** — On donne un plan par ses traces, un cercle dans le plan par son rabattement. Ce cercle est la base d'un cône dont le sommet est donné par ses projections. Trouver la section du cône supplémentaire par le deuxième bissecteur. Nature de la section.

— **218.** — On donne un cône ayant pour base un cercle C dans le plan horizontal et pour sommet le point S. Par le point S on mène une parallèle à la ligne de terre et sur cette droite on prend un point S_1, qui est le sommet d'un autre cône ayant pour base le cercle C. Déterminer le point S_1 pour que l'intersection des deux cônes soit une parabole.

— **219.** — On donne un cône de révolution défini par son axe et une génératrice quelconque. Mener à ce cône une normale par un point donné.

— **220.** — On donne un plan par ses traces, et une parabole située dans ce plan et définie par son rabattement. Construire le cône de révolution qui contient cette parabole et dont l'angle au sommet est égal à 60°.

(*A suivre.*)

SUJETS DE CONCOURS

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Concours de 1919.

Mathématiques élémentaires (*).

1° On donne un trièdre t de sommet A. Soient P, Q, R les projections orthogonales d'un point quelconque M sur les plans des faces de ce trièdre, AM′ la droite menée par A, perpendiculairement au plan PQR; soient P′, Q′, R′ les projections orthogonales du point M′ sur les plans des faces du même trièdre. Démontrer que le plan P′Q′R′ est perpendiculaire à AM. Les deux droites AM et AM′ sont dites réciproques l'une de l'autre par rapport au trièdre t; peuvent-elles être confondues?

2° On donne un tétraèdre T, de sommets A_1, A_2, A_3, A_4 et un point M; on construit la droite A_1M_1, réciproque de A_1M par rapport au trièdre A_1 (A_2, A_3, A_4) de sommet A_1. On construit de même la droite A_2M_2, réciproque de A_2M par rapport au trièdre A_2 (A_1, A_3, A_4); etc. Démontrer que les quatre droites A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3, A_4M_4 concourent en un point M′.

Les deux points M et M′ sont dits réciproques l'un de l'autre par rapport au tétraèdre T: peuvent-ils être confondus?

3° Démontrer que les projections orthogonales des points M et M′ sur les faces du tétraèdre sont des points situés sur une même sphère.

4° Si M se déplace sur un plan P quelconque, M′ se déplace sur une surface Σ qui passe par les six arêtes de T. Montrer que cette surface contient trois autres droites qui s'appuient chacune sur deux arêtes opposées de T et qui sont dans un même plan. Montrer que si l'on remplace le plan P par le plan P′, le plan P′ est remplacé par le plan P.

5° Le tétraèdre T étant supposé régulier, on porte sur les deux arêtes opposées A_1A_2 et A_3A_4 des longueurs égales $A_1\alpha$ et $A_3\beta$, toutes deux de A_1 vers A_2 et de A_3 vers A_4, ou toutes deux dans les sens opposés. On suppose que M décrive la droite $\alpha\beta$: quel est alors le lieu du milieu de MM′?

Mathématiques spéciales.

2365. — 1° Sur la surface conoïde (C) ayant pour équation en coordonnées rectangulaires $z = a\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $(a > 0)$, on considère la courbe (A) dont la projection sur le plan Oxy a pour équation polaire $\rho^2 = b^2 \sin 2\theta$, O étant le pôle et Ox l'axe polaire.

Vérifier que le plan tangent à la surface (C) en un point quelconque de la courbe (A) est osculateur à (A).

Exprimer les coordonnées d'un point de (A) en fonction rationnelle d'un paramètre.

Par la courbe (A) on peut faire passer un hyperboloïde (H) dont l'équation est de la forme $Axy + Bz^2 + C = 0$. Chaque génératrice de (H) rencontre (A) en un point ou trois points.

(*) Des solutions étudiées de la question sont publiées dans le *Journal de Mathématiques élémentaires*.

On considère une génératrice de (H) rencontrant (A) en trois points M_1, M_2, M_3. Trouver le lieu du centre des moyennes distances de M_1, M_2, M_3 lorsque la génératrice varie.

2° Former l'équation tangentielle de la surface (C).

Montrer que (C) est sa propre polaire réciproque par rapport à une infinité de quadriques (Q) ayant pour équation

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + z^2 + \frac{2a^2}{\nu} z + a^2 = 0,$$

λ, μ, ν désignant les coordonnées d'un point arbitraire de (C).

Trouver l'enveloppe des quadriques (Q). Elle comprend un conoïde (C') qui est polaire réciproque de (C) par rapport à l'hyperboloïde (H) de la première partie.

3° Tout plan P passant par une génératrice rectiligne G de (C) coupe en outre la surface suivant une ellipse E dont la projection sur le plan des xy est un cercle passant par l'origine O des coordonnées. Réciproquement tout cercle $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0$ du plan des xy est projection d'une ellipse tracée sur (C).

Montrer que toutes les ellipses E ont la même distance focale.

On considère sur (C) les ellipses E dont le petit axe a une longueur donnée 2R. Leurs plans P enveloppent une surface développable (Δ). Construire la trace de Δ sur le plan des xy.

Trouver l'arête de rebroussement (Γ) de (Δ) et construire sa projection sur Oxy. Comment se développe (Γ) quand on développe sur un plan le cylindre projetant (Γ) sur le plan des xy.

Par (Γ) on peut faire passer une quadrique de révolution autour de Oz.

Trouver le lieu de (Γ) quand R varie.

4° Comment se coupent les deux surfaces (C) et (Δ)?

Calcul différentiel et intégral.

I. — Appelons R, θ, φ les coordonnées sphériques d'un point dont les coordonnées rectangulaires sont x, y, z, de sorte que

$$x = R \sin\theta \cos\varphi, \qquad y = R \sin\theta \sin\varphi, \qquad z = R \cos\theta.$$

On considère la surface S dont l'équation est

$$R = ae^u,$$

a étant une constante, e la base des logarithmes népériens, et u la fonction

$$u = \lambda\varphi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \sqrt{\lambda^2 - \cos^2\theta}\, d\theta,$$

où λ est une constante donnée.

1° On demande de former les équations différentielles des lignes asymptotiques et des lignes de courbure de S.

2° Montrer que, dans les deux équations, on peut séparer les variables.

3° Prouver que toutes les lignes de courbure de S (de l'une quelconque des deux familles) sont semblables. De même pour les lignes asymptotiques.

4° Considérer le cas où $\lambda = 1$.

II. — 1° On considère les fonctions réelles $\varphi(x)$ qui sont continues sur l'intervalle J : $0 \leqslant x \leqslant 1$, telles que

$$0 < \varphi(x) < 1.$$

2° Parmi ces fonctions envisageons d'abord celles dont l'oscillation reste inférieure à $\frac{1}{n}$ dans tout intervalle partiel de longueur $\frac{1}{p}$.

Montrer qu'il existe un nombre *fini*, $2s$, de fonctions

$$g_1(x), \qquad h_1(x), \qquad g_2(x), \qquad h_2(x), \qquad \ldots, \qquad g_s(x), \quad h_s(x)$$

qui sont continues sur J et telles que

$$0 \leqslant h_1(x) < g_1(x) \leqslant 1, \qquad \ldots, \qquad 0 \leqslant h_s(x) < g_s(x) \leqslant 1,$$
$$g_1(x) - h_1(x) \leqslant \frac{3}{n}, \qquad \ldots, \qquad g_s(x) - h_s(x) \leqslant \frac{3}{n},$$

de sorte qu'à chacune des fonctions $\varphi(x)$ envisagées on peut assigner un des couples $g_i(x)$, $h_i(x)$ satisfaisant sur J aux conditions

$$h_i(x) < \varphi(x) < g_i(x).$$

3° On demande non seulement de prouver l'existence des fonctions g, h en nombre fini, mais, parmi tous les choix possibles, d'en définir au moins un explicitement connaissant seulement n et p.

4° Si l'on ne peut fixer en fonction de n et de p la plus petite valeur possible du nombre s des couples g, h, on demande de déterminer au moins une fonction algébrique simple de p et de n qui soit une des valeurs possibles de s.

5° Parmi les fonctions $\varphi(x)$ décrites au paragraphe 1°, considérons seulement maintenant celles qui admettent partout sur J une dérivée φ' dont la valeur absolue reste inférieure ou au plus égale à un nombre déterminé $k > 0$. Montrer que si λ, ω sont deux nombres arbitraires l'un supérieur à k, l'autre à zéro, il existe un nombre *fini*, $2l$, de fonctions $q_1(x)$, $r_1(x)$, ..., $q_l(x)$, $r_l(x)$ admettant partout sur J une dérivée continue dont la valeur absolue reste inférieure à λ et telles que

$$0 \leqslant r_1(x) < q_1(x) \leqslant 1, \qquad \ldots, \qquad 0 \leqslant r_l(x) < q_l(x) \leqslant 1,$$
$$q_1(x) - r_1(x) < \omega, \qquad \ldots, \qquad q_l(x) - r_l(x) < \omega,$$

de sorte qu'à chacune des fonctions $\varphi(x)$ envisagées maintenant, on peut assigner un des couples $q(x)$, $r(x)$ satisfaisant sur J aux conditions

$$r(x) < \varphi(x) < q(x).$$

Mécanique rationnelle.

On considère un corps solide formé de deux sphères homogènes pesantes (Σ) et (Σ') reliées suivant la ligne des centres par une tige rigide de poids négligeable. Les sphères sont de même rayon a et de même poids; on désignera par $2l$ la distance OO′ de leurs centres.

A l'instant initial les deux sphères reposent sur un plan horizontal fixe (Π) et on leur imprime un mouvement instantané initial compatible avec la condition que les deux sphères restent en contact avec le plan.

I. Déterminer le mouvement ultérieur du corps en supposant qu'il n'y ait pas de frottement et que, au moins au début du mouvement, aucune des sphères ne se détache du plan. Comment doivent être choisies les conditions initiales pour qu'il en soit ainsi?

II. On suppose qu'il y ait frottement de la sphère (Σ) sur le plan (Π), le coefficient de frottement étant f. Déterminer tous les mouvements du corps solide tels que la sphère (Σ) roule sans glisser sur le plan (Π), la sphère (Σ') restant en contact avec (Π), mais sans exercer aucune pression sur lui. Déterminer dans chacun de ces mouvements le lieu de l'axe instantané de rotation, soit dans le corps, soit dans l'espace. Ces lieux sont deux cônes; déterminer et discuter le lieu des positions que peut occuper dans le corps leur sommet commun S. A quelle condition doit satisfaire f pour que l'axe instantané de rotation initial puisse être aussi peu incliné qu'on veut sur la ligne des centres?

III. On suppose qu'il y ait frottement à la fois de la sphère (Σ) et de la sphère (Σ') sur le plan (Π), les coefficients de frottement étant respectivement f et f', supposés inférieurs à 1. On donne les composantes initiales de la rotation instantanée du corps autour de son centre de gravité, ainsi que les angles que font avec la direction OO′ les vitesses initiales de glissement des deux sphères (Σ) et (Σ') sur le plan (Π), ces vitesses de glissement étant supposées toutes les deux différentes de zéro.

Reconnaître si au début du mouvement ultérieur les deux sphères restent en contact avec le plan (Π) ou si l'une des sphères s'en détache, et laquelle.

IV. On suppose $f' = 0$, f étant toujours compris entre 0 et 1. On imprime au corps une rotation instantanée initiale autour du diamètre vertical de la sphère (Σ). Reconnaître :

1° Si au début du mouvement l'une des sphères se détache du plan;

2° Si au début du mouvement il y a glissement ou non de la sphère (Σ) sur le plan.

Dans le cas du glissement, déterminer la direction initiale et le sens initial du glissement ainsi que le rayon de courbure de la trajectoire du centre de gravité du corps au début du mouvement.

N. B. — On négligera les frottements de roulement et de pivotement.

On pourra prendre trois axes de coordonnées rectangulaires mobiles Gx, Gy, Gz ayant pour origine le centre de gravité du corps, l'axe Gz étant vertical et ascendant, le plan zGx étant le plan vertical qui contient la ligne des centres OO′. On pourra désigner par ξ, η, ζ les composantes suivant ces axes de la vitesse de G, et par p, q, r les composantes de la rotation instantanée du corps autour de son centre de gravité. L'axe Gx étant, au moins au début des mouvements considérés dans l'énoncé, porté par la ligne des centres OO′, on le supposera dirigé de G vers O.

On pourra aussi, si l'on préfère, prendre des axes invariablement liés au corps solide, en particularisant convenablement leur orientation initiale.

QUESTION PROPOSÉE

2366. — On donne trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz. Un point matériel M de masse égale à 1 se déplace dans l'espace sous l'action d'une force MF parallèle au plan des xy et dont l'extrémité F est constamment située sur l'hélice circulaire définie par les équations $x = 2\cos z$, $y = 2\sin z$.

1° Ecrire les équations du mouvement, puis les intégrer. On désignera par x_0, y_0, z_0 les coordonnées de la position initiale M_0 et par a, b, c les projections de la vitesse initiale M_0V_0 à l'instant $t = 0$.

En supposant $c > 0$, on montrera que si $c \neq 1$ on obtient pour x, y, z un premier groupe de valeurs, et si $c = 1$ un deuxième groupe. Démontrer que si l'on fait tendre c vers 1, les valeurs du premier groupe ont respectivement pour limites celles du second.

2° On fait ensuite $x_0 = 1$, $y_0 = z_0 = 0$, $a = b = 0$, $c = 1$. Soit alors (C) la trajectoire du point M. Montrer qu'on peut la définir géométriquement. Calculer à l'instant t la vitesse du point M, son accélération totale, tangentielle et normale. En déduire le rayon de courbure de la trajectoire et vérifier le résultat obtenu au moyen de la formule $\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2$.

3° Calculer la longueur de l'arc parcouru par le point M de l'instant zéro à l'instant t, et l'aire engendrée par cet arc tournant autour de Oz.

4° Etudier l'hodographe du mouvement.

5° Soit (γ) la projection de la courbe (C) sur le plan des xy ; cette courbe (γ) passe au point M_0. Soit m un point quelconque de cette courbe ; on pose $Om = \rho$, arc $M_0m = s$. Démontrer que l'on a $\rho^2 = 2s + 1$.

Inversement, toute courbe du plan des xy passant par le point M_0, et telle que l'on ait cette relation, coïncide avec la courbe (γ).

G.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

Concours de 1913.

2199. — *On considère la courbe* C *définie en coordonnées rectangulaires par les équations*

$$x = \frac{t}{1+t^4}, \qquad y = \frac{t^2}{1+t^4}, \qquad z = \frac{t^3}{1+t^4}.$$

I. — *Construire les projections de la courbe* C *sur les trois plans de coordonnées. Indiquer les éléments de symétrie de ces courbes et de la courbe* C. *Indiquer pour chacune des symétries trouvées la relation entre les t de deux points symétriques.*

II. — *Montrer qu'il existe une infinité de surfaces du second degré contenant la courbe* C. *Former leur équation générale. Déterminer les cônes ou cylindres qui font partie de ces surfaces. S'il y a des cylindres, déterminer leurs sections droites.*

III. — *Former la relation qui doit exister entre quatre valeurs distinctes de t pour que les quatre points correspondants soient dans un même plan. Mettre cette relation sous une forme aussi simple que possible.*

Déduire de cette relation celle qui doit exister entre deux valeurs de t pour que les tangentes aux points correspondants soient dans un même plan. Montrer que ce plan est tangent à un des cylindres obtenus précédemment.

IV. — *Calculer l'aire d'une des boucles fermées de la projection de* C *sur le plan des xz.*

1. La projection de la courbe (C) sur le plan des xy a pour équation

$$x = \frac{t}{1+t^3}, \qquad y = \frac{t^2}{1+t^3}.$$

Si on y change t en $-t$, x se change en $-x$ et y ne change pas; la courbe est donc symétrique par rapport à Oy et, en tenant compte de cette symétrie il suffit de faire varier t de 0 à $+\infty$.

Pour $t=0$, x et y sont nuls, $\frac{y}{x}$ est nul, la courbe part du point O tangentiellement à Ox; pour $t=1$, x et y sont égaux à $\frac{1}{2}$; pour $t=\infty$, x et y sont nuls et $\frac{y}{x}$ est infini; la courbe revient au point O tangentiellement à Oy. La dérivée par rapport à x est

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1-3t^3}{(1+t^3)^2};$$

elle s'annule pour $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$; pour cette valeur, x passe par un maximum. La dérivée par rapport à t de y est

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2t(1-t^3)}{(1+t^3)^2};$$

elle s'annule pour $t=1$; à ce moment y est maximum. Le maximum de y a lieu après celui de x et la forme de la courbe est évidente maintenant (fig. 1).

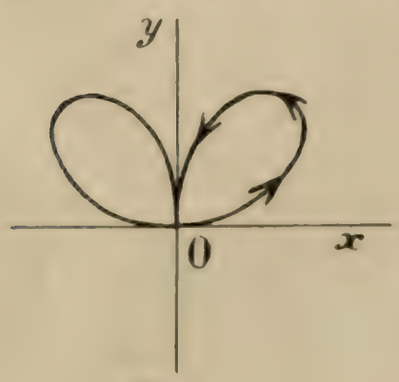


Fig. 1.

L'équation cartésienne de la courbe s'obtient de suite en remplaçant $\frac{y}{x}$ par t, soit dans x, soit dans y; c'est

$$x^3 + y^3 - x^2y = 0.$$

Les valeurs de t qui correspondent aux points symétriques par rapport à Oy sont liées par la relation $t + t' = 0$.

La projection de la courbe sur le plan des yz a pour équation

$$y = \frac{t}{1+t^3}, \qquad z = \frac{t^2}{1+t^3}.$$

Le même changement de t en $-t$ manifeste une symétrie par rapport à Oy, et il suffit de faire varier t de 0 à $+\infty$. La courbe se construit aussi aisement que la précédente et a une forme analogue. Elle a d'ailleurs la même équation cartésienne

$$y^3 + z^3 - yz^2 = 0.$$

Les valeurs de t qui correspondent aux points symétriques par rapport à Oy sont d'ailleurs liées par la relation $t + t' = 0$, la même que précédemment.

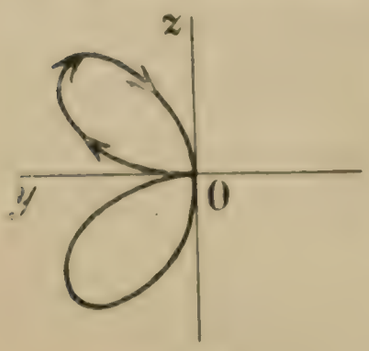


Fig. 2.

Enfin la projection de la courbe sur le plan des xz a pour équation

$$x = \frac{t}{1+t^3}, \qquad z = \frac{t^2}{1+t^3}.$$

Ici il y a deux symétries : l'une, par rapport au point O, qui se manifeste par le changement de t en $-t$; l'autre par rapport à la première bissectrice, qui se manifeste par le changement de t en $\frac{1}{t}$.

Les deux relations correspondantes sont $t+t'=0$ et $t-\frac{1}{t'}=0$. En tenant compte de ces deux symétries, il suffit de faire varier t de 0 à 1. Pour $t=0$, x et z sont nuls, $\frac{z}{x}$ est nul, la courbe part du point O tangentiellement à Ox; pour $t=1$, x et z sont égaux à $\frac{1}{2}$, la tangente en ce point est perpendiculaire à la première bissectrice, à cause de la symétrie. La forme de la courbe est évidente (fig. 3). D'ailleurs cette courbe est une lemniscate, comme le montre l'équation cartésienne

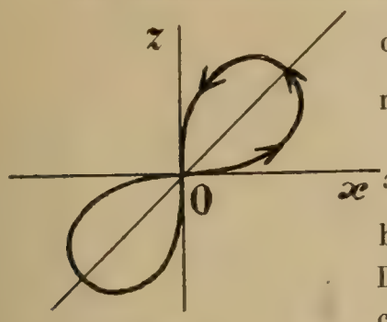


Fig. 3.

$$(x^2+z^2)^2-zx=0,$$

qui s'obtient immédiatement, en remplaçant t^2 par $\frac{z}{x}$.

Dans l'espace, la courbe (C) est symétrique par rapport à l'axe des y, comme le montre le changement de t en $-t$, et elle est symétrique par rapport aux plans bissecteurs du dièdre Oy, comme le montrent les deux changements de t en $\frac{1}{t}$, de t en $-\frac{1}{t}$.

2. La courbe (C) est visiblement située sur les deux quadriques

$$xz-y^2=0, \quad x^2+z^2-y=0,$$

comme on le voit de suite, en formant les deux quantités xz et x^2+z^2. La courbe (C) est donc une biquadratique, intersection du cône $xz-y^2=0$ avec le paraboloïde elliptique $x^2+z^2-y=0$. Le sommet du cône étant sur le paraboloïde à l'origine des coordonnées, la courbe a son point double en ce point. Elle est située sur une infinité de quadriques dont l'équation générale est

$$x^2+z^2-y+\lambda(y^2-xz)=0.$$

Pour avoir les cônes qui font partie du faisceau, il faut former l'équation

$$H(\lambda)\equiv\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{\lambda}{2} & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\lambda}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Cette équation se réduit à $-\frac{1}{4}\left(1-\frac{\lambda^2}{4}\right)=0$. Comme elle doit être du quatrième degré, elle admet deux racines infinies et les deux racines $\lambda=-2$, $\lambda=+2$. Pour $\lambda=\infty$, on a le cône $y^2-xz=0$, qui est un cône double. Pour $\lambda=-2$, on a le cylindre hyperbolique $(x+z)^2-2y^2-y=0$, dont les génératrices sont parallèles à la deuxième bissectrice de l'angle des axes Ox et Oz. Pour $\lambda=+2$, on a le cylindre elliptique $(x-z)^2+2y^2-y=0$, dont les génératrices sont parallèles à la première bissectrice de l'angle des axes Ox et Oz.

Nous aurons les sections droites de ces deux cylindres, en faisant tourner le trièdre des axes autour de Oy d'un angle égal à 45°. Les formules de transformation sont

$$x=\frac{x'-z'}{\sqrt{2}}, \qquad y=y', \qquad z=\frac{x'+z'}{\sqrt{2}},$$

et les deux équations des cylindres deviennent

$$2x'^2-2y'^2-y'=0, \qquad 2z'^2+2y'^2-y'=0.$$

Les deux sections droites sont en évidence : la première est une hyperbole équilatère ; la deuxième, un cercle.

3. Les t des points de rencontre avec un plan quelconque $ux + vy - wz - r = 0$ sont donnés par l'équation

$$ut + vt^2 + wt^3 + r(1 - t^4) = 0;$$

ils vérifient la relation $t_1 t_2 t_3 t_4 = 1$.

Si on veut que le plan contienne deux tangentes à la courbe, il faut que $t_1 = t_2$, $t_3 = t_4$, et la relation devient

$$(tt')^2 = 1,$$

qui se décompose en deux $tt' = 1$ et $tt' = -1$. Les deux points liés par la relation $tt' = 1$ sont symétriques par rapport au premier bissecteur du dièdre Oy ; ils sont donc sur une génératrice du cylindre hyperbolique et le plan correspondant est tangent à ce cylindre. Les deux points liés par la relation $tt' = -1$ sont sur le cylindre de révolution et le plan correspondant est tangent à ce cylindre.

4. Pour avoir l'aire de la boucle de droite de la lemniscate, il faut calculer l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty (x\,dz - z\,dx).$$

Or

$$\frac{z}{x} = t^2, \qquad \frac{x\,dz - z\,dx}{x^2} = 2t\,dt, \qquad \text{et} \qquad \frac{x\,dz - z\,dx}{2} = \frac{t^2\,dt}{(1 + t^4)^2}.$$

Posons $1 + t^4 = u$; nous aurons $4t^3\,dt = du$, et l'intégrale indéfinie se réduit à

$$\frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{4u}.$$

L'aire A est donc

$$A = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1 + t^4}\right)_0^\infty = \frac{1}{4}.$$

On peut aussi prendre l'équation cartésienne de la lemniscate, puis l'équation polaire et calculer

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2\,d\omega}{2}.$$

Bonnes solutions : MM. L. Simon, à Fourmies ; E. Rouge, à Sainte-Barbe ; G. Lach, à Douai et A. Rousseau, à Fournes-en-Weppes.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2207. — 1° *Étant donné un cercle* (O), *on demande d'étudier les propriétés des droites* Δ *telles que leur trace sur un plan* P *qui leur est perpendiculaire soit foyer de la projection de* O *sur ce plan.*

2° *Une telle droite* Δ *étant donnée, quel est le lieu de la perpendiculaire commune à* Δ *et aux différentes tangentes au cercle* (O)?

Première partie. — Il suffit de projeter (O) sur les plans passant par son centre O pour obtenir toutes les droites (Δ) ; à chaque direction (Δ) correspond un plan unique (P) qui lui est perpendiculaire, donc une ellipse centrée en O, et quatre droites (Δ), deux réelles, deux imaginaires, symétriques par rapport à O. Les droites Δ forment une congruence admettant le point O comme centre.

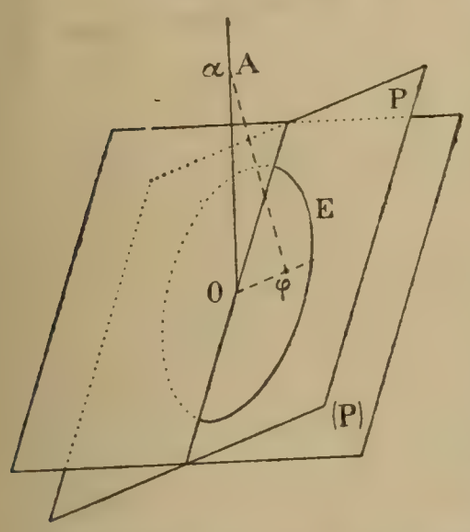
Droites (Δ) *particulières.* — Désignons par (A) l'axe du cercle (O), par (P) son plan ; les droites (Δ) parallèles à (A) sont confondues avec (A). A toute direction située dans (P) correspondent les deux

tangentes à (O) parallèles à cette direction et les deux droites rencontrant (A) aux points A et A′ tels que $OA = OA' = ri$; cela résulte de ce que, dans ce cas, les ellipses projections se réduisent à un segment de droite.

Définition géométrique des droites (Δ). — Considérons les directions définies par les génératrices d'un cône de révolution d'axe (A), de demi-angle au sommet θ; l'angle des plans de projections correspondants avec (P) est égal à θ; les éléments de l'ellipse projection sont donc

$$a = r, \qquad b = r\cos\theta, \qquad c = r\sin\theta.$$

Les droites (Δ) réelles relatives à ces ellipses rencontrent (P) en des points F tels que $OF = r\sin\theta$, sont perpendiculaires à OF et font avec (P) un angle $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$; par suite elles engendrent un hyperboloïde de révolution autour de (A), à une nappe, dont le cercle de gorge est centré en O, situé en (P) et a pour rayon $r\sin\theta$; son équation est



$$\frac{x^2 + y^2}{\sin^2\theta} - \frac{z^2}{\cos^2\theta} = r^2.$$

Soit φ un foyer imaginaire, α le point où la droite (Δ) passant en φ rencontre Oz; dans le triangle rectangle $O\alpha\varphi$, on a

$$\widehat{O\alpha\varphi} = \theta, \qquad O\varphi = ri\sin\theta;$$

par suite, $O\alpha = ri$; les droites (Δ) imaginaires sont donc les génératrices des deux cônes de révolution autour de Oz, dont le demi-angle au sommet est θ, dont les sommets sont les points A et A′.

Faisons varier θ; nous voyons que la congruence (Δ) est constituée par les génératrices rectilignes de la famille de quadriques

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = z^2\,\mathrm{tg}^2\theta + r^2\sin^2\theta,$$

et par les droites passant en l'un des points A ou A′. Dans la suite, nous étudierons uniquement les droites (Δ) correspondant aux foyers F situés dans (P).

Ordre de la congruence. — Les hyperboloïdes à une nappe, correspondant aux valeurs réelles de θ, engendrent tout l'espace d'une façon continue. Par un point donné réel x, y, z passe donc un hyperboloïde et un seul, c'est-à-dire deux droites (Δ) réelles. Mais on obtiendra, pour certaines valeurs imaginaires de θ, les quadriques conjuguées des précédentes, qui ne peuvent être que des ellipsoïdes imaginaires ou réels; on peut donc prévoir que par M passera aussi un ellipsoïde réel unique, c'est-à-dire deux droites imaginaires.

En effet, résolvons l'équation (1) par rapport à l'inconnue $\mathrm{tg}^2\theta = t$:

$$z^2t^2 + (z^2 + r^2 - x^2 - y^2)t - (x^2 + y^2) = 0.$$

Pour un point M quelconque, les coefficients extrêmes sont de signes contraires; il y a une racine $t > 0$ et une < 0; à la première correspond un hyperboloïde à une nappe, à la seconde une quadrique réelle, donc un ellipsoïde; il faut remarquer d'après l'équation (1) que les deux valeurs de $\sin^2\theta$ correspondant aux racines sont < 0.

Si $z = 0$, une racine est ∞, l'autre est $t = \frac{x^2 + y^2}{r^2 - x^2 - y^2}$; si $r^2 > x^2 + y^2$, la seconde est > 0, elle donne les génératrices de l'hyperboloïde à une nappe dont le cercle de gorge passe en M; si $r^2 \leqslant x^2 + y^2$, on doit regarder la racine ∞ comme > 0; elle correspond aux tangentes menées du point M à (O); si $x^2 + y^2 = 0$, autrement dit, si M est sur (A), une racine est $t = -\frac{r^2 + z^2}{z^2} < 0$.

l'autre est nulle; on doit la regarder comme > 0; elle donne deux droites (Δ) confondues avec (A).

Classe de la congruence. — Tout plan passant par O contient deux droites (Δ) réelles; ce sont deux de ses lignes de plus grande pente, symétriques par rapport à (O), dont on détermine facilement la trace sur (P) connaissant l'angle θ du plan avec (P); il ne peut être tangent à aucun ellipsoïde centré en O, donc ne contient aucune droite (Δ) imaginaire; ceci nous permet de prévoir que la congruence est de classe 2. Le plan (P) est un plan particulier pour la congruence, puisque toutes les tangentes à (O) sont des droites (Δ).

Soit (π) un plan quelconque, (D) son intersection avec (P); les points ou les génératrices (Δ) contenues dans (π) coupent (D) sont situés sur le cercle de gorge de la quadrique; si (D) coupe (O) en deux points imaginaires, (π) ne peut être tangent à aucun hyperboloïde, donc il est tangent à un ellipsoïde et contient deux droites (Δ) imaginaires; si (D) est tangente à (O), les deux droites (Δ) se confondent avec (D) et la quadrique correspondante est le plan double (P). De tout ce qui précède, il résulte que, si (D) coupe (O) en deux points réels, (π) est tangent à un hyperboloïde unique et contient deux droites (Δ) réelles, qui sont symétriques par rapport à la projection de (A) sur (π).

On retrouve aisément tous ces résultats par le calcul; les quadriques ont pour équation tangentielle

$$(u^2 + v^2)\sin^2\theta - w^2\cos^2\theta = \frac{h^2}{r^2};$$

si l'on se donne un plan réel u, v, w, h, on a

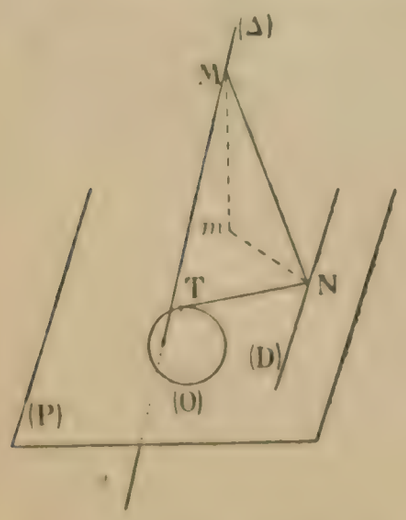
$$\sin^2\theta = \frac{h^2 + r^2w^2}{r^2(u^2 + v^2 + w^2)};$$

le second membre est toujours > 0; donc chaque plan (π) est tangent soit à un hyperboloïde à une nappe, soit à un ellipsoïde réel; on aura un hyperboloïde si $\sin^2\theta < 1$,

c'est-à-dire
$$\frac{h^2}{u^2 + v^2} < r^2.$$

Or, u, v, h sont les paramètres de (D); cette inégalité exprime donc bien que (D) coupe (O) en deux points réels.

Deuxième partie. — *Lieu des droites (Δ_1) perpendiculaires communes à une droite (Δ) et aux tangentes à* (O). — Si (Δ) coïncide avec (A), le lieu est le plan double (P). Si (Δ) est une tangente à (O), el lieu est le plan perpendiculaire à (P) de trace (Δ), ou si l'on veut, il se compose de toutes les droites rencontrant (Δ).



Supposons (Δ) quelconque, cherchons combien de droites (Δ_1) passent par un point M de (Δ), projeté en m sur (P); soit (D) la trace sur (P) du plan perpendiculaire à (Δ) mené par M, N un point de (D); menons par N une tangente NT à (O); si l'angle $\widehat{MNT}$ est droit, il en est de même de l'angle $\widehat{mNT}$, autrement dit N est sur la podaire de (O) relative au point m; c'est un limaçon de Pascal qui coupe (D) en quatre points; il y a donc quatre droites (Δ_1) passant en M; la discussion de la réalité de ces droites suivant la position de M sur (Δ) serait d'ailleurs compliquée. Ce résultat montre que (Δ) est une droite quadruple de la surface (S) engendrée par les droites (Δ_1).

Cherchons maintenant combien il y a de droites (Δ_1) dans un plan (π_1) passant par (Δ); ces droites étant perpendiculaires à (Δ) dans (π_1), la direction des tangentes (T) qui leur sont perpendiculaires est déterminée, il y a donc deux droites (Δ_1) dans (π_1); on en conclut que la droite à l'infini du plan perpendiculaire à (Δ) est une droite double de (S) et que (S) *est une surface du 6e ordre*. On voit également que le diamètre de (O) qui rencontre (Δ) est une droite double de (S).

Vérifions ces résultats par le calcul; prenons ce diamètre comme axe des y; (Δ) a pour équations

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sin\theta} = \dfrac{z}{\cos\theta} = \rho, \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

Les équations des tangentes (T) dépendent d'un paramètre α :

$$\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\alpha = r, \\ z = 0. \end{cases}$$

Une perpendiculaire à (Δ) et (T) est définie par les équations

$$(2) \qquad (\Delta_1) \quad \begin{cases} y\cos\alpha - x\sin\alpha = h. \\ x\sin\theta + z\cos\theta = k. \end{cases}$$

Déterminons h et k par la condition que (Δ_1) rencontre (Δ) et (T), il vient

$$\begin{cases} k + h\sin\alpha\sin\theta = r\cos\alpha\sin\theta, \\ h + k\sin\alpha\sin\theta = r\cos\alpha\sin\theta, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$(3) \qquad k = h = \frac{r\cos\alpha\sin\theta}{1 + \sin\alpha\sin\theta}.$$

On aura l'équation de (S) en éliminant h, k et α entre les relations (2) et (3).

Posons $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = t$, on obtient pour t les deux valeurs

$$t = -\frac{h + \varepsilon r}{h + r\sin\theta}\sin\theta, \qquad \text{où} \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

La première des relations (2) s'écrit

$$h(1 + t^2) = y(1 - t^2) - 2tx,$$

$$h[(h + r\sin\theta)^2 + (h + \varepsilon r)^2\sin^2\theta] = y[(h + r\sin\theta)^2 - \sin^2\theta(h + \varepsilon r)^2] + 2x\sin\theta(h + \varepsilon r)(h + r\sin\theta).$$

Pour faire disparaître ε, il suffira de l'isoler et d'élever une fois au carré; on remplacera ensuite h par $x\sin\theta + z\cos\theta$, d'où une équation du 6e degré en x, y, z, dont les termes du 6e degré ne se détruisent pas. (S) est donc bien du 6e ordre.

F. A. ROUSSELET, école normale supérieure.

Bonnes solutions : MM. G. Lach, à Douai; L. Simon, à Fourmies.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1919)

ÉCOLE CENTRALE (*Suite*)

9936. — G est le centre de gravité d'un cône de révolution de poids P qui a un point fixe, savoir le sommet O; on applique en un point A situé sur l'une des génératrices, aux $\frac{3}{4}$ de la génératrice à partir du point O, une force $\frac{P}{2}$ verticale et dirigée vers le haut. Position d'équilibre.

9937. — Un corps solide de poids P est mobile autour d'un point fixe O; le maintenir en équilibre au moyen d'une force d'intensité F; comment doit être placée F pour que la pression sur le point d'appui soit maximum ou minimum?

9938. — Un cube pesant est soumis à son poids P et à une force horizontale F supposée appliquée au sommet le plus haut B de la diagonale AB. Le sommet A est fixe; trouver la position d'équilibre.

9939. — Un corps solide a un point fixe O; peut-on le maintenir en équilibre au moyen de trois forces placées sur trois droites données? Condition de possibilité.

9940. — On donne un corps solide ayant un point fixe et quatre droites : sur une des droites, une force donnée. Placer sur les trois autres des forces telles que le solide soit en équilibre.

9941. — Étant donnés trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz et deux forces, l'une F_1, parallèle à Oz, égale à -1 et appliquée en A (1, 0, 0), l'autre F_2, parallèle à Oz, d'intensité $+1$ et appliquée en B (0, 1, 0), comment déterminer le point O', tel qu'en fixant O et O', il y ait équilibre?

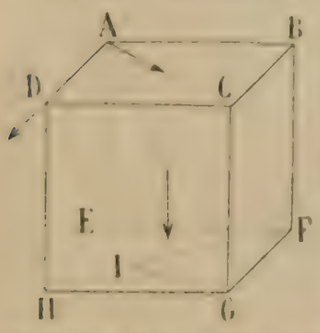
9942. — Équilibre d'un cube pesant dont les faces ABCD, A'B'C'D' sont horizontales ; le cube est mobile autour de BA' et il est soumis à une force dirigée suivant CD.

9943. — On donne un solide soumis au système (OR, OG) et un plan P passant par O ; trouver dans P un axe tel que, le solide pouvant tourner autour de cet axe et glisser le long de cet axe, il y ait équilibre.

9944. — Un corps solide peut glisser et tourner, sans frottement, autour de l'axe Oz : il est soumis 1° à l'action de son poids $P = 1$, parallèle à Oz et en sens contraire et appliqué au point A (1, 0, 0) ; 2° à une force $Q = 1$, parallèle à Oy et appliquée en B (0, 1, 0). Déterminer une force F, d'intensité 2, appliquée en un point C (0, 1, 1) et qui maintienne le système en équilibre.

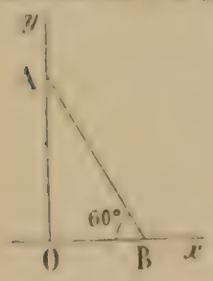
9945. — Un solide repose sur un plan P par un de ses points O et est soumis à un système de forces (OR, OG). Déterminer une force F parallèle à P et telle qu'il y ait équilibre.

9946. — On donne trois axes rectangulaires $Oxyz$ et deux points, l'un A sur Ox (a, 0, 0), l'autre B sur Oy (0, b, 0). Un solide reposant sur le plan des xy par les points O, A, B est soumis à l'action de trois forces : 1° $F\left(\frac{a}{2}, 0, 0; 0, P, P\right)$; 2° $F\left(0, \frac{b}{2}, 0; 0, Q, Q\right)$; 3° une force F' dans le plan $z = h$. Déterminer la force F' pour qu'il y ait équilibre.



9947. — Soit un cube homogène pesant reposant par sa base inférieure sur un plan horizontal par deux sommets E, G et un point I intérieur à la base. Déterminer une force suivant l'arête AD et une autre force issue de A et située dans la force ABCD, de façon à établir l'équilibre.

9948. — Un cylindre circulaire droit homogène et de poids P repose sur un plan horizontal par trois points A, B, C sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans la circonférence de base. On applique une force Q, située dans le plan tangent le long de la génératrice D et faisant avec cette génératrice un angle de 45°. Peut-on, sans détruire l'équilibre, appliquer une force R, formant avec Q un couple?



9949. — Une échelle AB de longueur l et de poids P fait un angle de 60° avec le sol ; elle s'appuie en A sur un mur vertical, et son extrémité inférieure B est rattachée au point O par un fil OB. Trouver la tension du fil (on ne tient pas compte des frottements en A et en B).

9950. — Sur une parabole $x^2 = y$, on prend le point A d'abscisse $x = 1$ et le point B, d'abscisse $x = -2$: AB est une barre homogène de poids $P = 3^{kg}$; elle peut tourner autour du point B et glisser sur la parabole par son autre extrémité A ; calculer la réaction en A.

9951. — Sur deux plans OA, OA', également inclinés sur l'horizon, reposent deux disques de même rayon, et de même poids p ; déterminer 1° les pressions en B et B' ; 2° les poussées des disques l'un sur l'autre.

Géométrie et Géométrie descriptive (M. Malloizel).

9952. — On donne sur une droite deux couples de points A et B, C et D ; déterminer un couple de points conjugués à la fois par rapport à AB et à CD.

9953. — Par deux points, mener un cercle orthogonal à un cercle donné.

9954. — Par un point A, on mène un cercle ω, orthogonal à un cercle donné O : 1° lieu du point de rencontre M de la corde commune aux deux cercles O et ω avec la tangente en A au cercle ω ; 2° lieu du centre ω de ce cercle.

9955. — Circonférence passant par un point et tangente à deux circonférences données.

9956. — Circonférence passant par deux points A et B et coupant deux circonférences O et O' sous des angles égaux.

9957. — Lieu des points d'un plan d'où l'on voit deux cercles sous le même angle ; lieu des points de l'espace d'où l'on voit deux sphères sous le même angle ; lieu des points d'où l'on voit trois sphères sous le même angle. Trouver les points d'où l'on voit quatre sphères sous des angles égaux.

9958. — Construire une sphère passant par l'intersection de deux sphères données et tangente à une droite donnée.

9959. — Déterminer une sphère connaissant deux plans tangents P et Q et le point de contact A du premier avec la sphère. Le plan P est donné par deux droites qui se coupent en (a, a) et le plan Q coïncide avec le plan horizontal. Faire l'épure.

9960. — Lieu des centres des sphères passant par deux points et tangentes à un plan.

9961. — Soient trois droites concourantes ; lieu des centres des sphères tangentes aux trois droites, enveloppe.

9962. — Déterminer une conique, connaissant deux tangentes et le cercle principal.

9963. — Construire une conique connaissant deux sommets et un point.

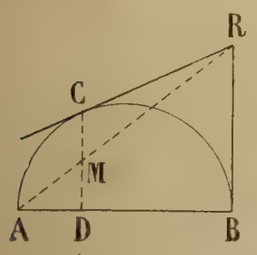
9964. — Construire une conique connaissant : 1° un axe et trois points A, B, C; 2° un axe, deux points A, B et la tangente en l'un d'eux; 3° un axe, un sommet A sur cet axe et deux points B et C (on cherchera le second sommet sur l'axe connu).

9965. — On donne deux points A, B d'un parallèle d'une surface de révolution et deux points C et D d'un autre parallèle; trouver l'axe. En supposant la surface de révolution du second degré, comment peut-on achever de la définir? Trouver alors les sommets de la méridienne.

9966. — Lieu des points équidistants d'une droite et d'un cercle.

9967. — Construire une parabole connaissant : 1° l'axe et deux points A et B; 2° l'axe, un point A et la tangente en ce point.

9968. — Soient trois points A, B, C et une droite D; déterminer une conique passant par ces trois points et admettant pour directrice la droite D.



9969. — Mener par un point A les tangentes à une hyperbole définie par ses asymptotes et un point B.

9970. — On considère un point C variable sur une circonférence de diamètre AB; soit R le point de rencontre des tangentes en B et C, CD la perpendiculaire abaissée du point C sur le diamètre AB; lieu du point de rencontre M de AR avec CD.

9971. — Mener par une droite AB un plan coupant deux plans donnés suivant deux droites rectangulaires.

9972. — On donne une sphère tangente au plan horizontal et dans ce plan un triangle ABC; déterminer le sommet S du tétraèdre SABC dont les quatre faces sont tangentes à la sphère.

9973. — Construire une droite connaissant un point (a, a'), sa projection horizontale ad, et sachant que cette droite $(ad, a'd')$ est perpendiculaire à une droite donnée $(bc, b'c')$.

9974. — Construire un carré, connaissant un côté $(ab, a'b')$ et la projection horizontale du côté issu du sommet (a, a').

9975. — On donne une droite (D, D') et un point (a, a'): construire un triangle équilatéral ayant pour sommet (a, a'), le côté opposé étant porté par la droite (D, D').

9976. — Construire un triangle équilatéral ABC, connaissant les sommets A et B et sachant que le sommet C est dans un plan donné P; faire l'épure.

9977. — Soit un segment $(ab, a'b')$; construire un carré ayant ce segment comme côté et un autre sommet dans un plan donné.

9978. — Construire un carré ayant pour diagonale un segment donné $(ac, a'c')$ et un troisième sommet dans un plan donné.

9979. — On donne un plan PαQ' et deux droites (A, A'), (B, B'); faire tourner PαQ' autour de (A, A'), jusqu'à ce qu'il soit devenu parallèle à (B, B').

9980. — On donne un plan PαQ et le rabattement sur le plan horizontal d'un cercle de ce plan; un point (s, s') est le sommet d'un cône ayant ce cercle pour base; intersection de ce cône avec une droite (Δ, Δ').

9981. — Un cône a comme sommet S et pour base un cercle de centre O, de rayon R et situé dans le plan AOB; trouver ses contours apparents.

9982. — Déterminer un cylindre ayant pour base une ellipse située dans le plan horizontal, connaissant deux points (a, a'), (b, b') de ce cylindre.

9983. — Trouver les contours apparents d'un cône de sommet A ayant pour base le cercle inscrit dans le triangle BCD.

9984. — Trouver les contours apparents d'un cône de sommet donné ayant pour base la section d'un cylindre donné par un plan donné.

9985. — Contours apparents d'un cône de sommet donné et ayant pour base la section d'une sphère par un plan.

9986. — Contours apparents d'un cylindre de révolution d'axe $(ab, a'b')$ et tangent à une droite $(cd, c'd')$.

9987. — Mener par la ligne de terre un plan faisant un angle donné avec le plan PαQ'.

9988. — Par deux points donnés A et B, faire passer un cylindre circonscrit à une sphère donnée.

9989. — Section plane d'un cône de révolution à axe vertical par le second plan bissecteur.

9990. — On donne un cône de révolution à axe vertical et une droite de l'espace; mener par la droite un plan coupant le cône suivant une parabole.

(A suivre.)

CONCOURS DE 1919 (*Suite.*)

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Cours préparatoires.

Algèbre et Analyse.

I. — **2367.** 1° Étudier la variation de la fonction

$$y = \frac{x - 1}{x\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$$

et construire la courbe représentative, en déterminant les valeurs de x qui rendent y maximum ou minimum.

2° Évaluer le volume de révolution engendré par l'aire comprise entre la courbe et les deux ordonnées correspondant à $x = \frac{1}{4}$ et $x = \frac{3}{4}$, quand cette aire tourne autour de Ox.

II. — **2368.** 1° Déterminer les coefficients a_i de la série $y = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots$ de façon qu'elle satisfasse à la relation $y'' = ax^2y$, où a est un paramètre.

2° Vérifier que la série obtenue est convergente.

3° Dans cette série, les deux quantités a_0, a_1 restent arbitraires : les déterminer de façon que pour $x = 0$, l'on ait $y = 1$, $y' = 0$. Soit y_1 la série particulière obtenue, où l'on fait en outre $a = 1$.

4° x étant supposé < 1 en valeur absolue, combien faut-il prendre de termes dans la série y_1 pour que leur somme représente y_1 avec une erreur plus petite que $\frac{1}{1\,000}$ en valeur absolue?

Géométrie analytique et mécanique.

I. — **2369.** Un point décrit la parabole cubique $y^3 = 3p^2x$ de telle façon que l'hodographe de son mouvement soit la parabole $y^2 - 2qx = 0$.

1° Équation du mouvement et accélération à chaque instant.

2° Lieu de l'extrémité du vecteur accélération ayant pour origine l'origine des coordonnées.

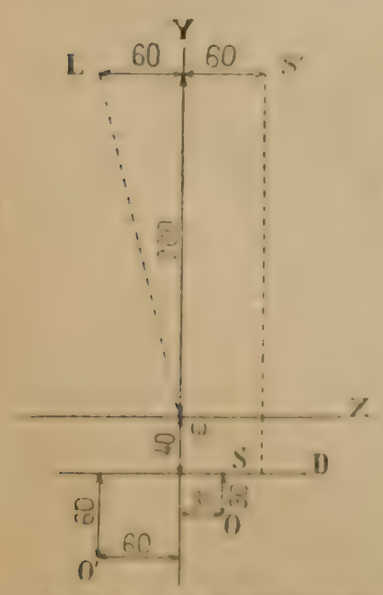
II. — **2370.** On considère, dans un plan, tous les cercles passant par un point fixe (A) et coupant une droite donnée (Δ) sous un angle constant V_0.

Déterminer, analytiquement et géométriquement :

1° le lieu des centres des cercles mobiles ;

2° l'enveloppe de ces cercles.

Géométrie descriptive.



Les cotes sont en millimètres.

2371. — On donne dans le plan horizontal deux circonférences tangentes d'une part à l'horizontale de front D située à 40^{mm} au-dessous du petit axe ωX de la feuille, et placées au-dessous de cette droite D. Ces circonférences sont tangentes d'autre part au grand axe ωY de la feuille. Celle de centre O et de rayon $R = 30^{mm}$ se projette à droite de ωY. Celle de centre O' et de rayon $R' = 60^{mm}$ se projette à gauche de ωY.

La circonférence de centre O est la base d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la droite de front projetée sur le plan vertical en ωL, le point L étant situé à 60^{mm} à gauche de ωY et à 200^{mm} au-dessus de ωX. La circonférence de centre O' est la base d'un cône de sommet S, S', le point S étant sur la droite D et le point S' se trouvant à 60^{mm} à droite de ωY et à 200^{mm} au-dessus de ωX.

On demande de représenter par ses deux projections le solide, supposé plein et opaque, commun au cône et au cylindre ainsi définis.

Ces projections seront tracées en noir (parties cachées en pointillé). Les lignes de construction, en traits rouges fins, indiqueront le mode de détermination d'un point courant et des points remarquables de l'intersection ainsi que de la tangente en ces points.

On tracera en noir un cadre de 270×420^{mm}.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

Coulommiers. — Imp. Paul BRODARD.

30e Année. Mars 1920. N° 6.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU 3e DEGRÉ

par **M. P. Maurice,** ingénieur, professeur de mathématiques, à Lyon.

Si l'on fait la transformation $x = X + \frac{B}{3A}$ dans l'équation

$$(1) \qquad AX^3 + BX^2 + CX + D = 0, \qquad (A \neq 0)$$

on obtient l'équation

$$(2) \qquad x^3 + px + q = 0, \qquad p = \frac{3AC - B^2}{3A^2}, \qquad q = \frac{27A^2D - 9ABC + 2B^3}{27A^3},$$

que l'on sait résoudre de plusieurs manières.

$3AC - B^2 = 0$. — Dans le cas particulier où $3AC - B^2 = 0$, l'équation (2) se réduit à une équation binome dont la solution est

$$r^3 = 1, \qquad x = r.\sqrt[3]{-q}, \qquad q = \frac{D}{A} - \frac{B^3}{27A^3}, \qquad X = -\frac{B}{3A} + r.\sqrt[3]{\frac{B^3}{27A^3} - \frac{D}{A}}.$$

$3AC - B^2 \neq 0$. — Dans le cas général où l'équation (1) n'est pas réduite à la forme binome par la transformation ci-dessus indiquée, on a $pq \neq 0$; en particulier, $3AC - B^2$ n'est pas nul.

La méthode ici proposée consiste à déterminer deux nombres réels ou imaginaires a et b tels que la formule

$$(3) \qquad r^3 - 1 = 0, \qquad X = -\frac{B}{3A} + r.\sqrt[3]{ab^2} + r^2.\sqrt[3]{ba^2},$$

donne, pour chaque valeur de r, une et une seule racine de l'équation (1).

La détermination des deux radicaux cubiques qui entrent dans cette formule sera précisée : si a et b sont des nombres réels, on prendra pour chaque radical sa détermination réelle; dans toute autre hypothèse on choisira, pour chaque radical, la détermination dont le plus petit argument positif est moindre que $\frac{2\pi}{3}$. Dans ces conditions, chaque valeur de r ne fournit, au moyen de la formule (3), qu'une seule valeur de X ou de x, en tout trois valeurs, généralement distinctes; calculons x^3 :

$$(4) \qquad x^3 = \left[X + \frac{B}{3A}\right]^3 = ab^2 + ba^2 + 3ab\left[r.\sqrt[3]{ab^2} + r^2.\sqrt[3]{ba^2}\right],$$

et en tenant compte de la relation (3) elle-même on trouve que les trois valeurs de x satisfont à l'équation

$$(5) \qquad x^3 - 3abx - ab(a + b) = 0.$$

Il suffit, pour déterminer a et b, d'identifier les équations (2) et (5), ce qui donne

$$ab = -\frac{p}{3}, \qquad a+b = \frac{3q}{p}, \qquad (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = 4.\frac{\Delta}{\left(\frac{p}{3}\right)^2},$$

$$\Delta = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2, \qquad a = \frac{\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}{\frac{p}{3}}, \qquad b = \frac{\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}{\frac{p}{3}}.$$

En portant ces valeurs dans la formule (3) on retrouve la formule de Cardan.

Discussion. — Si Δ est positif (les coefficients sont supposés réels), $r = 1$ donne une racine réelle; les deux autres racines, qui correspondent à $r = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, sont imaginaires conjuguées.

Si $\Delta = 0$, $a = b = \frac{3q}{2p}$, l'équation (1) admet une racine double et une racine simple.

Si Δ est négatif, les valeurs de a et b sont imaginaires conjuguées. On posera alors

$$a = u(\cos v - i\sin v), \qquad b = u(\cos v + i\sin v).$$

$$ab = u^2 = -\frac{p}{3}, \qquad u = \sqrt{-\frac{p}{3}}, \qquad \cos v = \frac{a+b}{2u} = \frac{3q}{2p\sqrt{-\frac{p}{3}}} \quad (p \text{ est négatif}).$$

$$ab^2 = u^3(\cos v + i\sin v), \qquad ba^2 = u^3(\cos v - i\sin v),$$

$$r.\sqrt[3]{ab^2} = u(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad r^2.\sqrt[3]{ba^2} = u(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$

L'angle φ est défini par l'égalité

$$\varphi = \frac{2k\pi}{3} + \frac{v}{3}, \qquad k = (0, 1, \text{ ou } -1).$$

Il en résulte la formule

$$(3') \qquad X = -\frac{B}{3A} + 2u\cos\varphi,$$

qui exprime les trois racines réelles de l'équation (1) dans le cas actuel.

En résumé, nous trouvons trois genres différents d'équations du 3e degré :

1er genre. Il est caractérisé par la condition $q = 0$ ou

$$2B^3 - 9ABC + 27A^2D = 0.$$

Le premier membre de l'équation (1) est divisible sans reste par le binome $3AX + B$, et la division abaisse le degré de cette équation au second degré.

2e genre. $p = 0$ ou $3AC - B^2 = 0$. L'équation (1) est réductible à la forme binome si son premier membre n'est pas un cube parfait.

3e genre. $pq = 0$. C'est le cas où l'équation est résolue par une formule telle que (3) ou (3').

Appliquons ce qui précède à quelques exemples.

Exemple I. — L'équation proposée est

$$(1) \qquad 27x^3 - 63x^2 + 49x - 5 = 0.$$

$$A = 27, \qquad B = -63, \qquad C = 49, \qquad 3AC - B^2 = 0.$$

Les trois premiers termes de l'équation sont ceux d'un cube parfait; l'équation peut s'écrire

$$(2) \qquad \left(3x - \frac{7}{3}\right)^3 = 7^3 + 5,$$

d'où l'on déduit

$$(3) \qquad x = \frac{7}{9} + r\left[\frac{7}{3} + \frac{5}{3^2.7^2} - \frac{5^2}{3^5.7} + \frac{5^3}{3^8.7^5} - \dots\right], \qquad r = 1.$$

formule qui donne les trois racines sous forme de séries convergentes. En prenant trois termes de la parenthèse et $r=1$, on obtient la racine réelle à une demi-unité du sixième ordre près :

$$x = 3{,}122063.$$

Exemple II. — On donne à résoudre l'équation

$$(1) \qquad 2x^3 + 3x^2 + 5x + 2 = 0,$$

$$A = 2, \qquad B = 3, \qquad C = 5, \qquad D = 2, \qquad B^2 - 3AC \neq 0,$$

mais

$$2B^3 - 9ABC + 27A^2D = 0.$$

On doit en conclure que l'une des racines de l'équation (1) est $-\frac{B}{3A} = -\frac{1}{2}$ et que les deux autres racines sont fournies par l'équation du second degré

$$(2) \qquad x^2 + x + 2 = 0, \qquad \text{ou} \qquad (2x+1)^2 + 7 = 0, \qquad x = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}.$$

(*A suivre.*)

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2226. — *Une spirale logarithmique se déplace dans son plan; elle passe par un point donné et reste tangente à une droite fixe.*

On demande :

1° *Le lieu décrit par le point asymptotique de la spirale;*

2° *Quel est, dans le plan fixe et dans le plan mobile, le lieu des centres instantanés de rotation.*

Construction et discussion des courbes obtenues.

Nous n'avons pas reçu de solution satisfaisante de cette question. Vu l'abondance des matières, nous laisserons cette question de côté. Si un de nos correspondants trouve une bonne solution, intéressante, nous pourrons la publier plus tard. *N. D. L. R.*

2230. — *Étant donnée une ellipse, en un point* M *quelconque de l'ellipse on mène la tangente* MT *et la droite* MQ *symétrique de* MT *par rapport à la perpendiculaire au grand axe menée par* M. 1° *Lieu du milieu de la portion de* MQ *comprise dans l'ellipse;* 2° *lieu du pôle de la droite* MQ *par rapport à l'ellipse;* 3° *enveloppe de la droite* MQ; *aire de la courbe obtenue;* 4° *lieu de l'intersection* R *de* MQ *avec la perpendiculaire menée par* O *à la tangente* MT.

A part la quatrième partie, ce problème peut se traiter tout entier dans le cercle homographique de l'ellipse, et les résultats obtenus se projettent ensuite orthogonalement sur le plan de l'ellipse. Par le calcul, le problème n'est pas plus difficile dans l'ellipse que dans le cercle. Aussi allons-nous d'abord le traiter directement. Nous nous servirons de l'anomalie excentrique du point M.

1° Alors les coordonnées de M sont $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$ et l'équation de la tangente MT est

$$\frac{x\cos\varphi}{a} + \frac{y\sin\varphi}{b} - 1 = 0;$$

celle de la droite MQ,

$$\frac{x\cos\varphi}{a} - \frac{y\sin\varphi}{b} - \cos 2\varphi = 0.$$

D'autre part, le milieu de MQ est sur le diamètre conjugué de cette droite,

$$f'_x + mf'_y = 0,$$

ou

$$\frac{x}{a^2} + \frac{b}{a}\cot\varphi\,\frac{y}{b^2} = 0.$$

Cette dernière équation se simplifie et s'écrit

$$\frac{x \sin\varphi}{a} - \frac{y \cos\varphi}{b} = 0;$$

jointe à celle de MQ, elle donne les coordonnées du milieu I de MQ en fonction de φ.

Nous avons ainsi successivement

$$\frac{x}{a\cos\varphi} = \frac{y}{-b\sin\varphi} = \cos 2\varphi,$$

puis,

$$(1) \quad \begin{cases} x = a\cos\varphi\cos 2\varphi, \\ y = -b\sin\varphi\cos 2\varphi. \end{cases}$$

Ce sont les équations paramétriques du lieu. Les deux changements de φ en $-\varphi$, de φ en $\pi-\varphi$, manifestent chacun une symétrie, par rapport à Ox, puis, par rapport à Oy. Ils permettent de réduire successivement l'intervalle initial, de $-\pi$ à $+\pi$, d'abord de 0 à π, puis de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Dans cet intervalle, il y a trois valeurs remarquables : 0, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$. Pour $x=0$ ou $0+\varepsilon$, x est égal à a et y est nul et négatif. De 0 à $\frac{\pi}{4}$, x reste positif, y, négatif. Pour $\varphi=\frac{\pi}{4}$, x et y deviennent nuls et changent de signes. De $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{2}$, x reste négatif, y, positif; et, pour, $\varphi=\frac{\pi}{2}$, x devient nul et y, égal à b. Nous pouvons donc tracer la courbe; il n'y a plus qu'à vérifier par l'étude des dérivées et à achever par symétrie. Les dérivées sont

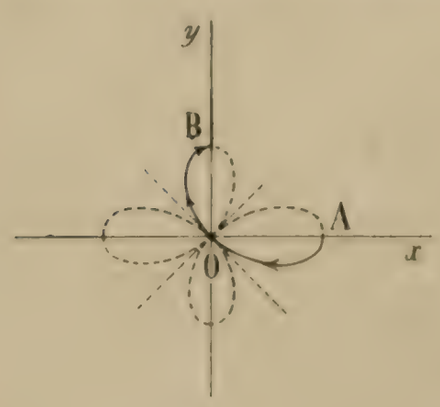


Fig. 1.

$$\frac{dx}{d\varphi} = -a\sin\varphi(6\cos^2\varphi - 1),$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = -b\cos\varphi(1 - 6\sin^2\varphi);$$

elles montrent bien que $\frac{dy}{d\varphi}$ s'annule pour une valeur de φ plus petite que $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{dx}{d\varphi}$, après $\frac{\pi}{4}$, ce qui est d'accord avec la forme adoptée. La tangente à l'origine est $y = -\frac{b}{a}x$. Cette courbe a l'aspect d'une rosace; c'est d'ailleurs la projection d'une rosace à quatre branches, qui est le lieu trouvé quand $a=b$, c'est-à-dire dans le cercle homographique

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)^2.$$

2° Le pole de MQ est à l'intersection de la tangente MT avec le diamètre conjugué de MQ. Ce point P est fourni par les deux équations

$$\frac{x\sin\varphi}{a} + \frac{y\cos\varphi}{b} = 0,$$

$$\frac{x\cos\varphi}{a} + \frac{y\sin\varphi}{b} - 1 = 0;$$

de là, nous déduisons

$$\frac{x}{a\cos\varphi} = \frac{y}{b\sin\varphi} = \frac{1}{\cos 2\varphi},$$

$$(2) \quad \begin{cases} x = a\dfrac{\cos\varphi}{\cos 2\varphi}, \\ y = -b\dfrac{\sin\varphi}{\cos 2\varphi}. \end{cases}$$

Ces deux équations sont les équations paramétriques du lieu de P.

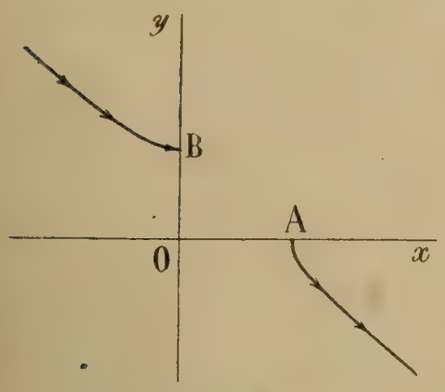


Fig. 2.

Mêmes remarques que tout à l'heure au point de vue des symétries et de la réduction de l'intervalle. Les valeurs particulières sont les mêmes et nous pouvons tracer tout de suite le schéma suivant (fig. 2).

Les dérivées sont

$$\frac{dx}{d\varphi} = a \sin\varphi \frac{2\cos^2\varphi + 1}{\cos^2 2\varphi},$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = -b\cos\varphi \frac{1 + 2\sin^2\varphi}{\cos^2 2\varphi};$$

leurs signes justifient la forme adoptée.

Il reste à trouver l'asymptote.

Nous avons $\frac{y}{x} = -\frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi$, et, pour $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\lim\frac{y}{x} = -\frac{b}{a}$.

Formons $y + \frac{b}{a}x = -b\frac{\sin\varphi - \cos\varphi}{\cos 2\varphi} = +\frac{b}{\cos\varphi + \sin\varphi}$; la limite est $\frac{b}{\sqrt{2}}$; d'autre part,

$$\cos\varphi + \sin\varphi = \sqrt{2}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right),$$

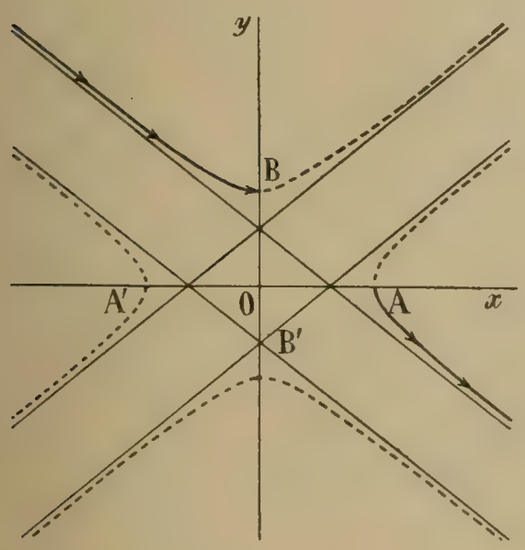


Fig. 3.

et nous voyons que $y + \frac{b}{a}x - \frac{b}{\sqrt{2}}$, qui est égal à

$$\frac{b}{\sqrt{2}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)} - \frac{b}{\sqrt{2}},$$

est positif au voisinage de $\varphi = \frac{\pi}{4}$. La courbe est donc au-dessus de son asymptote, et la courbe totale a la forme ci-contre (fig. 3). Elle a l'aspect d'une kreuzcurve. C'est d'ailleurs la projection de celle qui correspond au cas de $a = b$, c'est-à-dire que l'on trouve quand on traite le même problème dans le cercle homographique.

3° La droite MQ a pour équation

$$\frac{x\cos\varphi}{a} - \frac{y\sin\varphi}{b} - \cos 2\varphi = 0.$$

Nous aurons son enveloppe en dérivant cette équation par rapport à φ et résolvant les deux équations par rapport à x et à y. Cela donne

$$\frac{x\cos\varphi}{a} - \frac{y\sin\varphi}{b} - \cos 2\varphi = 0,$$

$$\frac{x\sin\varphi}{a} + \frac{y\cos\varphi}{b} - 2\sin 2\varphi = 0,$$

$$\frac{x}{a} = \cos\varphi\cos 2\varphi + 2\sin\varphi\sin 2\varphi,$$

$$\frac{y}{b} = 2\cos\varphi\sin 2\varphi - \sin\varphi\cos 2\varphi.$$

et enfin

$$(3)\quad \begin{cases} x = a\cos\varphi(1 + 2\sin^2\varphi), \\ y = b\sin\varphi(1 + 2\cos^2\varphi). \end{cases}$$

Ce sont les équations paramétriques de l'enveloppe de MQ.

Nous avons exactement les mêmes remarques au point de vue des symétries et de l'intervalle de variation de φ que dans les exemples précédents. Les dérivées sont

$$\frac{dx}{d\varphi} = 3a\sin\varphi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi),$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = 3b\cos\varphi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi);$$

elles mettent en évidence un point de rebroussement qui correspond à $\cos\varphi = \sin\varphi$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, et la courbe a l'aspect d'une hypocycloïde à quatre rebroussements (fig. 4). C'est d'ailleurs la projection d'une hypocycloïde à quatre rebroussements, de celle qui correspond au cas de $a = b$, c'est-à-dire que l'on trouve dans le cercle homographique de l'ellipse.

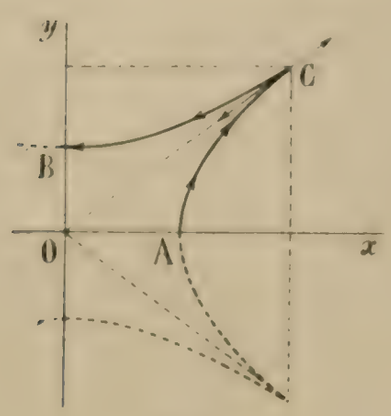


Fig. 4.

Nous aurons le quart de l'aire de cette courbe en calculant l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\,dy - y\,dx),$$

et l'aire totale en calculant

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\,dy - y\,dx),$$

$$A = 6ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2\varphi\,d\varphi,$$

ou

$$A = 3ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 4\varphi)\,d\varphi.$$

Nous trouvons ainsi $A = \frac{3\pi ab}{2}$; c'est les $\frac{3}{2}$ de l'aire de l'ellipse.

4° La perpendiculaire abaissée sur la droite MT du point O a pour équation

$$\frac{x}{b\cos\varphi} = \frac{y}{a\sin\varphi};$$

en résolvant cette équation avec

$$\frac{x\cos\varphi}{a} - \frac{y\sin\varphi}{b} - \cos 2\varphi = 0,$$

nous avons les coordonnées du point R :

$$\frac{x}{b\cos\varphi} = \frac{y}{a\sin\varphi} = \frac{\cos 2\varphi}{\frac{b}{a}\cos^2\varphi - \frac{a}{b}\sin^2\varphi},$$

$$(4)\quad \begin{cases} x = ab^2\dfrac{\cos 2\varphi\cos\varphi}{b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi}, \\ y = a^2b\dfrac{\cos 2\varphi\sin\varphi}{b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi}. \end{cases}$$

Ce sont les équations paramétriques du lieu du point R.

Elles donnent lieu aux mêmes remarques que les précédentes. Dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ les valeurs remarquables sont $0, \alpha, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$.

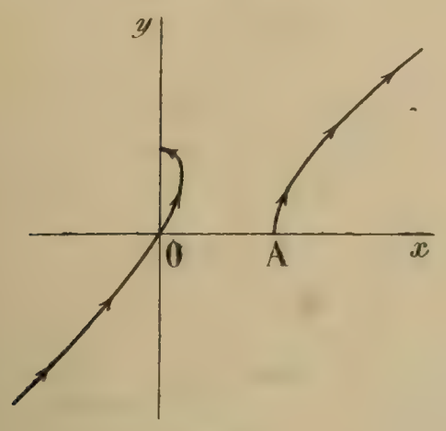


Fig. 5.

Pour $\varphi = 0$, ou $0 + \varepsilon$,

$$x = a, \qquad y = +\varepsilon;$$

de 0 à α, x et y restent positifs; pour $\varphi = \alpha - \varepsilon$, x et y sont égaux à $+\infty$; pour $\varphi = \alpha + \varepsilon$, x et y sont égaux à $-\infty$; pour $\varphi = \frac{\pi}{4}$, x et y sont nuls; et, enfin, pour

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \qquad x = 0, \qquad y = b.$$

Nous avons donc le schéma ci-contre (fig. 5). Il reste à en vérifier l'exactitude et à chercher l'asymptote.

L'étude des dérivées est assez compliquée; nous la laisserons de côté et nous bornerons à l'asymptote. Nous avons

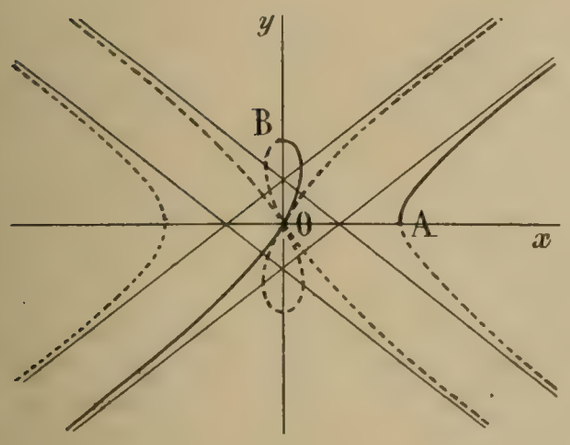


Fig. 6.

$$\frac{y}{x} = \frac{a}{b}\operatorname{tg}\varphi, \qquad \lim_{\varphi=\alpha}\frac{y}{x} = 1;$$

$$y - x = \frac{ab\cos 2\varphi}{b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi}(a\sin\varphi - b\cos\varphi),$$

$$y - x = -\frac{ab\cos 2\varphi}{b\cos\varphi + a\sin\varphi},$$

et, pour $\varphi = \alpha$,

$$\frac{\sin\alpha}{b} = \frac{\cos\alpha}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\lim(y - x) = -\frac{a^2 - b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}.$$

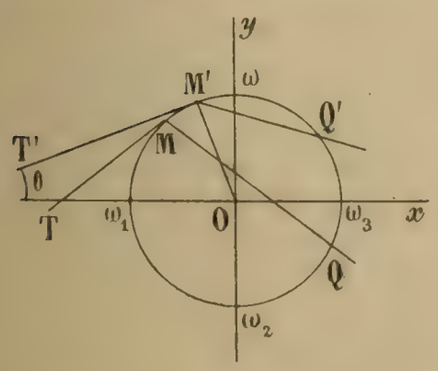
L'asymptote a donc pour équation.

$$y = x - \frac{a^2 - b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}.$$

La courbe a dès lors la forme ci-contre (fig. 6), ou une forme approchée. Ce point ne peut être élucidé complètement que par l'étude attentive des dérivées.

Bonnes solutions analytiques : MM. Roux, au Creusot; L. Naucelle, à la Châtre; M. Roux, à Lille; G. Lach, à Douai. G. Bailleul, à Houplines; Jolly, à Honfleur.

Solution géométrique. — Nous allons résoudre le problème dans le cercle homographique de l'ellipse et projeter les résultats sur le plan de l'ellipse. Soient MQ et M'Q' deux positions voisines de la droite MQ et $d\alpha$ la rotation de MT, c'est-à-dire l'arc MM'; il est évident que l'arc QQ' est égal au triple de $d\alpha$ et de sens contraire; si donc nous appelons cet arc $d\beta$, nous aurons $d\beta + 3d\alpha = 0$, et $\beta + 3\alpha = C$, en appelant α l'arc ωM et β l'arc ωQ, comptés tous deux dans un sens positif donné à partir d'une origine ω. Cette rotation se réduit à $\beta + 3\alpha = 0$, en prenant pour ω le point où α et β sont nuls en même temps. Cette relation caractérise l'hypocycloïde à quatre rebroussements qui est circonscrite au cercle donné et le touche aux quatre points $\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3$. C'est l'enveloppe de MQ.



Le lieu du milieu de MQ est la podaire de cette hypocycloïde par rapport au point O. C'est donc une rosace à quatre branches.

Le lieu du pôle de MQ est la polaire réciproque de cette enveloppe par rapport au cercle. C'est une kreuzcurve dont les sommets sont les quatre points ω, ω_1, ω_2, ω_3.

La quatrième partie, nous l'avons déja dit, n'a pas d'analogue simple dans le cercle.

On peut voir autrement que la droite MQ enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements. Nous prendrons M'Q' qui est plus commode sur la figure. Appelons alors θ l'angle M'T'x, l'inclinaison de M'T' sur $x'x$; comme OM' est perpendiculaire sur M'T', l'angle de OM' avec M'Q', est égal à $\frac{\pi}{2} - 2\theta$. L'angle de OM' avec la bissectrice de l'angle yOx est $\frac{\pi}{2} - \theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \theta$; c'est la moitié du précédent. Donc le point M' est le milieu de la portion interceptée entre les deux bissectrices de l'angle des axes sur la droite M'Q'. Cette portion est donc égale à 2OM', elle est constante et la droite M'Q' enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements dont les deux bissectrices de l'angle des axes sont les tangentes de rebroussement.

Il n'y a plus qu'à faire tourner la figure d'un angle ω égal à $\arccos\frac{b}{a}$ autour du grand axe de l'ellipse, $x'x$, puis projeter sur le plan de l'ellipse, pour avoir les résultats obtenus antérieurement.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

2298. — *Un tore ayant pour axe la ligne de terre, on en conserve la partie qui se trouve au-dessus du plan horizontal et en avant du plan vertical de projection. Ce quart de tore est coupé par un paraboloïde hyperbolique. Celui-ci a pour directrices une verticale et une droite de bout, toutes deux bitangentes au tore, et rencontrant la ligne de terre : la verticale à droite, la ligne de bout à gauche. Il a pour plan directeur le plan bissecteur du dièdre qui a pour faces le demi-plan vertical situé au dessus de la ligne de terre et le demi-plan horizontal situé en arrière de la ligne de terre* (**second bissecteur**).

Le solide formé par le quart de tore est coupé par le paraboloïde en deux parties. Représenter celle de ces parties qui est comprise entre le paraboloïde et le plan horizontal.

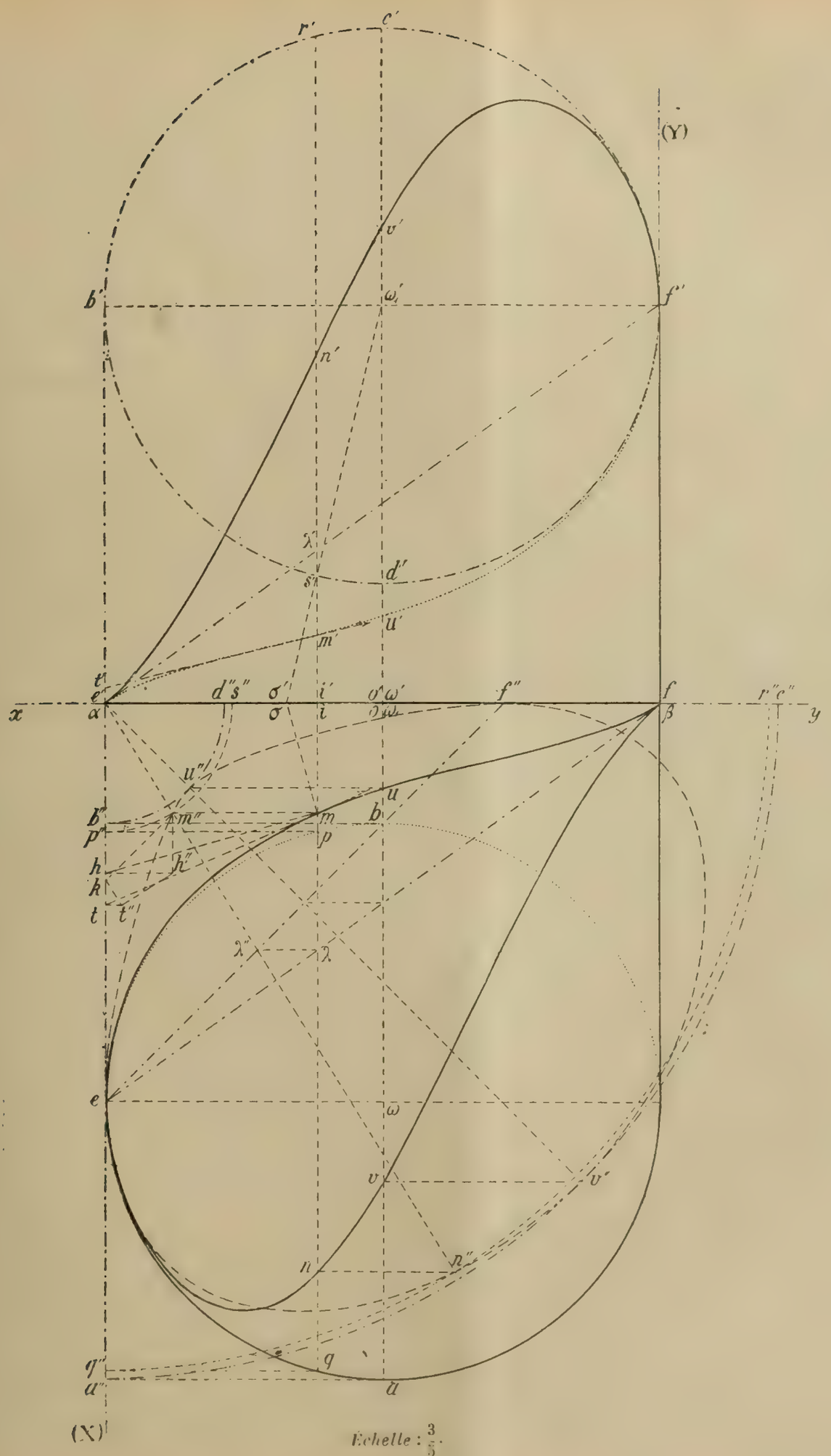
On prendra pour ligne de terre le petit axe de la feuille. Le centre du tore est au centre de la feuille. Le rayon du cercle générateur est de 7cm et le rayon du cercle de gorge est de 3cm.

N. B. — *Pour déterminer des points de la courbe commune au tore et au paraboloïde, on pourra prendre des plans auxiliaires de profil ou bien passant par la ligne de terre.*

(*École Polytechnique*, 1912.)

Le quart de tore, avant d'être entaillé, serait provisoirement représenté par les deux cercles (ω et ω_1), suivant lesquels il s'appuie sur les plans de projection, puis par les portions de droites perpendiculaires à xy et tangentes à ces cercles, qui sont les projections des quarts de parallèles limites compris dans le premier dièdre.

Le paraboloïde demande à être examiné plus attentivement. Désignons par (X) et (Y) les deux directrices données, qui sont situées respectivement dans le plan horizontal et le plan vertical, et rencontrent xy aux centres α et β des deux parallèles limites. Les génératrices du système auquel elles appartiennent admettent un plan directeur de profil qui est ainsi perpendiculaire au premier, de sorte que le paraboloïde est équilatère. Pour construire ces génératrices du second système, on n'aura qu'à déterminer *a priori* deux droites particulières du premier système. La ligne de terre répond évidemment à la question; nous en obtiendrons une seconde en coupant (X) et (Y) par un plan parallèle au second bissecteur. Nous l'avons fait passer, sur l'épure, par le point le plus à gauche (e, e') du cercle (ω), et, par suite, par le point le plus à droite (f, f') du cercle (ω_1), ce qui donne la droite (ef, $e'f'$).



Echelle : $\frac{3}{5}$.

Cela posé, on voit immédiatement que le centre (o, o') du tore, milieu de $\alpha\beta$, est le sommet du paraboloïde, car les deux génératrices de ce point sont deux axes de symétrie. D'abord, la symétrie par rapport à la ligne de terre transforme en elle-même chaque génératrice de profil. Ensuite la génératrice de profil (Z), qui joint le point (o, o') au milieu de $(ef, e'f')$, est aussi l'axe d'une symétrie qui échange les directrices (X) et (Y) et conserve le second bissecteur, sans modifier par conséquent la définition du paraboloïde.

L'axe du paraboloïde, intersection des plans directeurs menés par le centre du tore, est la droite de profil menée par ce point dans le second bissecteur.

Par suite de la symétrie simultanée du tore et du paraboloïde par rapport à la ligne de terre, la courbe d'intersection *complète* des deux surfaces admettrait aussi cet axe, mais nous n'aurons à en représenter que la moitié, et cette symétrie n'est pas révélée sur l'épure. Au contraire, la symétrie par rapport à (Z) fait que les deux projections de la portion de la courbe située dans le premier dièdre seront symétriques par rapport à o, comme on pourrait d'ailleurs le vérifier sur les tracés ultérieurs.

Enfin observons que, les plans de projection étant tous deux perpendiculaires au plan directeur de profil, le paraboloïde n'a pas de contours apparents.

Construction d'un point de l'intersection. — Vu le rôle que doivent jouer les parallèles du tore, il est indispensable de faire usage d'un plan auxiliaire de projection perpendiculaire à son axe. Pour ménager une place suffisante au rabattement de ce plan, nous prendrons comme nouvelle ligne de terre la directrice (X). Le nouveau contour apparent du tore, emprunté aux équateurs, sera constitué en projection par les quarts de cercles $a''c''$ et $b''d''$, que complètent les droites $a''b''$, $c''d''$ figurant les sections.

Nous allons constater que les deux méthodes proposées dans l'énoncé conduisent aux mêmes tracés. Imaginons d'abord un plan auxiliaire mené par la ligne de terre; ce sera un plan tangent au paraboloïde, coupant cette surface suivant une autre génératrice de profil, dont nous n'aurons qu'à prendre les points de rencontre avec les parallèles du tore situés dans le même plan de profil. Donnons-nous donc la projection verticale auxiliaire $\alpha\lambda''$ du plan sécant dont il s'agit: elle rencontre ef'' en un point λ'' rappelé en λ sur ef et, dans le premier système, la ligne de rappel $\lambda\lambda'$ coïncide avec les deux projections de notre génératrice de profil. Sur le nouveau plan vertical, les parallèles correspondants du tore sont représentés par les quarts de cercles $p''s''$ et $q''r''$, rencontrant $\alpha\lambda''$ aux points m'' et n'', d'où l'on déduit, dans le système définitif, les points (m, m') et (n, n') de la courbe.

Le résultat serait le même si l'on avait commencé par couper les deux surfaces par le plan de profil $\lambda\lambda'$.

Tangente en un point de la courbe. — On aura un point de la tangente en (m, m') en prenant l'intersection des traces des deux plans tangents en ce point sur un plan quelconque. Au moins pour des points assez rapprochés de la ligne de terre, il y a avantage à prendre ces traces sur le plan vertical (X). Pour le tore, nous aurons d'abord une perpendiculaire $h''t''$ à la trace $\alpha\lambda''$ du plan méridien. Elle passe par la trace h' de l'horizontale menée par (m, m'') dans le plan tangent. On obtient la projection horizontale de cette droite en construisant d'abord le sommet (σ, σ') du cône des normales, au moyen d'une génératrice de contour apparent telle que $\omega'_1 s'$, et en menant ensuite la perpendiculaire mh à $m\sigma$.

Quant au paraboloïde, son plan tangent est déterminé par la génératrice de profil (m, m') et la droite menée par (m, m') parallèlement au second bissecteur de manière à s'appuyer sur (X). La projection auxiliaire $m''k$ de cette droite, parallèle à ef'', rencontre (X) au point k, qui appartient à la trace cherchée. Celle-ci est la parallèle menée de k à la projection $\alpha m''$ de la génératrice de profil, et rencontre $h''t'$ au point t'', rappelé en t sur (X), puis en t' dans le premier système. Nous aurons ainsi en m et m' les tangentes mt et $m't'$.

Éléments remarquables. — Nous n'avons que trois plans de profil remarquables : celui des équateurs et ceux des parallèles limites.

Le premier contient la génératrice de profil du sommet du paraboloïde, sur laquelle se trouvent les points (u, u'), (v, v'). Ceux-ci n'auraient même une réelle importance que pour la projection auxiliaire de la courbe, que nous avons figurée comme résultat accessoire.

Le parallèle limite (z) donne dans le paraboloïde la génératrice (X), tangente au tore au point (e, e') et, par suite, tangente à la courbe. En e', la projection verticale présentera donc un rebroussement, dont la tangente sera la trace du plan osculateur. Sur l'autre parallèle limite, on aura une singularité analogue, conforme d'ailleurs à la symétrie signalée.

Le plan osculateur en (e, e') nous est donné immédiatement par le théorème de Meusnier. Le plan normal au tore, mené par (X), est le plan horizontal de projection, qui donne le cercle méridien (ω). Comme le plan normal au paraboloïde contenant la même droite donne une section de rayon infini, la perpendiculaire abaissée de (ω, ω') sur le plan osculateur cherché se confond avec la perpendiculaire au plan tangent du paraboloïde, dont la trace verticale est ef, puisqu'il contient la génératrice $(ef, e'f')$. Il en résulte que $e'f'$ est

la tangente de rebroussement en e'. De plus, le cercle (ω) est osculateur en e à la projection horizontale de la courbe.

Ces conclusions résultent directement des constructions qui donnent un point quelconque de la courbe. Si l'on se reporte à la détermination des points (m, m'), (n, n') situés dans un plan de profil quelconque, on constate que les segments pm, qn sont dirigés vers la ligne de terre. Donc, dans le voisinage de e, les arcs em, en sont l'un extérieur, l'autre intérieur au cercle tangent (ω), qui traverse ainsi la courbe projection au point e. C'est le caractère du plan osculateur. Enfin, on s'assure que, le point λ'' étant situé entre m'' et n'', λ' est également entre m' et n', de sorte que la droite $e'f'$ sépare les deux branches $e'm'$ et $e'n'$, et donne la tangente de rebroussement. (J. L.).

Bonne épure de M. Mennessier, à Évreux.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1919)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (*Suite.*)

10221. — On donne un cône de révolution engendré par la ligne de terre en tournant autour d'une droite située dans le deuxième bissecteur. Déterminer les contours apparents de ce cône. Intersection avec une parallèle à la ligne de terre.

— **222.** — On donne un cône de révolution à axe vertical et une droite. Mener par cette droite un plan qui coupe le cône suivant une hyperbole équilatère.

— **223.** — Plans tangents communs à deux cônes de révolution de même sommet; l'un des axes est vertical et l'autre de bout.

— **224.** — On donne une parabole dans le plan horizontal. Trouver le sommet d'un cône de révolution passant par cette parabole, sachant que ce point est situé dans un plan donné par ses traces.

— **225.** — On donne une sphère, une droite D dans le plan horizontal et un point a de cette droite. Où doit être placé un point lumineux S pour que l'ombre portée de la sphère sur le plan horizontal soit une parabole tangente en a à la droite D?

— **226.** — Construire un cône de révolution connaissant son sommet, son axe et sachant qu'il est tangent à un cylindre de révolution à axe vertical.

— **227.** — On donne une sphère et deux droites. Mener à la sphère un plan tangent qui rencontre les droites et la ligne de terre sous le même angle.

— **228.** — On donne trois points par leurs projections horizontales et leurs cotes. Trouver le centre de la sphère qui passe par ces points et qui est tangente au plan horizontal.

— **229.** — Construire la droite conjuguée d'une droite située dans le deuxième bissecteur par rapport à une sphere dont le centre est sur la ligne de terre.

— **230.** — On donne un plan par ses traces et un cercle situé dans ce plan et défini par son rabattement. Construire une sphère passant par ce cercle et tangent à la ligne de terre.

— **231.** — On donne deux sphères par leurs contours apparents; déterminer les projections de leur intersection.

— **232.** — On donne deux cercles : l'un, dans le plan vertical, l'autre, dans le plan horizontal. Faire passer un cône par ces deux cercles.

— **233.** — Ombre au flambeau d'un ellipsoïde dont l'axe est de bout.

— **234.** — On considère un tore de collier nul et dont l'axe est de bout. Trouver l'ombre au soleil. Intersection avec le deuxième bissecteur.

— **235.** — On donne un paraboloïde de révolution à axe de bout. Construire le rayon réfléchi d'un rayon lumineux.

— **236.** — Intersection de deux cônes de révolution ayant chacun pour demi-angle au sommet 45°, ayant leurs axes perpendiculaires; le sommet de l'un est sur l'axe de l'autre.

— **237.** — Trouver l'intersection d'un tore à axe de front avec une sphère tangente au tore et ayant son centre dans le plan de front de l'axe.

— **238.** — On considère un paraboloïde de révolution à axe vertical et le cylindre de bout qui s'appuie sur la section faite par le premier bissecteur. Intersection des deux surfaces.

— **239.** — Construire le rayon réfléchi d'un rayon lumineux qui tombe sur un paraboloïde hyperbolique défini par deux génératrices et un plan directeur horizontal.

— **240**. — On donne une verticale. Chercher dans le plan vertical une droite telle qu'en faisant tourner la verticale autour de cette droite, la surface obtenue soit coupée par le plan horizontal suivant une hyperbole équilatère.

— **241**. — On donne un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal. Construire le lieu du point d'intersection de deux génératrices rectangulaires.

(A suivre.)

QUESTIONS PROPOSÉES

2372. — On considère un point M variable sur une ellipse et le cercle MFF' passant par le point M et les deux foyers.

1° La parallèle au grand axe menée par le centre du cercle coupe ce cercle en deux points dont le lieu est une hyperbole équilatère.

2° Le lieu de l'orthocentre de ce triangle est une quartique ayant deux points doubles. Évaluer l'aire de la boucle comprise entre les deux points doubles et celles comprises entre la courbe et ses asymptotes.

E.-N. Barisien.

2373. — Soient M un point d'une parabole Q, C le centre de courbure et D le point de Frégier relatifs à ce point M. Trouver les lieux du point R qui, avec M, C, P, forme une division harmonique.

E.-N. Barisien.

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE

2219. — *Montrer que si* $a > b$, *l'équation*

$$(x^2 - k^2)\left(ax + k\sqrt{a^2 - b^2}\right)^2 - b^2x^2 = 0$$

n'a jamais que deux racines réelles.

Comme a est plus grand que b et que $a^2 - b^2$ est positif, il est certain que a et b sont positifs.

D'autre part, nous voyons tout de suite que $x^2 - k^2$ est nécessairement positif aussi et que, par suite, il n'y a pas de racines comprises entre $-k$ et $+k$. Nous pouvons donc poser

$$x^2 = k^2(1 + \operatorname{tg}^2\varphi);$$

l'équation deviendra alors $\quad k^2\sin^2\varphi\left(\dfrac{ak}{\cos\varphi} + k\sqrt{a^2 - b^2}\right)^2 - b^2k^2 = 0.$

Elle se décompose en deux : $\quad ak\operatorname{tg}\varphi + k\sin\varphi\sqrt{a^2 - b^2} - b^2 = 0,$

$$ak\operatorname{tg}\varphi - k\sin\varphi\sqrt{a^2 - b^2} + b^2 = 0.$$

Les dérivées de ces deux fonctions sont les mêmes :

$$\frac{ak}{\cos^2\varphi} + k\cos\varphi\sqrt{a^2 - b^2};$$

elles ne s'annulent jamais, elles sont toujours positives.

D'autre part, quand x varie de $-\infty$ à $-k$, $\cos\varphi$ varie de 0 à -1, et φ, de $\frac{\pi}{2}$ à π; quand x varie de k à $+\infty$, $\cos\varphi$ varie de 1 à 0 et φ croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Alors il est facile de voir que la première fonction ne s'annule que dans le second intervalle et une seule fois; puis, que la seconde fonction ne s'annule que dans le premier intervalle et une seule fois. La propriété annoncée est donc démontrée.

X.

Bonne solution : M. L. Simon, à Fourmies.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

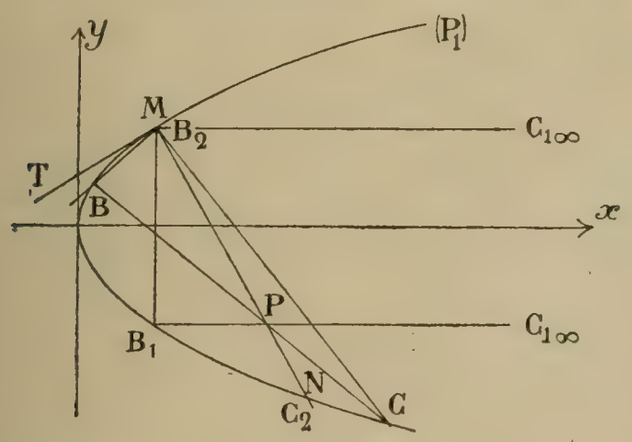
2211. — *On considère une parabole et un point* M *de cette parabole. Un angle droit dont le sommet est en* M *pivote autour de ce point et ses deux côtés rencontrent la parabole en deux points variables,* B *et* C.

1° *Démontrer que la droite* BC *passe par un point fixe* P *et trouver le lieu de ce point, quand le point* M *parcourt la parabole donnée, ainsi que l'enveloppe de* MP.

2° *Le lieu du milieu de* BC *est une parabole. Trouver l'enveloppe de cette parabole quand le point* M *parcourt la parabole donnée, ainsi que les lieux de son sommet et de son foyer.*

3° *Le lieu du pôle de la droite* BC *est une droite. Enveloppe de cette droite, quand le point* M *varie de la façon indiquée.*

Solution analytique. — Nous rapporterons la parabole donnée, à son axe et à sa tangente au sommet, de sorte que son équation sera



$$(P_1) \qquad y^2 = 2px.$$

1. On sait que lorsqu'un angle droit $\widehat{BMC}$ tourne autour d'un point fixe M d'une conique, les points B et C de rencontre avec la conique tracent sur cette courbe une involution. D'après le théorème de Frégier les droites BC joignant les points correspondants de cette involution passent par un point fixe P. Il est aisé d'obtenir les coordonnées de ce point P, en remarquant deux positions très simples de la droite BC :

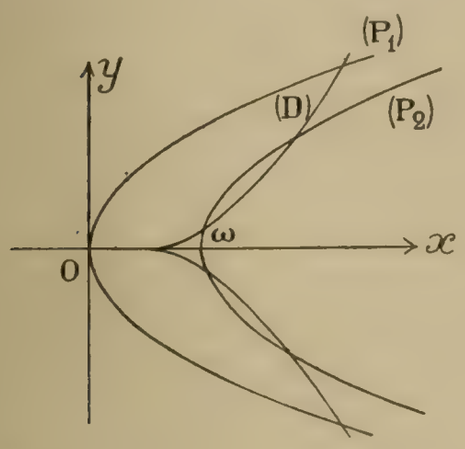
la position B_1C_1, dans laquelle le côté MB est perpendiculaire à l'axe de la parabole, et le point C à l'infini dans la direction de l'axe;

la position B_2C_2, dans laquelle les côtés de l'angle droit coïncident avec la tangente et la normale à la parabole en M. La droite B_2C_2 coïncide alors avec la normale MN.

En désignant par x_0, y_0, les coordonnées du point M, on obtient, pour celles du point P,

$$(P) \qquad \begin{cases} x_p = 2p + x_0, \\ y_p = -y_0. \end{cases}$$

Quand le point M parcourt la parabole (P_1), le point P décrit la courbe



$$(P_2) \qquad y^2 = 2p(x - 2p);$$

c'est une parabole égale à la parabole donnée; elle s'obtient par une translation parallèle à Ox, dans la direction des x positifs, et égale à $2p$.

L'enveloppe de la droite MP est l'enveloppe des normales, c'est la développée de la parabole (P_1) et on sait que son équation est

$$(D) \qquad 27py^2 - 8(x - p)^3 = 0.$$

2. D'après ce qui précède, la droite BC tournant autour du point P a pour équation

$$(BC) \qquad y + y_0 = \lambda(x - x_0 - 2p).$$

Elle coupe la parabole aux deux points B, C, dont l'équation aux ordonnées est

$$\frac{\lambda}{2p} y^2 - y - \lambda(x_0 + 2p) - y_0 = 0.$$

L'ordonnée du milieu I de BC sera donnée par la demi-somme des racines de cette équation :

$$y_1 = \frac{p}{\lambda};$$

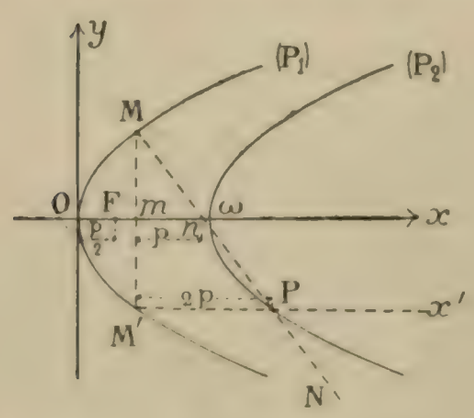
son abcisse sera

$$x_1 = \frac{y_1 + y_0 + \lambda(x_0 + 2p)}{\lambda}.$$

Le lieu du point I est la parabole

$$(P_3) \qquad px = y(y + y_0) + p(x_0 + 2p).$$

Pour obtenir l'enveloppe de cette courbe, remplaçons d'abord x_0 par $\frac{y_0^2}{2p}$, et dérivons par rapport au paramètre y_0 :



$$0 = y + y_0.$$

L'élimination de y_0 entre les deux dernières équations donne

$$(P_2) \qquad y^2 = 2p(x - 2p);$$

nous retrouvons la parabole lieu du point P.

Il est facile de vérifier que la parabole (P_3) admet pour axe de symétrie la droite

$$y = -\frac{y_0}{2}.$$

On en déduit alors immédiatement les coordonnées de son sommet :

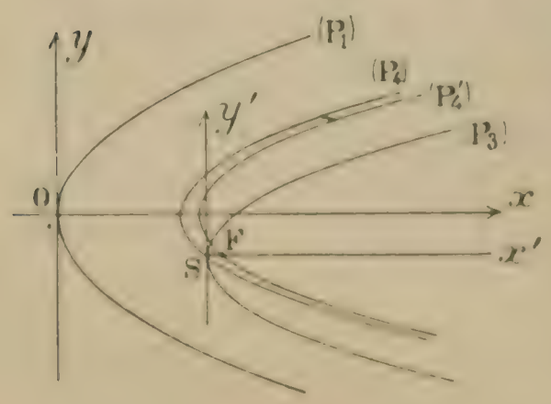
$$(S) \qquad \begin{cases} x_s = \dfrac{y_0^2}{4p} + 2p, \\ y_s = -\dfrac{y_0}{2}. \end{cases}$$

Le lieu du point S, quand M varie sur (P_1), est donc la parabole

$$(P_4) \qquad y^2 = p(x - 2p);$$

elle a même axe et même sommet que la parabole (P_2), mais son paramètre est la moitié de celui de (P_2).

Si nous effectuons maintenant le changement de coordonnées qui amène les axes parallèlement à eux-mêmes en S, c'est-à-dire si nous posons



$$\begin{cases} x = x' + \dfrac{y_0^2}{4p} + 2p, \\ y = y' - \dfrac{y_0}{2}, \end{cases}$$

la parabole (P_3) est mise sous forme réduite

$$(P_3) \qquad y'^2 = 2p'x',$$

et il est facile de voir que l'on a $2p' = p$: la parabole (P_3) est de grandeur constante; il suffira donc de déplacer le lieu du sommet S de $\frac{p}{4}$ vers les x positifs pour obtenir le lieu du foyer, et toutes ces paraboles (P_3), (P_4) et le lieu du foyer sont des courbes égales.

3. Le lieu du pôle de la droite BC est évidemment la polaire du point P par rapport à la courbe (P_1).

Son équation est $\qquad (x_0 + 2p)(x - 2p) - 2yy_0 - 2px = 0.$

ou, en changeant tous les signes et ordonnant,

$$2px + 2y_0y + 2p(x_0 + 2p) = 0.$$

Pour avoir l'enveloppe de cette droite quand M varie de la façon indiquée, nous commencerons par remplacer x_0 par $\frac{y_0^2}{2p}$, puis nous dériverons par rapport au paramètre y_0 :

$$2y + 2y_0 = 0;$$

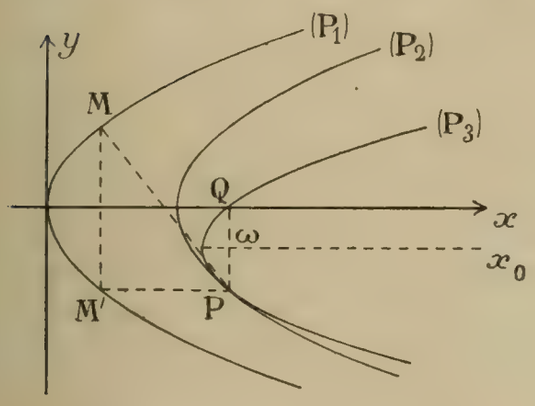
éliminons y_0 entre les deux dernières équations, nous obtenons l'enveloppe de la droite :

$$2px + 4p^2 + y^2 - 2y^2 = 0,$$

soit

$$(P_5) \qquad y^2 = 2p(x + 2p).$$

C'est une parabole égale à la parabole proposée, et obtenue par une translation parallèle à l'axe Ox, dans le sens des x négatifs, et égale à $2p$.

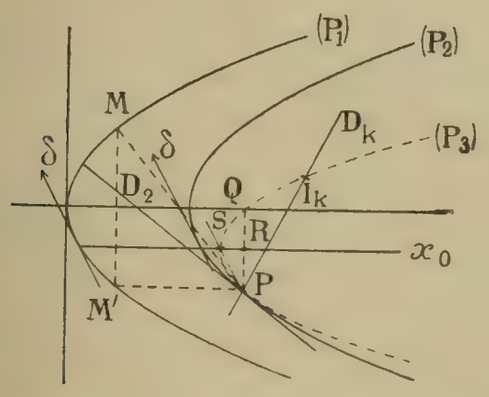


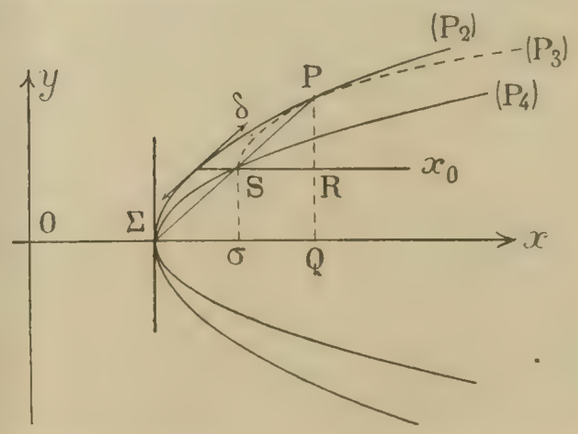
La plupart de ces résultats pouvaient se voir géométriquement d'une façon simple :

Solution géométrique. — 1. Le théorème de Frégier nous a montré que la droite BC passait par un point fixe P. Il est aisé de trouver le lieu de ce point P. Nous avons vu que ce point était situé à l'intersection de la normale MN et de la droite $M'x'$; or la longueur M′P est le double de la longueur mn, sous-normale, qui est constante dans la parabole; la longueur M′P est donc constante, et le lieu du point P dérive de la parabole (P_1) par une translation égale à deux fois le paramètre : c'est la parabole (P_2).

Quand à l'enveloppe de MP, c'est visiblement la développée de la parabole (P_1).

2. Cherchons maintenant le lieu du milieu I de BC. Nous remarquerons d'abord que, lorsqu'une droite BC partant d'une position initiale D_0 quelconque tourne autour de P d'un angle égal à π, le

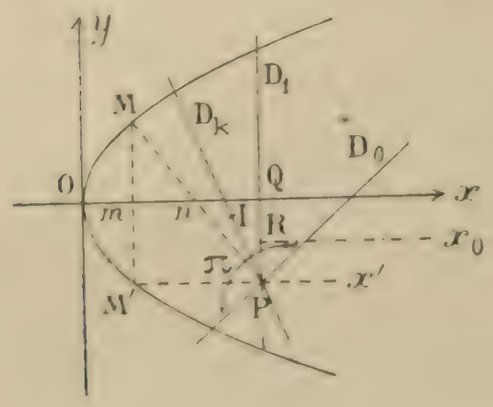




point I a décrit tout son lieu une fois et une seule. Or, le point P appartient visiblement au lieu de I, car il est le milieu de la corde dont M′P est le diamètre conjugué. Sur chaque droite issue de P il y a donc deux points du lieu : ce lieu est une conique. D'autre part, il n'y a qu'une direction pour laquelle le point I soit à l'infini, la conique est donc une parabole d'axe parallèle à Ox; et comme un autre point évident est le point Q milieu de la corde verticale PD_1, l'axe de cette parabole est la droite Rx_0.

Une construction très simple nous donne le point de cette courbe qui est sur Rx_0 c'est-à-dire le sommet : il suffit de mener par P la parallèle à la direction conjuguée du diamètre Rx_0 dans la parabole P_1, ou, ce qui revient au même, dans la parabole P_2.

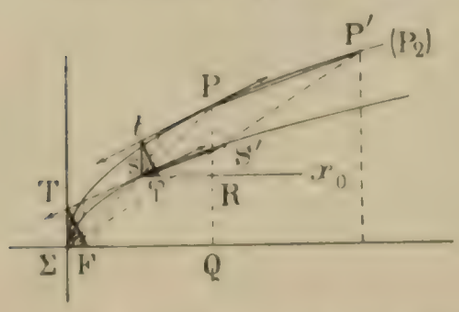
Cette dernière remarque nous permettra de trouver le lieu du sommet S, d'une façon très aisée. Cherchons l'enveloppe de cette parabole P_3 : il suffit de remarquer que, si on mène la tangente en P à la parabole (P_2), on obtient la corde PD_2 pour laquelle P est précisément confondu avec son milieu I; donc PD_2 est la limite de la corde PD_k ou PI_k quand I_k tend vers P; la droite PD_k est donc la tangente à la parabole (P_3), P est le point caractéristique de cette courbe, et l'enveloppe est la parabole (P_2).



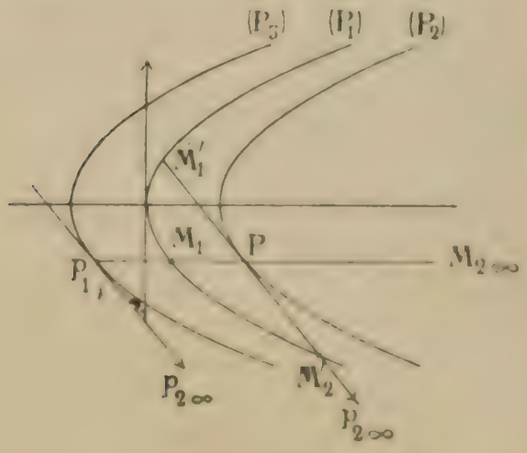
Cherchons maintenant le lieu du sommet. Soit la parabole (P_2) et le point P; nous obtenons le sommet S en menant la parallèle PS à la direction conjuguée du diamètre Rx_0 et on sait que cette droite passe par le sommet Σ de la parabole (P_2); il en résulte alors immédiatement que, lorsque P décrit la courbe P_2, le point S décrit une courbe obtenue en diminuant de moitié les coordonnées de P : c'est une parabole (P_4) de paramètre p' égal à $\frac{p}{2}$.

Étudions le lieu du foyer de la parabole P_2.

Soit une des positions de cette courbe. On sait qu'on obtient le foyer en menant par le point de rencontre de la tangente au sommet et de la tangente en P une perpendiculaire à cette dernière droite; le foyer est l'intersection de l'axe de la parabole et de cette perpendiculaire. Soit alors P' un point voisin du point P, et S' le point correspondant de la parabole (P_4); d'après le théorème de Thalès, les droites PP' et SS' sont parallèles; elles le sont encore, à la limite, quand P' est confondu avec P, S' avec S et que ces deux cordes sont tangentes. Il en résulte que les triangles ΣFT et $St\varphi$ sont égaux et que la distance $S\varphi = \Sigma F = \text{Cte}$, le lieu du foyer φ est donc la parabole (P_4) déplacée vers les x positifs par une translation d'une valeur égale à ΣF, c'est-à-dire $\frac{p}{4}$.



3. Cherchons enfin l'enveloppe de la polaire du point P. Cherchons d'abord quelle est cette polaire. Pour l'avoir, il nous suffit d'en connaître deux points. Or, si nous menons par P la corde PM_1 parallèle à l'axe de la parabole (P_1), le point conjugué harmonique de P par rapport aux deux points M_1 et $M_{2\infty}$ est le point p_1, tel que M_1 soit le milieu de Pp_1.



Si de plus nous envisageons la corde $M_1'PM_2'$ qui est tangente à la parabole (P_2), nous savons que le point P est le milieu de cette corde, et par suite que sa direction donne la direction de la polaire de P.

Il est dès lors évident que, la distance $Pp_1 = PM_1 = 2p$ étant constante, la droite p_1p_2 enveloppe une parabole égale à la parabole proposée et déplacée par translation de $2p$ vers la gauche.

Jean TONGAS, 8e régiment du génie, à Rueil.

Bonnes solutions analytiques : MM. E. N. Barisien, R. Picard, Topini à Grandvilliers; G. Lach, à Douai, E. Dion, École normale supérieure de Saint-Cloud; Deperrois, à Évreux; M. Roux, au Creusot; Mlle Barbillon, à Nancy.

Bonnes solutions géométriques : MM. Princière, école des Anglais, à Lyon; Jolly, à Honfleur; H. Lecouffe, élève à la Faculté des sciences de Paris; J. Chaize, École normale de l'enseignement technique.

Bonnes solutions analytiques et géométriques : MM. L. Simon, à Fourmies; Desfonds et Chazelet, élèves au lycée de Clermont-Ferrand.

2216. — *La droite* $$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0,$$
où p désigne une certaine fonction de φ, enveloppe une courbe (C). *Soient* M *le point de contact,* N *le point de rencontre de la normale en* M *avec* Ox, P *la projection de l'origine sur la tangente.*

1° *Déterminer la fonction p pour que l'on ait constamment*

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{PO}} = 1 - n,$$

n désignant une constante donnée.

2° *Montrer que pour une certaine valeur de n les courbes* (C) *ainsi obtenues sont telles que le rayon de courbure en* M *soit fonction linéaire de p. Parmi les courbes parallèles à* (C) *il y en a alors une dont le rayon de courbure est triple de la normale limitée à* Ox.

3° *Construire une des courbes* (C) *trouvées dans la deuxième partie, et calculer sa longueur totale.*

(*Certificat de mathématiques générales. Clermont, novembre* 1912.)

1. Comme les vecteurs $\overline{MN}$ et $\overline{PO}$ sont portés sur des droites parallèles, le rapport de leurs valeurs algébriques est égal au rapport de leurs projections orthogonales sur un axe quelconque. Projetons sur Oy; les projections de ces vecteurs sont respectivement égales à $-y_M$ et $-y_P$, y_M et y_P désignant les ordonnées des points M et P, et ceci montre que l'égalité donnée peut se remplacer par la relation

$$(1) \qquad \frac{y_M}{y_P} = 1 - n.$$

Les coordonnées du point M sont les solutions communes aux deux équations

$$(2) \qquad x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0, \qquad (3) \qquad x\sin\varphi - y\cos\varphi - p' = 0,$$

la seconde étant obtenue en dérivant la première par rapport à φ. Nous en tirons aisément

$$y_M = p\sin\varphi + p'\cos\varphi;$$

d'autre part, l'ordonnée y_P du point P est égale à $p\sin\varphi$, et par suite, l'égalité (1) devient

$$\frac{p\sin\varphi + p'\cos\varphi}{p\sin\varphi} = 1 - n, \qquad \text{ou} \qquad \frac{p'}{p} = -\frac{n\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

ou encore

$$\frac{dp}{p} = n\frac{d\cos\varphi}{\cos\varphi}.$$

L'intégration est alors immédiate et donne

$$\mathrm{L}\,p = \mathrm{L}\,\cos^n\varphi + \mathrm{L}\,a,$$

ou

$$p = a\cos^n\varphi,$$

a désignant une constante arbitraire.

2. Les équations (2) et (3) représentent deux droites perpendiculaires passant par le point M; comme la première représente la tangente, la seconde représente la normale, et le point limite de cette normale, c'est-à-dire le centre de courbure ω de la courbe (C) au point M, sera défini par l'équation (3) et par la suivante :

$$(4) \qquad -x\cos\varphi - y\sin\varphi - p'' = 0,$$

obtenue en dérivant l'équation (3) par rapport à φ.

On voit alors que l'équation (4) représente une droite parallèle à la tangente en M et passant par le point ω. On en conclut que le rayon de courbure $M\omega$ est égal à la distance des droites (2) et (4).

Pour évaluer aisément cette distance, projetons l'origine O en Q sur la droite (4), nous avons

$$M\omega = PQ.$$

Si l'on prend comme sens positif des vecteurs $\overline{OP}$ et $\overline{OQ}$ la demi-droite qui fait l'angle φ avec Ox, on a

$$\overline{OP} = p, \qquad \overline{OQ} = -p''.$$

et
$$PQ = \overline{PO} + \overline{OQ} = -p - p''.$$

On en déduit que le rayon de courbure R est égal à $-(p + p'')$.

Nous avons $p = a\cos^n\varphi$; nous en tirons successivement

$$p' = -na\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi,$$
$$p'' = -na(\cos^n\varphi - (n-1)\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi) = -na(n\cos^n\varphi - (n-1)\cos^{n-2}\varphi),$$

et
$$R = -(p + p'') = a(1 - n^2)\cos^n\varphi + n(n-1)a\cos^{n-2}\varphi.$$

Pour que R soit une fonction linéaire de p, ou de $a\cos^n\varphi$, il faut que le terme $n(n-1)a\cos^{n-2}\varphi$ se réduise à une constante, et pour cela, il faut qu'on ait ou bien $n(n-1) = 0$, ou bien $n - 2 = 0$.

Si $n = 0$, on a $p = a$, la courbe (C) est un cercle ayant pour centre l'origine; c'est un cas particulier peu intéressant.

Si $n = 1$, on a $p = a\cos\varphi$, la droite donnée passe par un point fixe.

Examinons enfin le cas où $n = 2$. Nous avons $p = a\cos^2\varphi$ et
$$R = -(-3p + 2a).$$

Toute courbe (Γ), parallèle à la courbe (C), peut être considérée comme l'enveloppe de la droite

(5) $$x\cos\varphi + y\sin\varphi - (p + \lambda) = 0,$$

λ étant une constante.

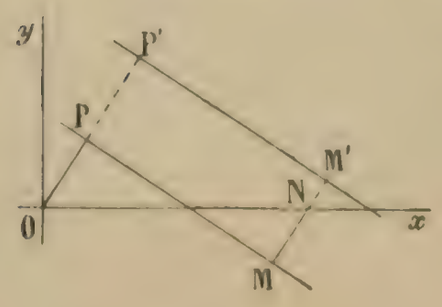
Il nous faut montrer qu'on peut déterminer la constante λ de façon que le rayon de courbure ρ en un point de cette courbe soit le triple de la normale limitée à Ox.

On verra comme tout à l'heure que
$$\rho = -(p + \lambda + p''),$$
ou, en remplaçant $p + p''$ par la valeur trouvée plus haut,
$$\rho = -(-3p + 2a + \lambda).$$

D'autre part, nous avons vu que pour la courbe (C) on a
$$\frac{\overline{MN}}{\overline{PO}} = 1 - 2 = -1, \qquad \text{ou} \qquad \overline{NM} = -\overline{OP} = -p,$$
en conservant le même sens positif que plus haut.

On en déduit que les points M et P sont de part et d'autre de la tangente MP.

Considérons maintenant la tangente à la courbe (Γ) qui est parallèle à MP; soit M′ le point de contact (situé sur MN), et soit P′ la projection du point O sur la tangente.



On a $\overline{OP'} = p + \lambda$, et, par suite,
$$\overline{PP'} = \lambda = \overline{MM'},$$
et
$$\overline{NM'} = \overline{NM} + \overline{MM'} = -p + \lambda.$$

La longueur de la normale pour la courbe (Γ) est donc $|-p + \lambda|$, et l'on doit avoir
$$|-3p + 2a + \lambda| = 3|-p + \lambda|,$$
ou
$$-3p + 2a + \lambda = \pm 3(-p + \lambda).$$

En prenant le signe + dans le second membre, on obtient $\lambda = a$; en prenant le signe −, l'équation ne définit pas pour λ une valeur constante.

La seule solution acceptable est donc $\lambda = a$, et, par suite, la seule courbe parallèle à la courbe (C), jouissant de la propriété indiquée, est l'enveloppe de la droite
$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - a(1 + \cos^2\varphi) = 0.$$

3. Il nous reste à construire la courbe (C), enveloppe de la droite

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - a \cos^2\varphi = 0.$$

Le point limite est défini par cette équation et la suivante :

$$-x \sin\varphi + y \cos\varphi + 2a \cos\varphi \sin\varphi = 0.$$

En résolvant ces deux équations, on obtient

$$x = a \cos\varphi(1 + \sin^2\varphi),$$
$$y = -a \sin\varphi \cos^2\varphi;$$

ce sont les équations paramétriques de la courbe (C).

x et y sont des fonctions continues de φ pour toutes les valeurs de cette variable.

Si l'on change φ en $\varphi + 2\pi$, x et y ne changent pas, donc pour avoir toute la courbe, il suffit de faire varier φ dans un intervalle quelconque dont l'étendue soit égale à 2π.

Si l'on change φ en $\varphi + \pi$, x et y changent de signe en conservant la même valeur absolue; donc la courbe est symétrique par rapport à l'origine. Il suffira de faire varier φ dans un intervalle quelconque (I) d'étendue égale à π, de construire la branche de courbe correspondante, puis la branche de courbe symétrique par rapport au point O.

Enfin, si l'on change φ en $-\varphi$, x ne change pas et y change simplement de signe. Donc la courbe est symétrique par rapport à Ox.

Ceci nous permet de réduire de moitié l'intervalle (I), mais il ne faut pas le faire arbitrairement; il faut décomposer cet intervalle en deux intervalles tel qu'à toute valeur α du premier corresponde la valeur $-\alpha$ du deuxième. Prenons pour (I) l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$; et décomposons-le en les deux intervalles $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ et $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; à ces intervalles correspondront des arcs de courbe symétrique par rapport à Ox.

En résumé, pour avoir toute la courbe, nous ferons varier φ dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, nous construirons l'arc de courbe correspondant, puis, nous prendrons le symétrique de cet arc par rapport à Ox, et enfin le symétrique de toute la courbe ainsi obtenue par rapport au point O. On en conclut que la courbe sera symétrique par rapport aux deux axes.

En calculant les dérivées de x et y par rapport à φ, on a

$$\frac{dx}{d\varphi} = a \sin\varphi(1 - 3\sin^2\varphi),$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = -a \cos\varphi(1 - 3\sin^2\varphi),$$

et l'on en tire

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi},$$

ce qui nous donne la pente de la tangente en un point de la courbe. Ce résultat était à prévoir, car $-\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}$ est précisément la pente de la droite

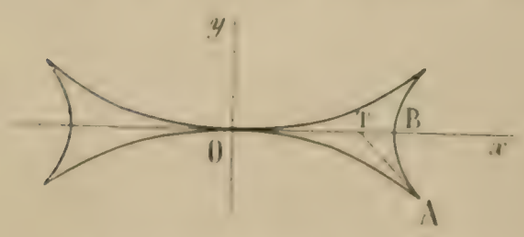
$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - a \cos^2\varphi = 0,$$

qui enveloppe la courbe (C).

Désignons par α l'angle aigu dont le sinus est égal à $\frac{1}{\sqrt{3}}$; on voit aisément que $\frac{dx}{d\varphi}$ est positif pour $\varphi < \alpha$ (en supposant $a > 0$), et négatif pour $\varphi > \alpha$; c'est le contraire pour $\frac{dy}{d\varphi}$. Nous en déduisons les variations suivantes :

φ	0		α		$\frac{\pi}{2}$	
x	a	$\nearrow$	$\frac{4a\sqrt{6}}{9}$	$\searrow$	0	$\frac{4a\sqrt{6}}{9} = a.1,08\ldots$
y	0	$\searrow$	$-\frac{2a\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	0	$\frac{2a\sqrt{3}}{9} = a.0,36\ldots$
$\frac{dy}{dx}$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	0	

et nous obtenons l'arc de courbe BAO (OT $= a.0,81\ldots$).



La tangente au point B ($\varphi = 0$) est perpendiculaire à Ox; le point A ($\varphi = \alpha$) est un point de rebroussement, la tangente AT ayant pour pente $-\sqrt{2}$; la tangente au point O $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ est l'axe des x.

En achevant par symétrie, on obtient la courbe représentée par la figure ci-contre.

La longueur totale de cette courbe est égale à quatre fois la longueur de l'arc BAO.

Nous avons trouvé
$$dx = a\sin\varphi(1 - 3\sin^2\varphi)\,d\varphi,$$
$$dy = -a\cos\varphi(1 - 3\sin^2\varphi)\,d\varphi;$$
nous en déduisons
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = a^2(1 - 3\sin^2\varphi)^2\,d\varphi^2,$$
$$ds = \pm a(1 - 3\sin^2\varphi)\,d\varphi.$$

Nous prendrons comme sens positif des s le sens des φ croissants; alors, $\frac{ds}{d\varphi}$ doit être positif.

Si l'on a $0 < \varphi < \alpha$, $1 - 3\sin^2\varphi$ est positif, on doit prendre
$$ds = a(1 - 3\sin^2\varphi)\,d\varphi,$$
et en intégrant, on obtient
$$\text{arc BA} = \int_0^{\alpha} a(1 - 3\sin^2\varphi)\,d\varphi.$$

Si l'on a $\alpha < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $1 - 3\sin^2\varphi$ est négatif, il faut prendre
$$ds = -a(1 - 3\sin^2\varphi)\,d\varphi,$$
et l'on en tire
$$\text{arc AO} = -\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} a(1 - 3\sin^2\varphi)\,d\varphi.$$

Soit $F(\varphi)$ une fonction primitive quelconque de $a(1 - 3\sin^2\varphi)$; nous avons
$$\text{arc BA} = F(\alpha) - F(0), \qquad \text{arc AO} = -\left[F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(\alpha)\right],$$
et en ajoutant,
$$\text{arc BAO} = 2F(\alpha) - F(0) - F\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

On peut écrire
$$a(1 - 3\sin^2\varphi) = a\left[1 - \frac{3}{2}(1 - \cos 2\varphi)\right] = \frac{a}{2}(3\cos 2\varphi - 1),$$
et l'on en déduit
$$F(\varphi) = \frac{a}{2}\left[\frac{3}{2}\sin 2\varphi - \varphi\right],$$
et
$$F(\alpha) = \frac{a}{2}\left[\frac{3}{2}\sin 2\alpha - \alpha\right] = \frac{a}{2}(3\sin\alpha\cos\alpha - \alpha) = \frac{a}{2}(\sqrt{2} - \alpha),$$
$$F(0) = 0, \qquad F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{a\pi}{4}.$$

On a donc
$$\text{arc BAO} = a(\sqrt{2} - \alpha) + \frac{a\pi}{4};$$
en multipliant par 4, on voit que la longueur totale de la courbe est égale à
$$a(\pi + 4\sqrt{2} - 4\alpha).$$

Calculons α avec l'approximation des tables de logarithmes à cinq décimales. Nous avons
$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \log\sin\alpha = -\frac{1}{2}\log 3 = 1,76144;$$
nous en déduisons immédiatement la valeur de α en grades, $39^g,1830$, puis sa valeur en radians
$$\alpha = \frac{39,1830 \times \pi}{200}.$$

Pour calculer ce quotient, nous prenons les logarithmes; nous avons
$$\begin{array}{ll} \log 39,1830 & = 1,59310 \\ \log\pi & = 0,49715 \\ -\log 200 & = \bar{3},69897 \\ \hline \log\alpha & = \bar{1},78922, \end{array}$$
d'où
$$\alpha = 0,6155.$$

On en déduit que la longueur de la courbe est, à $\frac{1}{1000}$ près, $6,336a$.

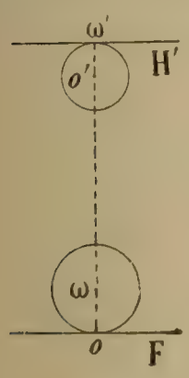
L. NAUCELLE, à la Châtre.

Bonnes solutions par MM. Jolly, à Honfleur; G. Lach, à Douai; H. Lecouffe, à Paris; Topin, à Grandvilliers.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1919)

ÉCOLE CENTRALE (*Fin.*)

9991. — Un cône a comme base une conique dans le plan horizontal de projection; trouver un plan coupant ce cône suivant une conique projetée verticalement suivant un cercle.



9992. — Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point (a, a') sur les génératrices d'un cône de révolution; tangente en un point.

9993. — Intersection de deux cônes; le premier, de sommet (ω, ω'), a pour base le cercle o' dans le plan de front F; le second, de sommet (o, o'), a pour base le cercle ω dans le plan horizontal H'.

9994. — On donne dans le plan horizontal un cercle et une hyperbole ayant pour centre le même point O; on donne aussi un point S par sa projection cotée. Intersection du cône ayant pour sommet le point S et pour base le cercle avec le cylindre de génératrices parallèles à SO et ayant pour base l'hyperbole.

9995. — Intersection de deux cylindres de front circonscrits à un ellipsoïde de révolution à axe vertical.

9996. — Intersection de deux cylindres à bases circulaires dans le plan horizontal de projection et tangents tous les deux au plan vertical de projection. Tangentes au point double.

9997. — On considère dans le plan horizontal une hyperbole et le cercle décrit sur l'axe transverse ab comme diamètre; on considère une droite de l'espace ayant pour trace horizontale l'un des points de contact b de l'hyperbole et du cercle. Sur cette droite on prend deux points s et s_1 pour sommets de deux cônes ayant pour bases l'un le cercle, l'autre l'hyberbole. Intersection, point et tangente; nature.

Même question en prenant comme bases deux coniques bitangentes en a et b. En déduire la propriété suivante : par l'un des points de contact, b de deux coniques bitangentes (en a et b), on mène une sécante bcd; le lieu du point de rencontre t des tangentes en c et d est la tangente commune en a.

9998. — Deux ellipsoïdes de révolution ont leurs axes de front et parallèles; mener à ces deux ellipsoïdes un plan tangent commun faisant un angle α avec les axes.

9999. — On donne un ellipsoïde de révolution à axe de front; on le coupe par un plan quelconque; déterminer un point de la section et la tangente en ce point.

10000. — **Intersection d'un ellipsoïde de révolution à axe de front avec un plan vertical.**

10001. — Section par un plan PxQ d'une surface de révolution engendrée par un cercle horizontal tournant autour de la droite (A, A').

— **2.** — **Intersection d'une sphère et d'un cylindre de révolution à axe de front.**

— **3.** — Intersection d'un ellipsoïde de révolution à axe vertical avec un cylindre de révolution horizontal.

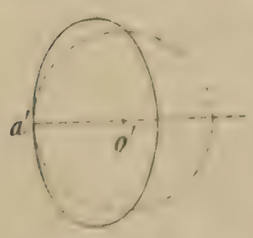
— **4.** — Intersection d'une sphère avec un cylindre de révolution de rayon donné ayant comme axe une droite de front (A, A').

— **5.** — **Intersection d'un cône de révolution avec une sphère ayant pour centre le sommet du cône.**

— **6.** — Intersection d'un ellipsoïde de révolution à axe vertical avec un cône dont la base est une parabole donnée dans le plan horizontal, et le sommet le point le plus haut de l'ellipsoïde.

— **7.** — Intersection d'une sphère avec un cône dont la base est une hyperbole, dans le plan horizontal, et le sommet le point le plus haut de la sphère.

— **8.** — Intersection d'un cône de révolution à axe vertical avec un cylindre de bout dont la base dans le plan vertical est un cercle O' tangent à la projection de l'une des génératrices $s'a'$ de contour apparent vertical.



— **9.** — **On donne dans un même plan de front une ellipse et un cercle o' tangent à cette ellipse en l'un des sommets a' situés sur le petit axe; l'ellipse en tournant autour de son grand axe supposé vertical engendre un ellipsoïde. Intersection de cet ellipsoïde avec la sphère dont le cercle o' est un grand cercle.**

— **10.** — **On considère un ellipsoïde de révolution aplati à axe vertical. Un cône de révolution à axe de front a pour génératrices principales la tangente à la méridienne principale de l'ellipsoïde en son point le plus haut (a, a') et la droite (bc, $b'c'$) joignant le point le plus bas (b, b') au point le plus à droite (c, c'). Intersection des deux corps; point et tangente, point double et tangentes en ce point.**

— **11.** — On donne un hyperboloïde de révolution par son axe vertical et une génératrice de front (A, A'). Trouver une seconde génératrice, perpendiculaire à la première, ou faisant avec elle un angle donné α.

— **12.** — Mener à un hyperboloïde de révolution à une nappe un plan tangent parallèle à un plan donné.

— **13.** — Intersection d'un hyperboloïde de révolution à axe vertical, ayant pour génératrice (A, A'), avec un plan déterminé par (A, A') et un point donné (m, m').

— **14.** — On donne un hyperboloïde de révolution par son axe vertical et une génératrice; mener un plan tangent tel que les génératrices de section fassent un angle donné.

— **15.** — On donne deux hyperboloïdes et un point; mener par ce point un plan coupant les deux hyperboloïdes suivant des hyperboles ayant des asymptotes parallèles.

— **16.** — Un hyperboloïde de révolution à une nappe est engendré par la rotation de la droite (A, A') autour d'un axe vertical; on prend sur la droite un point (a, a'); normale à la surface en ce point. En déduire les points de la méridienne principale qui correspondent au parallèle engendré par le point (a, a'), et les tangentes en ces points. On considère le cercle bitangent à la méridienne principale en ces points; c'est la base d'un cylindre dont les génératrices sont de bout : intersection de l'hyperboloïde et du cylindre.

— **17.** — Contours apparents d'un hyperboloïde de révolution à axe de front, connaissant une génératrice également de front.

— **18.** — Intersection de deux hyperboloïdes de révolution à axes verticaux, engendrés par deux droites parallèles; point, tangente, nature.

— **19.** — Intersection de deux hyperboloïdes de révolution ayant une génératrice commune et dont les axes se rencontrent.

— **20.** — **Mener par une droite un plan tangent à un paraboloïde de révolution dont l'axe est vertical.**

— **21.** — Section d'un paraboloïde de révolution à axe vertical par un plan PxQ : point, tangente, sommets, foyers. Projection horizontale.

— **22.** — Intersection d'une droite (A, A') avec le cône de sommet (S, S') circonscrit à un paraboloïde de révolution à axe vertical.

— **23.** — Intersection de deux paraboloïdes de révolution à axes verticaux.

— **24.** — On considère deux paraboloïdes de révolution de même foyer, ayant leurs axes dans un même plan de front : intersection, point, tangente, nature.

— **25.** — On a un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal, dont une génératrice (de l'autre système) est une droite de front. Trouver les génératrices de la surface qui font un angle donné avec la génératrice de front.

— **26.** — Un paraboloïde hyperbolique a pour plan directeur le plan horizontal et on en connaît deux génératrices (de l'autre système) dont les projections horizontales sont parallèles. Section par le plan PxQ : point, tangente, asymptotes.

— **27.** — On donne deux paraboloïdes hyperboliques ayant un plan directeur commun; les couper par un plan passant par un point donné et tel que les deux sections soient homothétiques. (*Fin.*)

SUJETS DE CONCOURS

ÉCOLE NAVALE

Concours de 1919.

Algèbre.

I. — **2374**. Soit l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + (a^2 + b^2)y = e^{ax}\cos bx,$$

où a et b sont deux constantes réelles. Donner, sous forme réelle, son intégrale générale, ainsi qu'une fonction primitive de cette intégrale.

II. — **2375**. 1° Désignant par x un infiniment petit principal, on demande de calculer la partie principale de l'expression $\operatorname{tg}x \, L\,(1 + \sin x) - \sin x \, L\,(1 + \operatorname{tg}x)$.

2° On pose ensuite $$f(x) = (1 + \sin x)^{\operatorname{tg}x} - (1 + \operatorname{tg}x)^{\sin x}.$$

Reconnaître la convergence ou divergence de la série

$$f(1) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) + \ldots.$$

III. — **2376**. On pose $\beta = \frac{2\pi}{3}$.

1° Expliquer pourquoi la relation

$$4y^3 - 3y - \cos 3x = 4(y - \cos x)[y - \cos(x + \beta)][y - \cos(x + 2\beta)]$$

est vérifiée quelles que soient les valeurs attribuées à x et à y.

2° Calculer les arcs x qui vérifient l'équation

$$\frac{\sin x}{a - \cos x} + \frac{\sin(x + \beta)}{a - \cos(x + \beta)} + \frac{\sin(x + 2\beta)}{a - \cos(x + 2\beta)} = \frac{3}{7},$$

où a désigne une constante réelle donnée. Montrer que les extrémités des arcs x, sur le cercle trigonométrique, sont deux à deux symétriques par rapport à certains diamètres de ce cercle, dont les positions sont indépendantes de la valeur attribuée à la constante a. Déterminer ces positions. Discuter. Cas particulier où $a = \pm\sqrt{2}$.

IV. — **2377**. Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2x \, L \operatorname{tg} x \, dx$.

Géométrie analytique.

2378. — 1° On donne un cercle C et une droite D. Trouver le lieu géométrique des points M tels que, si on mène de l'un d'eux une tangente MI au cercle C, la longueur de cette tangente soit dans un rapport constant, e, avec la distance du point M à la droite D.

Ce lieu est une conique. Déterminer ses foyers.

2° On se propose de faire varier le cercle C, la droite D et le rapport e de façon que la conique reste la même. A cet effet, on se donne une conique fixe E et on cherche à déterminer C, D et e de façon que la conique obtenue ainsi soit précisément la conique E.

Démontrer qu'il existe une infinité de cercles C répondant à cette condition et trouver l'équation générale de ces cercles.

3° Étant donnée une droite A, combien y a-t-il de cercles C tangents à cette droite? Distinguer les droites A pour lesquelles les cercles sont réels de celles pour lesquelles ils ne le sont pas.

4° Lieu des points de contact des tangentes aux cercles C menées par un des foyers de la conique E.

Mécanique.

I. — **2379**. Une canne homogène est formée par une demi-circonférence AB suivie d'un segment rectiligne BC tangent en B à la circonférence; la longueur de BC est égale à huit fois celle du diamètre de AB.

On place cette canne au bord d'une table de manière que l'extrémité A seule touche la table en un point de la face supérieure supposée horizontale.

Déterminer la valeur d'une ligne trigonométrique de l'angle que la direction de BC fait avec la verticale lorsque l'équilibre est établi.

II. — **2380**. Sur une ligne de pente d'un plan incliné rugueux de pente f_0, on place sans vitesse à l'époque zéro deux points matériels pesants, de même masse, M et M′ ; les points M et M′ sont réunis par un fil tendu, inextensible et de masse négligeable, et le point M′ est au-dessus de M. Les coefficients de frottement de M et M′ sur le plan sont f et f' ; f est inférieur à f'.

Étudier les différentes circonstances qui peuvent se présenter suivant la valeur de f_0.

On admet que, lorsqu'un fil de masse négligeable est tendu, la tension est la même en chacun de ses points.

Calcul.

Données : $a = 33^\circ\ 42'\ 21'',3$; $b = 52^\circ\ 28'\ 13'',7$; $c = 68^\circ\ 35'\ 19'',6$.

Inconnues : r, A, B, C et u. Formules à appliquer.

$$2p = a + b + c, \qquad \operatorname{tg} r = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}, \qquad \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{\operatorname{tg} r}{\sin(p-a)},$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{\operatorname{tg} r}{\sin(p-b)}, \qquad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{\operatorname{tg} r}{\sin(p-c)}, \qquad \sin\frac{u}{2} = \frac{\sin p \operatorname{tg} r}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}.$$

Vérification : $A + B + C + 180^\circ = u$.

On prendra la plus petite valeur positive pour chaque inconnue.

Épures.

2381. — **Ligne de terre parallèle au petit axe et au milieu de la feuille.**

On donne dans le plan horizontal de projection un hexagone régulier de 6^{cm} de coté. L'un de ses côtés, ab, coïncide avec le grand axe de la feuille et l'hexagone est tout entier à gauche de cet axe. Éloignement du centre 9^{cm}.

On fait tourner l'hexagone de 45° autour de ab de façon qu'il vienne au dessus du plan horizontal. Dans sa nouvelle position, il sert de base à une pyramide régulière de 15^{cm} de hauteur.

On coupe cette pyramide par une sphère ayant pour centre le centre de la base de la pyramide et pour rayon 8^{cm}.

Représenter le solide formé par la portion de la pyramide intérieure à la sphère.

Physique.

2382. — Dans une chambre fermée, maintenue à 0°, dont le volume intérieur est de 20^{mc} et dont l'atmosphère est parfaitement sèche, on introduit un récipient ouvert contenant une solution de 5^g de chlorure de sodium dans 300^g d'eau.

1° On demande quelle sera la composition de la solution et quelle sera la pression de la vapeur d'eau dans la chambre lorsque l'équilibre sera établi, sachant que la tension de vapeur p de l'eau pure à 0° est $4^{mm},58$ de mercure et que l'abaissement de tension Δp d'une solution de sel de concentration c (en grammes de sel pour 100^g d'eau) est donnée par la relation indépendante de la température

$$\frac{\Delta p}{p} = 0,0053c.$$

2° La température de la chambre étant abaissée de manière à provoquer la formation de cristaux de glace, montrer que la tension de vapeur de la glace doit être égale à celle de la solution saline diluée en équilibre avec elle.

3° En supposant égale à — 2° la nouvelle température, pour laquelle la tension de vapeur est $3^{mm},96$ de mercure pour l'eau pure et 3,89 pour la glace, on demande quelles seront, une fois l'équilibre établi, la pression de vapeur dans l'enceinte, la composition de la solution et la masse de glace formée.

4° Déduire en particulier des résultats précédents le coefficient de proportionnalité à la concentration de l'abaissement de la température de congélation pour une solution diluée de sel marin et l'abaissement pour une solution contenant une molécule-gramme de sel pour 1000^g d'eau.

Poids du litre d'air normal : $1^g,293$.

Densité de la vapeur d'eau par rapport à l'air : 0,625

Coefficient de dilatation des gaz : $\frac{1}{273}$.

Masse moléculaire du chlorure de sodium : 58,5.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

Coulommiers. — Imprimerie PAUL BRODARD.

30e Année. Avril 1920. N° 7.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU 3e DEGRÉ

par **M. P. Maurice**, ingénieur, professeur de mathématiques, à Lyon. (*Fin*)

Exemple III. — On donne l'équation

(1) $$5x^3 - 3x^2 - 72x - 92 = 0,$$

$A = 5, \quad B = -3, \quad C = -72, \quad D = -92, \quad B^2 - 3AC \neq 0, \quad 2B^3 - 9ABC - 27A^2D \neq 0.$

Cette équation admet une racine double, -2, et une racine $\frac{23}{5}$ qui est simple. La solution peut donc s'obtenir aisément par la recherche des racines commensurables. On peut aussi prendre une formule de résolution de la forme

(2) $$x - \frac{1}{5} = r.\sqrt[3]{ab^2} + r^2.\sqrt[3]{ba^2}, \qquad r^3 = 1.$$

En élevant au cube les deux membres, on obtient l'équation

(3) $$x^3 - \frac{3}{5}x^2 + 3\left(\frac{1}{25} - ab\right)x - \frac{1}{125} - ab(a+b) + \frac{3ab}{5} = 0.$$

L'équation (3) sera équivalente à l'équation (1) si l'on prend

$$ab = \frac{1}{25} + \frac{72}{15} = \frac{121}{25}, \qquad \frac{1}{125} + \frac{121}{25}(a+b) - \frac{363}{125} = \frac{92}{5},$$

ce qui donne

$$a + b = \frac{2\,662}{5.121} = \frac{22}{5}, \qquad a = b = \frac{11}{5}.$$

La formule (2) devient ainsi $x = \frac{1}{5} + \frac{11}{5}(r + r^2)$. En y remplaçant r par ses trois valeurs, on trouve $x = \frac{23}{5}$ et $x = -2$, cette dernière racine étant double.

Exemple IV. — Soit à résoudre l'équation

(1) $$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 4 = 0.$$

Prenons comme inconnue auxiliaire $X = x - \frac{5}{6}$, et comme formule de résolution

(2) $$X = r.\sqrt[3]{ab^2} + r^2.\sqrt[3]{ba^2}, \qquad r^3 = 1.$$

L'équation en X est

(3) $$2X^3 + \frac{X^2}{2}f''\left(\frac{5}{6}\right) + Xf'\left(\frac{5}{6}\right) + f\left(\frac{5}{6}\right) = 0,$$

ou

$$X^3 - \frac{7}{12}X - \frac{103}{54} = 0.$$

En élevant au cube les deux membres de la relation (2), on obtient l'équation du 3e degré

$$(2') \qquad X^3 - 3abX - ab(a+b) = 0,$$

que l'on doit identifier avec l'équation précédente. On posera donc

$$(4) \qquad ab = \frac{7}{36}, \qquad a+b = \frac{206}{21},$$

et l'on en déduit $\quad a = \dfrac{206 - \sqrt{42\,093}}{42}, \qquad b = \dfrac{206 + \sqrt{42\,093}}{42}$

et, par suite, $\quad 6^3 . ab^2 = 206 + \sqrt{42\,093}, \qquad 6^3 . ba^2 = 206 - \sqrt{42\,093}.$

La formule (2) devient alors

$$x = \frac{5 + r\sqrt[3]{206 + \sqrt{42\,093}} + r^2\sqrt[3]{206 - \sqrt{42\,093}}}{6}.$$

C'est précisément la formule qu'aurait donnée la méthode de Cardan. En appliquant cette formule au calcul logarithmique de la racine réelle, avec les tables à cinq décimales, on obtient $x = 2,2296$. En calculant les radicaux avec dix décimales, par les procédés arithmétiques, on trouve

$$\sqrt{42\,093} = 205,16578\,68653, \qquad \sqrt[3]{206 + \sqrt{42\,093}} = 7,43599\,33025,$$

$$\sqrt[3]{206 - \sqrt{42\,093}} = 0,94136\,70823, \qquad x = 2,22956\,00641.$$

Remarque. — La méthode proposée permet de voir presque immédiatement que, a et b étant des nombres réels, l'équation proposée a une seule racine réelle que la règle à calcul donne très rapidement avec trois chiffres significatifs. Ayant obtenu la valeur approchée par excès 2,23, on peut poursuivre le calcul par les méthodes d'approximation habituelles, si l'on ne veut pas aborder le calcul un peu long d'un radical carré et de deux radicaux cubiques.

Désignant ensuite par x la racine réelle, par x' et x'' les deux racines imaginaires, comme $x' + x''$ et $x'x''$ se calculent aisément, on formera l'équation du second degré qui admet pour racines les racines imaginaires de (1) :

Soit z l'une de ces racines x' ou x'', on a

$$xz^2 + x(x - 2,5)z + 4 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad z = 1,25 - \frac{x}{2} \pm \frac{i}{4\sqrt{x}}\sqrt{10x^2 - 19x + 36}.$$

Exemple V. — Prenons l'équation

$$(1) \qquad x^3 - 4x^2 + 3x + 1 = 0$$

et posons $x = X + \frac{4}{3}$; l'équation en X est

$$(2) \qquad X^3 - \frac{7}{3}X + \frac{7}{27} = 0,$$

et la formule de résolution est

$$(3) \qquad X = r.\sqrt[3]{ab^2} + r^2.\sqrt[3]{ba^2}, \qquad \text{avec} \qquad r^3 = 1, \qquad ab = \frac{7}{9},$$

$$a + b = -\frac{1}{3}, \qquad a - b = i\sqrt{3}.$$

Les nombres a et b étant imaginaires, les trois racines de l'équation donnée sont nécessairement réelles et distinctes.

Si l'on veut calculer les racines, on posera

$$a = u(\cos v + i \sin v), \qquad b = u(\cos v - i \sin v),$$

d'où $\quad a + b = 2u \cos v = -\dfrac{1}{3}, \qquad \dfrac{a-b}{i} = 2u \sin v = \sqrt{3}.$

$$\operatorname{tang} v = -3\sqrt{3}, \qquad u = \frac{1}{3}\sqrt{7}.$$

ce qui détermine u et v : $u = 0{,}881917$, $v = 100^\circ\, 53'\, 35''$.

Le calcul s'achève sans aucune difficulté et l'on trouve les trois valeurs suivantes de x :

$$x_1 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{7}\cos\varphi_1, \qquad x_2 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{7}\cos\varphi_2, \qquad x_3 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{7}\cos\varphi_3,$$

$$\varphi_1 = \frac{v}{3} = 33^\circ\, 37'\, 53'', \qquad \varphi_2 = 120^\circ - \frac{v}{3} = 86^\circ\, 22'\, 7'', \qquad \varphi_3 = 120^\circ + \frac{v}{3} = 153^\circ\, 37'\, 53''$$
$$= 180^\circ - 26^\circ\, 22'\, 7'',$$

angles calculés à une demi-seconde près.

Les trois valeurs de x que l'on en déduit sont

$$x_1 = 2{,}8019, \qquad x_2 = 1{,}4450, \qquad x_3 = -2{,}9136,$$

valeur à un demi-millième près.

On doit remarquer que le calcul pourrait être fait sans le secours des tables de logarithmes. L'angle v, donné par sa tangente, peut être développé en série, lui ou un de ses multiples entiers. Ainsi

$$\operatorname{tang}\left(v - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}}, \qquad v = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{3^5\sqrt{3}} + \frac{1}{5.3^7\sqrt{3}} - \ldots,$$

$$\varphi_1 = \frac{v}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{9\sqrt{3}} - \frac{1}{729\sqrt{3}} + \frac{1}{5.6561\sqrt{3}} - \frac{1}{7.177147\sqrt{3}} + \frac{1}{9.4782969\sqrt{3}} \ldots,$$

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{3} - \varphi_1, \qquad \varphi_3 = \frac{2\pi}{3} + \varphi_1.$$

Les angles auxiliaires sont alors exprimés en radians.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2234. — *On donne trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz.

1° *Former l'équation de la surface* (Σ) *engendrée par un cercle* (C) *de rayon constant* a, *s'appuyant sur les deux bissectrices de l'angle* xOy, *de manière que son plan soit parallèle au plan* yOz. *En déduire une représentation paramétrique en posant*

$$x = a\cos u, \qquad y = a\cos v.$$

2° *Étudier les contours apparents de la surface sur les plans de projection et les sections faites parallèlement à ces plans.*

3° *Mettre en évidence un nouveau mode de génération de la surface par un cercle.*

4° *Trouver le lieu des points de* (Σ) *par où passent deux cercles de cette surface s'y coupant sous un angle donné* θ.

5° *Trajectoires orthogonales des cercles de la surface appartenant à l'un des systèmes.*

6° *Démontrer que les lignes asymptotiques de* (Σ) *peuvent être définies par la relation suivante entre les paramètres* u *et* v :

$$\pm(\sin u - \sin v) = \operatorname{ch}\alpha(1 + \sin u \sin v) + \operatorname{sh}\alpha \cos u \cos v,$$

α *étant une constante arbitraire.*

1° Désignons par α, 0 et γ les coordonnées du centre du cercle mobile. Les équations du cercle seront

$$x = \alpha, \qquad y^2 + (z - \gamma)^2 - a^2 = 0,$$

et, en exprimant qu'il rencontre la droite

$$x = y, \qquad z = 0,$$

nous aurons

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0;$$

il n'y a plus qu'à éliminer x et y entre ces trois équations; ceci donne, d'abord

$$y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

puis,

$$y^2 + z^2 - x^2 = 2z\sqrt{a^2 - x^2},$$

et enfin,

$$(\Sigma) \qquad (y^2 + z^2 - x^2)^2 - 4z^2(a^2 - x^2) = 0.$$

Cette deuxième équation est l'équation de la surface (Σ). Elle nous montre de suite que cette surface est du quatrième ordre, qu'elle admet pour lignes doubles les deux bissectrices de l'angle xOy; et, enfin, qu'elle est tout entière comprise entre les deux plans $x = \pm a$, qui touchent chacun la surface tout le long d'un cercle.

Tous ces résultats sont évidents géométriquement; nous laissons au lecteur le soin de s'en rendre compte.

Posons alors

$$x = a\cos u, \qquad y = a\cos v;$$

l'équation deviendra

$$(z^2 + a^2\cos^2 v - a^2\cos^2 u)^2 = 4a^2z^2\sin^2 u,$$

puis

$$z^2 \mp 2az\sin u + a^2\cos^2 v - a^2\cos^2 u = 0$$

et celle-ci nous donne

$$z = \pm a\sin u \pm a\sin v,$$

les deux doubles signes étant indépendants. Cela nous fait quatre représentations paramétriques, que nous pouvons désigner, pour abréger, par $++$, $+-$, $-+$, et $--$. Elles se ramènent toutes à la première en changeant u en $-u$, v en $-v$, ou simultanément u en $-u$, v en $-v$. La surface (Σ) est donc représentée par les équations paramétriques

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a\cos u, \\ y = a\cos v, \\ z = a(\sin u + \sin v), \end{cases}$$

dans lesquelles u et v varient, d'une façon arbitraire, chacun de $-\pi$ à $+\pi$.

Les lignes coordonnées $u = C^{te}$ sont formées par le système de cercles indiqués dans l'énoncé, et les lignes coordonnées $v = C^{te}$ par un système de cercles parallèles au plan des zx et tout à fait analogue au premier. Ceci répond à la troisième partie de l'énoncé.

Quand u varie de 0 à π, le cercle (C) varie depuis le cercle limite $x = a$, jusqu'au cercle limite $x = -a$, en restant au-dessus du plan des xy. Quand u varie de $-\pi$ à 0, on obtient les cercles symétriques de ceux-ci par rapport au plan des xy.

Tout ceci est rendu évident par la recherche directe de la représentation paramétrique. Considérons le cercle (C) dans une de ses positions parallèles au plan des yz; appelons C son centre, CM son rayon courant et v l'angle de CM avec Oy, le plan des yz étant orienté de Oy vers Oz. Les coordonnées du centre C sont $a\cos u$, 0, $a\sin u$, puisque le rayon est constant et égal à a et que le point de la bissectrice $a\cos u$, $a\cos u$, 0, est sur ce cercle.

Alors les coordonnées du point M sont

$$x = a\cos u, \qquad y = a\cos v \qquad \text{et} \qquad z = z_c + a\sin v = a(\sin u + \sin v).$$

Nous retrouvons bien ainsi les équations (1) et nous suivons en outre le déplacement du cercle (C) comme nous l'avions indiqué.

2° Nous aurons le contour apparent sur le plan de xy, en annulant $f'z$; ceci nous donne

$$4z(y^2+z^2-x^2)-8z(a^2-x^2)=0,$$

équation qui se décompose en deux :

$$z=0 \qquad \text{et} \qquad x^2+y^2+z^2-2a^2=0.$$

La première donne

$$(y^2-x^2)^2=0;$$

ce sont les lignes doubles de la surface; c'est une solution impropre.

La deuxième, combinée aussi avec l'équation (Σ), donne

$$4(a^2-x^2)^2-4z^2(a^2-x^2)=0;$$

nous avons déjà les deux droites $x=\pm a$, solutions évidentes qui correspondent aux deux cercles limites; puis, $x^2+z^2-a^2=0$, qui, avec $x^2+y^2+z^2-2a^2=0$, donne $y=\pm a$, droites qui correspondent aux cercles limites du second système.

Annulons maintenant f'_z, nous obtiendrons le contour apparent sur le plan des xz; or ceci nous donne

$$4y(y^2+z^2-x^2)=0,$$

équation qui se décompose en deux : $y=0$ et $y^2+z^2-x^2=0$. La deuxième, combinée avec (Σ), donne

$$z=0 \qquad \text{et} \qquad x=\pm a;$$

$z=0$ correspond à une solution impropre constituée par les lignes doubles, et $x=\pm a$, aux deux cercles limites du premier système.

La première équation, $y=0$, nous donne $(z^2+x^2)^2-4a^2z^2=0$; c'est la trace de la surface sur le plan des zx; elle se compose de deux cercles égaux et symétriques, tangents à Ox au point O, et ayant pour rayon a; ce sont deux cercles du second système.

Le contour apparent sur le plan des yz doit être tout pareil, et s'obtient en annulant f'_x. Ceci donne

$$-4x(y^2+z^2-x^2)+8xz^2=0;$$

cette équation se décompose en deux : $x=0$ et $x^2+z^2-y^2=0$. La première donne la section par le plan des yz, deux cercles du premier système; la deuxième, avec (Σ), donne

$$4z^4-4z^2(a^2-x^2)=0,$$

qui se décompose en $z=0$ et $x^2+z^2=a^2$. La droite $z=0$ correspond aux lignes doubles, et $x^2+z^2=a^2$, avec $x^2+z^2=y^2$, donne les deux droites $y=\pm a$, qui correspondent aux cercles limites du second système.

Restent à étudier les sections faites parallèlement aux plans de coordonnées. Pour deux d'entre eux, ces sections sont évidentes; ce sont celles faites parallèlement aux plans des yz et des zx; chacune d'elles se compose de deux cercles du premier ou du second système.

Les sections parallèles au plan des xy sont de vraies courbes du quatrième degré qu'il faut étudier. Il est d'ailleurs facile de prévoir leurs formes diverses avec ce qui a été vu antérieurement sur la forme de la surface. Un premier point évident est que chacune de ces courbes, ou plutôt sa projection sur le plan des xy, a quatre axes de symétrie, les axes de coordonnées et les deux bissectrices. Pour $z=h=0$, la courbe s'aplatit sur les deux bissectrices, qui comptent chacune deux fois et ne sont acceptables qu'entre $x=-a$ et $x=a$. Pour $z=h>0$ et très petit, la courbe se rapproche

beaucoup des deux bissectrices et a la forme ci-contre. Quand h augmente, les sinuosités s'atténuent et la courbe se rapproche d'un ovale. Enfin, pour $h = a$, la courbe devient un ovale inscrit dans un carré. Quand h croît à partir de a, l'ovale diminue, et enfin, pour $h = 2a$, il devient nul, et disparaît ensuite.

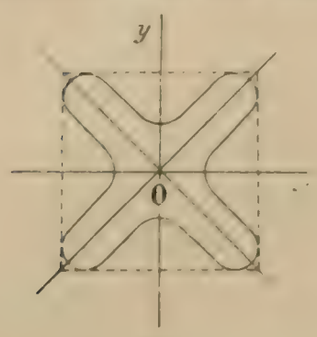


Fig. 1.

Pour vérifier tout ceci, faisons $z = h$ et étudions l'équation bicarrée en y,

$$y^4 - 2(x^2 - h^2)y^2 + (x^2 + h^2)^2 - 4a^2h^2 = 0.$$

Supposons $h < a$. Les coefficients s'annulent pour

$$x = \pm h, \qquad x = \pm \sqrt{2ah - h^2};$$

$\sqrt{2ah - h^2}$ est plus grand que h et plus petit que a; en se bornant aux valeurs positives, on voit donc que les droites $x = h$, $x = \sqrt{2ah - h^2}$ et $x = 0$, occupent les positions indiquées sur la figure 2. En appliquant le théorème de Descartes, on voit que la droite $x = h$ n'intervient pas dans la séparation, qu'entre l'axe des y et la droite $x = \sqrt{2ah - h^2}$, il y a une racine positive et une négative, et qu'à droite de cette dernière parallèle à Oy, il y a 0 ou 2 racines positives. Pour achever la discussion, il n'y a plus qu'à étudier la condition de réalité, qui est

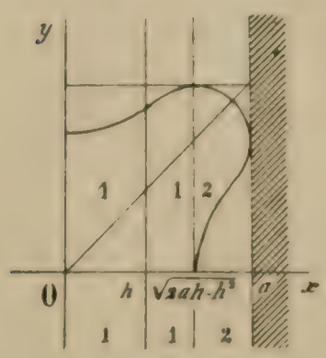


Fig. 2.

$$4a^2h^2 - 4x^2h^2 > 0,$$

et qui se réduit à $x < a$. En calculant les valeurs de y pour $x = 0$, $x = h$, $x = \sqrt{2ah - h^2}$ et $x = a$, il est facile alors de tracer l'arc du premier quadrant, et il n'y a plus ensuite qu'à achever la courbe par symétrie.

Pour $h = a$, $\sqrt{2ah - h^2} = a$, et les deux droites $x = \sqrt{2ah - h^2}$ et $x = a$ coïncident, la sinuosité disparaît et la courbe se réduit à un ovale; les deux axes situés sur Ox et Oy ont pour longueur commune $2a$ et ceux situés sur les bissectrices, $a\sqrt{6}$.

Quand h est plus grand que a, l'équation en y^2 a une racine positive quand $x < \sqrt{2ah - h^2}$, et, plus loin, les deux racines sont négatives ou imaginaires. La courbe est donc encore un ovale ayant pour longueur d'axe, sur Ox et sur Oy, $2\sqrt{2ah - h^2} < 2a$. Pour $h = 2a$, l'ovale devient nul; au-delà, il n'existe plus.

3° La troisième partie a déjà été résolue, dès le début de cette question.

4° Les paramètres directeurs des cercles u sont : 0, $-\sin v$, $\cos v$. Ceux des cercles v, $-\sin u$, 0, $\cos u$. Chacun de ces systèmes est d'ailleurs un système de cosinus directeurs, de sorte que le cosinus de l'angle des deux cercles est donné par

$$\cos\theta = \cos u \cos v.$$

Ceci est la relation entre u et v; c'est l'équation de la représentation plane du lieu. En tenant compte des équations (1), cette relation devient

$$xy = a^2 \cos\theta,$$

et la courbe cherchée est l'intersection de ce cylindre hyperbolique avec la surface (Σ).

5° Soit $v = \varphi(u)$ l'équation paramétrique de la trajectoire orthogonale du système $u = C^{te}$; les paramètres de cette courbe sont

$$-\sin u, \qquad -v'\sin v, \qquad \cos u + v'\cos v;$$

ceux du cercle u,

$$0, \qquad -\sin v, \qquad \cos v,$$

et la condition d'orthogonalité est

$$v' + \cos u \cos v = 0,$$

ou

$$\frac{dv}{du} + \cos u \cos v = 0,$$

$$\frac{dv}{\cos v} = -\cos u du.$$

L'intégration est immédiate et donne

$$\mathrm{L}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{v}{2}\right) = \lambda - \sin u,$$

λ étant une constante arbitraire; nous en tirons, en posant $t = \mathrm{tg}\frac{v}{2}$,

$$\frac{1+t}{1-t} = e^{\lambda - \sin u} = e^{2w},$$

en posant encore $2w = \lambda - \sin u$; par conséquent,

$$t = \frac{e^{2w} - 1}{e^{2w} + 1} = \frac{e^{w} - e^{-w}}{e^{w} + e^{-w}},$$

$$t = \mathrm{th}\, w, \qquad \frac{2t}{1+t^2} = \mathrm{th}\, 2w, \qquad \text{et} \qquad \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1}{\mathrm{ch}\, 2w}.$$

Les équations des trajectoires orthogonales des cercles u sont donc

$$\begin{cases} x = a \cos u, \\ y = \dfrac{a}{\mathrm{ch}\,(\lambda - \sin u)}. \\ z = a \sin u + a\, \mathrm{th}\,(\lambda - \sin u). \end{cases}$$

6° Il reste maintenant à trouver les lignes asymptotiques de la surface Σ. Nous exprimerons, pour cela, que le plan osculateur à l'une de ces courbes coïncide avec le plan tangent au point (u, v). Soit, comme précédemment, $v = \varphi(u)$ l'équation d'une telle courbe, v' et v'' les deux premières dérivées de v par rapport à u, x' et x'', celles de x, etc.; il nous suffira d'exprimer que les directions x', y', z' et x'', y'', z'' sont dans le plan tangent; or la première y est déjà, il n'y aura à tenir compte que de la seconde.

Nous avons

$$x' = -a \sin u, \qquad y' = -av' \sin v, \qquad z' = a(\cos u + v' \cos v),$$

puis,

$$x'' = -a \cos u, \qquad y'' = -av'' \sin v - av'^2 \cos v, \qquad z'' = a(-\sin u + v'' \cos v - v'^2 \sin v);$$

d'autre part, le plan parallèle au plan tangent et mené par l'origine est

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & -\sin v & \cos v \\ -\sin u & 0 & \cos u \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$+ \sin v \cos u\, x + \sin u \cos v\, y + \sin u \sin v\, z = 0.$$

La condition est donc

$$x'' \sin v \cos u + y'' \sin u \cos v + z'' \sin u \sin v = 0,$$

ou

$$v'^2 \sin u + \sin v = 0,$$

$$\frac{dv}{\sqrt{\sin v}} = \frac{du}{\sqrt{-\sin u}}.$$

Pour intégrer cette équation différentielle, nous supposerons que u et v sont des fonctions d'une même variable t définies par les deux équations compatibles

$$u'^2 = -\sin u, \qquad v'^2 = \sin v,$$

et nous poserons

$$u + v = \lambda, \qquad u - v = \mu,$$

puis

$$u = \frac{\lambda + \mu}{2}, \qquad v = \frac{\lambda - \mu}{2}.$$

D'autre part,

$$u'^2 - v'^2 = -\sin u - \sin v,$$

$$\lambda'\mu' = -2\sin\frac{\lambda}{2}\cos\frac{\mu}{2}.$$

Mais de $u'^2 = -\sin u$, $v'^2 = \sin v$, nous déduisons

$$2u'' = -\cos u, \qquad 2v'' = \cos v,$$

puis

$$\lambda'' = \sin\frac{\lambda}{2}\sin\frac{\mu}{2},$$

$$\mu'' = -\cos\frac{\lambda}{2}\cos\frac{\mu}{2};$$

il n'y a plus qu'à diviser par $\lambda'\mu'$ pour avoir

$$\frac{\lambda''}{\lambda'} = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\mu}{2}\cdot\mu'.$$

$$\frac{\mu''}{\mu'} = \frac{1}{2}\cot\frac{\lambda}{2}\cdot\lambda'.$$

L'intégration est alors immédiate et donne

$$\lambda' = A\cos\frac{\mu}{2}, \qquad \mu' = B\sin\frac{\lambda}{2},$$

A et B sont deux constantes arbitraires dont le produit doit être égal à -2.

Rappelons-nous maintenant que

$$u'^2 = -\sin u, \qquad 2u' = \lambda' + \mu',$$

$$2u' = A\cos\frac{\mu}{2} + B\sin\frac{\lambda}{2},$$

$$2u' = A\cos\frac{u-v}{2} + B\sin\frac{u+v}{2};$$

nous aurons de suite $4u'^2$, c'est-à-dire $-4\sin u$:

$$-4\sin u = A^2\cos^2\frac{u-v}{2} + B^2\sin^2\frac{u+v}{2} + 4\cos\frac{u-v}{2}\sin\frac{u+v}{2},$$

ou

$$-4\sin u = \frac{A^2}{2}\left[1 + \cos(u-v)\right] + \frac{B^2}{2}\left[1 - \cos(u+v)\right] + 2(\sin u + \sin v).$$

Or $A^2B^2 = 4$; nous pouvons donc poser $A^2 = 2e^{\alpha}$, $B^2 = 2e^{-\alpha}$, et nous aurons alors

$$2(\sin v - \sin u) = e^{\alpha}\left[1 + \cos(u-v)\right] + e^{-\alpha}\left[1 - \cos(u+v)\right],$$

$$2(\sin v - \sin u) = 2\operatorname{ch}\alpha + 2\operatorname{sh}\alpha\cos u\cos v + 2\operatorname{ch}\alpha\sin u\sin v;$$

nous avons donc finalement la relation annoncée

$$\sin v - \sin u = \operatorname{ch}\alpha\left(1 + \sin u\sin v\right) + \operatorname{sh}\alpha\cos u\cos v.$$

Cette relation convient au cas où u est négatif et v, positif. Dans l'autre cas, il faut changer u en $-u$ et v en $-v$ et le premier membre seul change; il devient

$$\sin u - \sin v.$$

Bonnes solutions : MM. Jolly, à Honfleur et G. Lach, à Douai.

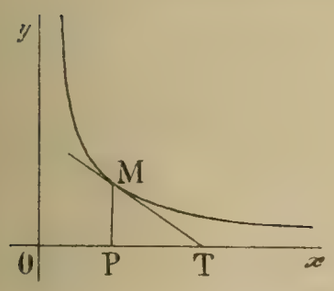
2238. — *Soient* Ox, Oy *deux axes de coordonnées rectangulaires et* C *une courbe tracée dans l'angle positif de ces axes. On désigne par* P *le pied de l'ordonnée d'un point quelconque* M *de cette courbe, par* T *le point de rencontre de la tangente en* M *avec l'axe* Ox *et on suppose* $\overline{OT} > \overline{OP}$.

1° *Déterminer les courbes* C *pour lesquelles l'aire comprise entre l'axe* Ox, *la courbe* C, *l'axe* Oy *et l'ordonnée* PM *est égale à l'aire du triangle* PMT. *Construire les courbes* C.

2° *Démontrer que les deux aires précédentes supposées homogènes ont par rapport à l'axe* Oy *des moments d'inertie dont le rapport est constant quel que soit le point* M *sur une quelconque des courbes* C.

(Certificat de Mathématiques générales, Nancy, juillet 1912.)

1. Soit $y = f(x)$ l'équation de la courbe C, nous supposons que y est positif pour toute valeur positive de x. Dans ce cas, l'aire comprise entre l'axe Ox, la courbe C, l'axe Oy et l'ordonnée PM est égale à $\int_0^x y\,dx$.



D'autre part, l'aire du triangle PMT est égale à $\frac{PM \cdot PT}{2}$; PM est égal à y et comme $\overline{OT} > \overline{OP}$, la longueur PT est égale à la valeur algébrique de la sous-tangente, c'est-à-dire à $-\frac{y}{y'}$. Par suite, l'aire du triangle PMT est égale à $-\frac{y^2}{2y'}$, et l'on doit avoir

$$(1) \qquad \int_0^x y\,dx = -\frac{y^2}{2y'}.$$

Différentions cette équation; nous obtenons

$$y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2yy'^2 - y''y^2}{y'^2},$$

ou, en divisant par y et en chassant le dénominateur

$$(2) \qquad 4y'^2 = yy''.$$

Toute intégrale de l'équation (1) est intégrale de l'équation (2), mais la réciproque n'est pas vraie. Il est facile d'avoir l'intégrale générale de (2) : en effet, cette équation peut s'écrire

$$4\frac{y'}{y} = \frac{y''}{y'};$$

elle s'intègre immédiatement et donne

$$4L|y| = L|y'| - L|C|,$$

ou

$$y^4 = \frac{y'}{C}, \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{y'}{y^4} = C,$$

C désignant une constante arbitraire.

En intégrant une seconde fois, on obtient

$$-\frac{1}{3y^3} = Cx + C',$$

C' étant une nouvelle constante, et ceci peut s'écrire sous une forme plus simple

$$y = (\lambda x + \mu)^{-\frac{1}{3}}.$$

Telle est l'intégrale générale de l'équation (2), λ et μ désignant des constantes arbitraires.

Il faut maintenant examiner si cette valeur de y vérifie l'équation (1). Remplaçons y par $(\lambda x + \mu)^{-\frac{1}{3}}$ dans l'équation (1); le premier membre s'écrit

$$\int_0^x y\,dx = \int_0^x (\lambda x + \mu)^{-\frac{1}{3}} = \frac{3(\lambda x + \mu)^{\frac{2}{3}}}{2\lambda} - \frac{3\mu^{\frac{2}{3}}}{2\lambda},$$

et le second

$$-\frac{y^2}{2y'} = -\frac{(\lambda x + \mu)^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}(\lambda x + \mu)^{-\frac{4}{3}}\lambda} = \frac{3(\lambda x + \mu)^{\frac{2}{3}}}{2\lambda}.$$

Pour que ces deux membres soient égaux quel que soit x, il faut que μ soit nul.

On en conclut que toutes les fonctions y qui vérifient l'équation (1) sont de la forme $y = (\lambda x)^{-\frac{1}{3}}$, ce qu'on peut encore écrire

$$y = ax^{-\frac{1}{3}},$$

a désignant une constante arbitraire qu'on doit supposer positive.

La construction de la courbe C ne présente aucune difficulté; quand x croît de 0 à $+\infty$, y décroît de $+\infty$ à 0, on a la forme de courbe indiquée plus haut.

2. Pour évaluer le moment d'inertie de l'aire $OyMP$ par rapport à Oy, nous décomposons cette aire en trapèzes mixtilignes infiniment petits par des parallèles à Oy, et nous remplaçons chaque trapèze par un rectangle, dont l'aire est ydx.

Le moment d'inertie du rectangle est x^2ydx, en supposant que la densité superficielle soit égale à 1, et celui de l'aire considérée est $\int_0^h x^2ydx$, h désignant l'abscisse du point M.

Remplaçons y par sa valeur $ax^{-\frac{1}{3}}$; nous avons

$$\int_0^h x^2ydx = a\int_0^h x^{\frac{5}{3}}dx = \frac{3}{8}ah^{\frac{8}{3}}.$$

D'autre part, la tangente au point M a pour équation

$$y - ah^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}ah^{-\frac{4}{3}}(x - h),$$

ou

$$y = \frac{1}{3}ah^{-\frac{4}{3}}(4h - x). \tag{3}$$

Ceci nous montre que l'abscisse du point T est égale à $4h$, et par suite le moment d'inertie de l'aire PMT est $\int_h^{4h} x^2ydx$, ou y a la valeur (3), c'est-à-dire

$$\frac{1}{3}ah^{-\frac{4}{3}}\int_h^{4h} x^2(4h - x)dx \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{3}ah^{-\frac{4}{3}}\left|\frac{4hx^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right|_h^{4h}.$$

On trouve ainsi $\frac{27}{4}ah^{\frac{8}{3}}$.

Le rapport des deux moments d'inertie est alors

$$\frac{3}{8}ah^{\frac{8}{3}} : \frac{27}{4}ah^{\frac{8}{3}} = \frac{1}{18};$$

il est constant et indépendant du point M.

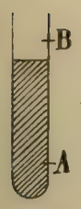
L. JOLLY, à Honfleur.

Bonnes solutions par MM. Jean Delage; G. Lach; M. Mazet.

PHYSIQUE ET CHIMIE

Concours d'admission à l'école supérieure des mines en 1914.

2247. — *Un liquide est enfermé dans une longue éprouvette cylindrique en verre, qui est portée successivement à 0° et à 100° et sur laquelle sont tracés deux traits de repère A et B. Sachant que la colonne liquide a une longueur de 100^{cm} à 0° et de 105^{cm} à 100°, que la distance entre les deux traits de repère A et B est de 100^{cm} à 0° et de 100^{cm},1 à 100°, on demande quelle est la valeur moyenne entre 0° et 100° :*



1° du coefficient de dilatation linéaire du verre;

2° du coefficient de dilatation du liquide;

3° du coefficient de dilatation apparente du liquide dans le verre, tel qu'on l'observerait si l'éprouvette était graduée.

On fera les approximations habituelles, c'est-à-dire que les dilatations seront considérées comme des quantités très petites dont on peut négliger le carré.

1° La distance des deux traits ayant augmenté de 0^{cm},1 pour un écart initial de 100^{cm} et pour une élévation de température de 100°, le coefficient de dilatation linéaire du verre est

$$\lambda = 0{,}00001.$$

2° Si s_0 est la section de l'éprouvette à 0°, le volume du liquide à 0° est $100s_0$. A 100°, la section est devenue $s_0(1+200\lambda)$, la longueur occupée par le liquide, 105, donc le volume de celui-ci $105s_0(1+200\lambda)$. Le coefficient de dilatation du liquide, dont l'expression générale est $\frac{v-v_0}{v_0 t}$, est donc

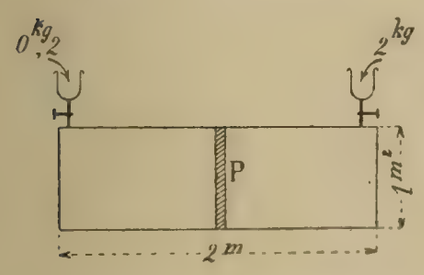
$$c = \frac{105s_0(1+200\lambda) - 100s_0}{10\,000s_0} = \frac{5 + 105 \times 0{,}002}{10\,000} = 0{,}000521.$$

3° Le coefficient de dilatation apparente γ du liquide est la différence entre le coefficient de dilatation réelle c et le coefficient de dilatation cubique du verre qui est égal à 3λ. Donc

$$\gamma = 0{,}000521 - 0{,}00003 = 0{,}000491.$$

Solutions exactes de MM. E. Dumaine, à Saint-Étienne et M. Mazet, à Alger.

2248. — *Un récipient cylindrique fermé, dans lequel on a fait le vide, est maintenu à la température constante de 100°. Il est divisé en deux compartiments par un piston mobile P et il est muni à ses deux extrémités de deux robinets à entonnoir A et B. On introduit dans ce cylindre 0^{kg},2 d'eau par le robinet A et 2^{kg} d'eau par le robinet B.*



On demande quel est l'effort qui s'exerce sur le piston P :

1° Lorsque celui-ci est maintenu au milieu du cylindre;

2° Dans les diverses autres positions qu'il peut occuper dans le cylindre.

Longueur du cylindre : 2^{m}. Section : 1$^{m^2}$. Épaisseur du piston P négligeable. La densité de la vapeur d'eau sera prise égale à 0,62 et considérée comme constante.

Quand le volume d'un compartiment devient inférieur au volume que possède, à l'état de vapeur saturante, l'eau qui s'y trouve, celle-ci se condense partiellement et la pression dans ce compartiment reste égale à une atmosphère.

Calculons en particulier le volume V de 2^{kg} de vapeur saturante à 100°. La pression est d'une atmosphère et la relation connue entre le poids et le volume d'un gaz donne ici, V étant évalué en mètres cubes,

$$2 = V \times 0{,}62 \times 1{,}293 \times \frac{273}{373}, \qquad \text{d'où} \qquad V = 3{,}41.$$

Ce résultat montre que, dans le compartiment de droite, la vapeur sera toujours en contact avec un excès de liquide et que la pression y sera toujours d'une atmosphère.

Étudions la pression dans le compartiment de gauche. Le volume de $0^{kg},2$ de vapeur saturante est $\frac{1}{10}V = 0{,}341$; donc, quand le piston sera distant de l'extrémité de gauche de moins de $0^{m},341$, la pression sera d'une atmosphère de chaque côté et le piston sera en équilibre indifférent.

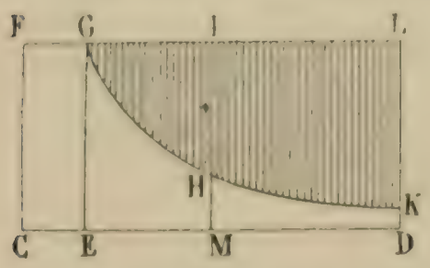
Supposons maintenant le piston à une distance quelconque x, supérieure à $0^{m},341$, de l'extrémite de gauche du cylindre. La pression p, évaluée en atmosphères, de $0^{kg},2$ de vapeur, sera donnée par l'équation

$$0{,}2 = x \times 0{,}62 \times 1{,}293 \times p \times \frac{273}{373},$$

d'ou

$$p = 0{,}341\,\frac{1}{x}.$$

Représentons par CD la longueur du cylindre et elevons en chaque point une ordonnee figurant la pression dans le compartiment de gauche. CF représentant une atmosphère, l'ordonnee reste égale à CF jusqu'au point E tel que



$$CE = 0{,}341;$$

puis le point figuratif décrit l'hyperbole $px = 0{,}341$. Au milieu M,

$$x = 1 \qquad \text{et} \qquad p = 0{,}341.$$

A l'extrémité D,

$$x = 2 \qquad \text{et} \qquad p = 0{,}17.$$

L'effort demandé correspond à la différence entre l'ordonnée de la droite FG et l'ordonnee de l'hyperbole GHK. La force produite par une atmosphère sur une surface d'un mètre carré est de $10\,340^{kg}$. Au milieu du cylindre, l'effort sera de $(1 - 0{,}341) \times 10\,340 = 6\,800^{kg}$ environ.

2249. — *On dissout dans un excès d'acide chlorhydrique étendu une centaine de grammes de fer. Le liquide A ainsi obtenu est introduit dans un ballon portant d'une part un entonnoir à robinet et, d'autre part, un tube à dégagement aboutissant à une éprouvette graduée placée sur l'eau.*

On dissout enfin dans une faible quantité d'eau $0^{g},25$ d'azotate de potassium, ce qui donne un liquide B.

a) *On fait bouillir le liquide A de façon à chasser l'air contenu dans le ballon, puis, maintenant toujours l'ébullition, on introduit rapidement dans le ballon, par l'entonnoir à robinet, le liquide B.*

On recueille un gaz C dont on mesure le volume V_1 après transport sur la cuve à eau.

b) *Le gaz C ayant été desséché, on en prélève 25^{cm^3}, mesurés à la pression atmosphérique sur le mercure, et on transvase ce gaz dans la cloche courbe sur le mercure. Puis on chauffe à son contact un morceau de sulfure de baryum. Après refroidissement, le résidu gazeux D est transvasé sur le mercure dans une éprouvette graduée, et l'on mesure à la pression atmosphérique son volume V_2. On demande :*

1° *La nature des deux gaz C et D;*

2° *Les volumes V_1 et V_2.*

Données numériques. — Température du laboratoire : 15°. Pression barométrique : 770^{mm}. Tension

maximum de la vapeur d'eau à 15° : $12^{mm},7$. *Poids moléculaire de l'azotate de potassium :* 101^g. *On négligera la solubilité du gaz* C.

Le fer est transformé par l'acide chlorhydrique en chlorure ferreux conformément à l'équation

$$2HCl + Fe = H^2 + FeCl^2.$$

Ce sel donne ensuite avec l'azotate de potassium la réaction

$$2AzO^3K + 6FeCl^2 + 8HCl = 2AzO + 3Fe^2Cl^6 + 2KCl + 4H^2O,$$

et le gaz C est du bioxyde d'azote. Le fer étant évidemment en excès, tout l'azotate de potassium entre en réaction et le nombre des millimolécules de bioxyde d'azote est le même que celui des millimolécules d'azotate. Ce nombre x est tel que l'on ait

$$101x = 250, \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{250}{101} = 2,475.$$

Le volume de x molécules de gaz serait, dans les conditions normales, $x \times 22^{cm^3},4$. Sur la cuve à eau, où la température est de 15° et la pression du gaz seul égale à $770 - 12,7 = 757,3$, le volume est

$$V_1 = x \times 22,4 \times \left(1 + \frac{15}{273}\right) \times \frac{760}{757,3} = 58,7.$$

Le sulfure de baryum décompose le bioxyde d'azote, fixe l'oxygène et laisse un résidu d'azote dont le volume est, dans les mêmes conditions, la moitié du volume du bioxyde. Or les mesures ont été faites toutes deux sur un gaz sec et à la pression atmosphérique ; le volume du résidu est donc $V_2 = 12,5$.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1919)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (*Fin.*)

10242. — Ombres à 45° d'un système de deux cônes ayant le même sommet. L'un des axes est vertical, l'autre parallèle à la ligne de terre, et les demi-angles au sommet valent 45°. En outre, les cônes sont limités par des sections équidistantes des sommets.

— **243.** — Intersection d'une surface gauche de révolution engendrée par une frontale F tournant autour d'un axe vertical A et d'un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal, ayant pour génératrices F et A. Solution analytique.

— **244.** — On donne un hyperboloïde de révolution à une nappe d'axe vertical et dont les génératrices font 45° avec l'axe. On fait tourner une génératrice de front autour d'un axe vertical qui la rencontre et qui est situé dans le plan de profil de l'axe de l'hyperboloïde. Intersection du cône et de l'hyperboloïde.

— **245.** — On donne un paraboloïde hyperbolique défini par trois horizontales de cotes 0, 1, 2 et dont les projections forment un triangle équilatéral. Construire le sommet.

— **246.** — Ombre au soleil de l'hyperboloïde engendré par une horizontale tournant autour d'une frontale.

— **247.** — On donne un cylindre de révolution tangent au plan horizontal et une sphère tangente au même plan, en un point de la génératrice de contact du cylindre. Le rayon de la sphère est égal au diamètre du cylindre. Déterminer l'intersection des deux surfaces. Étude analytique.

— **248.** — Intersection d'un tore et d'une sphère bitangente.

— **249.** — On considère la surface gauche engendrée par une horizontale en tournant autour d'une frontale : trouver les contours apparents de la surface.

— **250.** — On donne deux droites (A, A'), (B, B') qui se coupent au point (o, o') et un point (c, c') situé dans le plan de profil du point (o, o'). Trouver le sommet du paraboloïde hyperbolique assujetti à passer par les droites données et le point (c, c') et à avoir ses plans directeurs perpendiculaires aux plans de projection.

— **251.** — Mener à un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal des plans tangents par une droite horizontale quelconque.

— **252**. — On considère un paraboloïde ayant pour plans directeurs les plans de projection; on donne le sommet et un point. La surface est-elle déterminée? Trouver l'intersection du paraboloïde et de la sphère qui a pour centre le sommet et qui passe par le point donné.

— **253**. — On donne un hyperboloïde de révolution défini par un axe vertical et une génératrice quelconque. Mener par cette génératrice un plan tangent situé à une distance donnée d'un point donné. Déterminer le point de contact.

— **254**. — On donne un cercle par son plan, son centre et son rayon. On le fait tourner autour d'un axe vertical. Trouver le contour apparent vertical. Étude analytique.

— **255**. — On donne deux cercles égaux dans le plan de cote zéro. Ce sont les bases de deux cônes dont les sommets, de cotes 5 et 10, se projettent horizontalement au milieu de la ligne des centres. Intersection des deux cônes.

— **256**. — On donne un plan de bout et une droite. Lieu des points équidistants de la droite et du plan. Construire points par points.

— **257**. — On donne un cylindre de révolution dont l'axe est parallèle à la ligne de terre et un cône de révolution dont l'axe est vertical et dont le sommet est situé sur l'axe du cylindre. Intersection des deux surfaces. Nature des projections.

— **258**. — Intersection de deux cônes ayant pour bases des cercles dans le plan horizontal et tels que la droite joignant les sommets passe par l'un des centres d'homothétie des deux cercles.

— **259**. — Intersection d'un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal et d'un cylindre de révolution dont l'axe est horizontal.

— **260**. — On donne un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal. On prend un point sur la surface et par ce point on mène une droite quelconque. Mener par cette droite des plans tangents à la surface.

— **261**. — On considère deux cônes ayant pour bases des cercles égaux situés dans des plans horizontaux. Le sommet de chacun d'eux est le centre de la base de l'autre. Intersection des deux cônes.

VI. — Cinématique.

— **262**. — Étudier le mouvement $x = 1 + 3\sin t - \cos t$, $y = 2 + \sin t + 2\cos t$, $z = 1 + 2\sin t - \cos t$.

— **263**. — On donne un point fixe O dans un plan. Un point M se déplace dans le plan de façon que sa vitesse soit proportionnelle à la racine carrée de la distance OM. Étudier le mouvement.

— **264**. — On donne un cercle et une tangente fixe T. Un point M se déplace sur le cercle de façon que l'extrémité du vecteur vitesse soit constamment sur la droite T. Trouver le lieu de l'extrémité du vecteur accélération.

— **265**. — Trouver l'hodographe du mouvement d'un point se déplaçant sur une parabole de manière que la vitesse aréolaire par rapport au foyer soit constante.

— **266**. — Déterminer le mouvement d'un point sur un cercle, sachant que l'accélération fait un angle constant avec la vitesse.

— **267**. — Une ellipse est parcourue par un point mobile avec une vitesse constante v. Déterminer l'accélération.

— **268**. — Déduire le diagramme des vitesses du diagramme des accélérations tangentielles.

— **269**. — Un point se meut sur un cercle, de façon que l'hodographe soit le cercle obtenu en faisant tourner le premier de $\frac{\pi}{2}$ autour de l'extrémité du rayon horizontal OA. Déterminer le mouvement.

— **270**. — Un point se déplace sur un cercle de façon que l'accélération soit proportionnelle à la vitesse. Loi du mouvement.

— **271**. — Un point décrit la cardioïde $\rho = a(1 + \cos\omega)$ suivant la loi des aires; trouver les composantes de la vitesse et de l'accélération.

— **272**. — Un point décrit un cercle de façon que l'accélération passe par un point fixe. Trouver l'hodographe du mouvement.

— **273**. — Un point décrit la courbe $\rho = \frac{p}{1 + e\cos\omega}$ suivant la loi des aires. Trouver l'hodographe du mouvement.

— **274**. — Soient O et M deux points diamétralement opposés d'un cercle. Le cercle tourne autour du point O avec une vitesse angulaire constante ω, et le point M se déplace sur le cercle en sens contraire avec la vitesse angulaire 2ω. Étudier le mouvement du point M.

(*Fin.*)

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE

2215. — *Montrer que l'équation de la courbe*

$$x^{\frac{1}{5}} + y^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{1}{5}}$$

devient, en se débarrassant des radicaux,

$$(x+y-a)^5 + 625axy[x^2+y^2+a^2-3xy+3a(x+y)] = 0.$$

La construire.

Posons $\quad x^{\frac{1}{5}} = u, \qquad y^{\frac{1}{5}} = v, \qquad a^{\frac{1}{5}} = b,$

ou $\quad x = u^5, \qquad y = v^5, \qquad a = b^5.$

L'équation donnée s'écrit

$$u + v = b.$$

Élevons à la cinquième puissance, nous avons successivement

$$u^5 + 5u^4v + 10u^3v^2 + 10u^2v^3 + 5uv^4 + v^5 = b^5,$$
$$u^5 + v^5 + 5uv(u^3 + 2u^2v + 2uv^2 + v^3) = b^5,$$
$$u^5 + v^5 + 5uv(u+v)(u^2 + uv + v^2) = b^5,$$

ou

$$x + y - a = -5uv(u+v)[(u+v)^2 - uv].$$

Remplaçons $u+v$ par b, nous obtenons

(1) $$x + y - a = -5buv(b^2 - uv),$$

et en élevant à la cinquième puissance, nous avons

$$(x+y-a)^5 = -5^5axy(b^{10} - 5b^8uv + 10b^6u^2v^2 - 10b^4u^3v^3 + 5b^2u^4v^4 - u^5v^5),$$

ou

$$(x+y-a)^5 = -5^5axy[a^2 - xy - 5b^2uv(b^6 - 2b^4uv + 2b^2u^2v^2 - u^3v^3)],$$

ou encore

$$(x+y-a)^5 = -5^5axy[a^2 - xy - 5b^2uv(b^2 - uv)(b^4 - b^2uv + u^2v^2)].$$

Remplaçons dans le crochet du second membre le produit $-5buv(b^2 - uv)$ par sa valeur $x+y-a$ déduite de l'égalité (1), nous avons

$$(x+y-a)^5 = -5^5axy[a^2 - xy + b(x+y-a)(b^4 - b^2uv + u^2v^2)],$$

ou

$$(x+y-a)^5 = -5^5axy[a^2 - xy + a(x+y-a) - buv(b^2 - uv)(x+y-a)],$$

ou, encore, en faisant la même substitution,

$$(x+y-a)^5 = -5^5axy\left[a^2 - xy + a(x+y-a) + \frac{(x+y-a)^2}{5}\right].$$

L'équation est alors rationnelle et peut s'écrire

$$(x+y-a)^5 + 625axy[x^2+y^2+a^2-3xy+3a(x+y)] = 0.$$

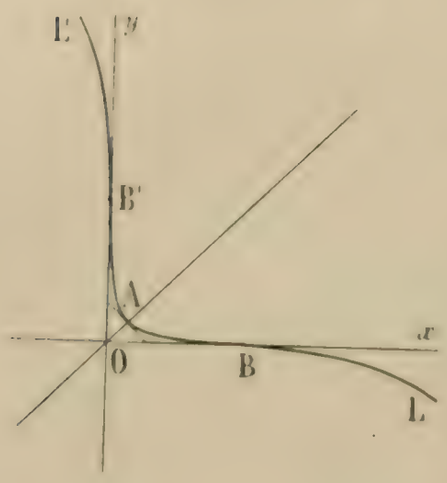
Mais pour construire la courbe, il est préférable d'utiliser l'équation irrationnelle donnée.

Comme cette équation est symétrique par rapport à x et y, la courbe est symétrique par rapport à la première bissectrice des axes des coordonnées $(x - y = 0)$. Elle rencontre cette bissectrice au point A, qui a pour coordonnées $x = y = \frac{a}{32}$.

Pour construire la courbe, nous résolvons l'équation par rapport à y :

$$y = (a^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}})^3,$$

nous faisons varier x de $\frac{a}{32}$ à $+\infty$ (en supposant $a > 0$), nous construisons la branche de courbe correspondante, puis nous prenons la symétrique de cette branche par rapport à la première bissectrice.



La fonction y est continue pour toute valeur de x; quand x croît de $\frac{a}{32}$ à $+\infty$, y décroît de $\frac{a}{32}$ à $-\infty$, en s'annulant pour $x = a$. Nous obtenons ainsi l'arc de courbe ABL qui rencontre Ox au point B.

La dérivée de y par rapport à x est

$$\frac{dy}{dx} = -(a^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}})^2 x^{-\frac{2}{3}} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}};$$

ceci nous montre qu'au point A la tangente est perpendiculaire à OA, et qu'au point B la tangente est Ox. On en conclut que le point B est un point d'inflexion.

Étudions maintenant la branche infinie. Nous avons

$$\frac{y}{x} = \left[\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right]^3;$$

par suite, quand x augmente indéfiniment, $\frac{y}{x}$ a pour limite -1; donc la direction asymptotique est parallèle à la seconde bissectrice des axes. D'autre part, en développant $(a^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}})^3$ par la formule du binome, on voit aisément que $y + x$ est infini pour x infini; par suite, la branche de courbe ABL est parabolique dans la direction perpendiculaire à OA.

Il n'y a plus qu'à achever par symétrie pour avoir toute la courbe.

L. SIMON, à Fourmies.

Bonnes solutions par MM. Emile Dion, école normale de Saint-Cloud; Torin, à Grandvilliers.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2224. — *On considère l'ellipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

La polaire d'un point M *rencontre les axes en* P *et* Q *et la perpendiculaire abaissée de* M *sur* PQ *en* P′ *et* Q′.

1° *Si* M *décrit la parabole*

$$y^2 = 2px + q,$$

la droite PQ *enveloppe une conique.*

2° *Dans la même hypothèse, trouver l'enveloppe de la droite* P′Q′; *construire cette enveloppe en supposant* $q > 0$, *puis* $q < 0$. *Dans quel cas a-t-on une conique?*

1. Soient x_0, y_0 les coordonnées du point M; nous avons

$$y_0^2 = 2px_0 + q. \tag{1}$$

La polaire de ce point par rapport à l'ellipse a pour équation

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-1=0,$$

ou, en remplaçant x_0 par sa valeur $\frac{y_0^2-q}{2p}$ tirée de la relation (1),

$$(2)\qquad b^2x(y_0^2-q)+2pa^2yy_0-2pa^2b^2=0.$$

Comme cette équation renferme le paramètre y_0 au second degré, on en conclut que la polaire du point M enveloppe une courbe de deuxième classe, et pour avoir l'équation de cette conique, il suffit d'écrire que l'équation (2) admet une racine double en y_0. Ceci nous donne

$$b^4qx^2+p^2a^4y^2+2pa^2b^4x=0.$$

Cette équation représente une conique ayant pour axe Ox et dont l'un des sommets est à l'origine.

Cette conique est une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que q est positif, négatif ou nul.

Cette conique est d'ailleurs la polaire réciproque de la parabole $y^2=2px+q$ par rapport à l'ellipse donnée.

2. La perpendiculaire abaissée du point M sur sa polaire par rapport à l'ellipse a pour équation

$$\frac{x-x_0}{\frac{x_0}{a^2}}=\frac{y-y_0}{\frac{y_0}{b^2}},$$

ou, en remplaçant encore x_0 par $\frac{y_0^2-q}{2p}$,

$$(3)\qquad 2pa^2y_0x-b^2(y_0^2-q)y-c^2y_0(y_0^2-q)=0, \qquad (D)$$

en posant comme d'habitude $c^2=a^2-b^2$.

Comme l'équation (3) renferme y_0 au troisième degré, on en conclut que la droite (D) représentée par cette équation enveloppe une courbe de troisième classe.

On peut former l'équation de cette courbe en écrivant que l'équation (4) a une racine double en y_0; on obtient une équation du quatrième degré par rapport à x et y, dont la discussion est assez pénible.

Il est préférable, pour construire l'enveloppe, de chercher les coordonnées d'un point de cette courbe en fonction du paramètre y_0.

Pour cela, dérivons l'équation (3) par rapport à y_0, nous avons

$$(4)\qquad 2pa^2x-2b^2y_0y-c^2(3y_0^2-q)=0.$$

Le point limite de la droite (D) est défini par les équations (3) et (4); en les résolvant par rapport à x et y, nous avons

$$x=-\frac{c^2}{2pa^2}\cdot\frac{(y_0^2-q)^2}{y_0^2+q},\qquad y=-\frac{2c^2}{b^2}\cdot\frac{y_0^3}{y_0^2+q}.$$

Ce sont les équations paramétriques de l'enveloppe; elles représentent une courbe unicursale du quatrième degré; nous allons en déduire la forme de la courbe.

Premier cas. $q>0$.

Posons $q=h^2$, et $y_0=th$, les équations deviennent

$$x=-\frac{c^2h^2}{2pa^2}\cdot\frac{(t^2-1)^2}{t^2+1},\qquad y=-\frac{2c^2h}{b^2}\cdot\frac{t^3}{t^2+1},$$

ou, en posant

$$\frac{c^2h^2}{2pa^2}=\alpha,\qquad \frac{2c^2h}{b^2}=\beta,$$

$$x=-\alpha\frac{(t^2-1)^2}{t^2+1},\qquad y=-\beta\frac{t^3}{t^2+1}.$$

En calculant les dérivées de x et y par rapport à t, nous obtenons

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha \cdot \frac{2t(t^2-1)(t^2+3)}{(t^2+1)^2}, \qquad \frac{dy}{dt} = -\beta \cdot \frac{t^2(t^2+3)}{(t^2+1)^2},$$

et par suite, la pente de la tangente est

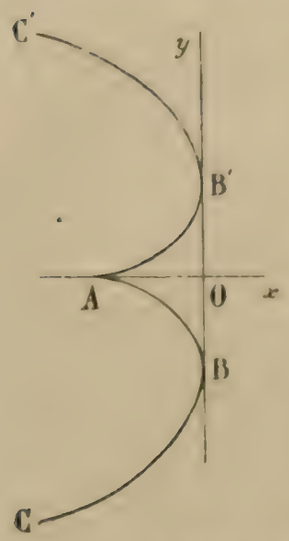
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{t}{2(t^2-1)}.$$

Comme vérification, on peut remarquer que cette quantité est égale à la pente de la droite (3).

Quand on change t en $-t$, x ne change pas et y change de signe, en conservant la même valeur absolue; on en conclut que la courbe est symétrique par rapport à Ox. Il suffira de faire varier t par valeurs positives, et d'achever par symétrie.

Nous supposerons α et β positifs.

Quand t croît de 0 à $+\infty$, x et y varient d'une manière continue; $\frac{dx}{dt}$ est de signe contraire à t^2-1 et $\frac{dy}{dt}$ est toujours négatif. Nous avons le tableau de variations suivant :



t	0		1		$+\infty$
x	$-\alpha$	↗	0	↘	$-\infty$
y	0	↘	$-\frac{\beta}{2}$	↘	$-\infty$

et l'arc de courbe ABC.

La tangente au point A $(t=0)$ est Ox; la tangente au point B $(t=1)$ est Oy.

D'autre part, nous avons $\frac{y}{x} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{t^3}{(t^2-1)^2}$. Quand t croît indéfiniment, $\frac{y}{x}$ a pour limite zéro; donc la branche infinie de courbe BC est parabolique dans la direction Ox.

Il n'y a plus qu'à dessiner la branche de courbe AB'C', symétrique de ABC par rapport à Ox pour avoir toute l'enveloppe.

Deuxième cas. $q < 0$.

Nous poserons cette fois $q = -h^2$, $y_0 = th$, $\frac{c^2h^2}{2pa^2} = \alpha$, $\frac{2c^2h}{b^2} = \beta$, et nous aurons

$$x = -\alpha \frac{(t^2+1)^2}{t^2-1}, \qquad y = -\beta \cdot \frac{t^3}{t^2-1},$$

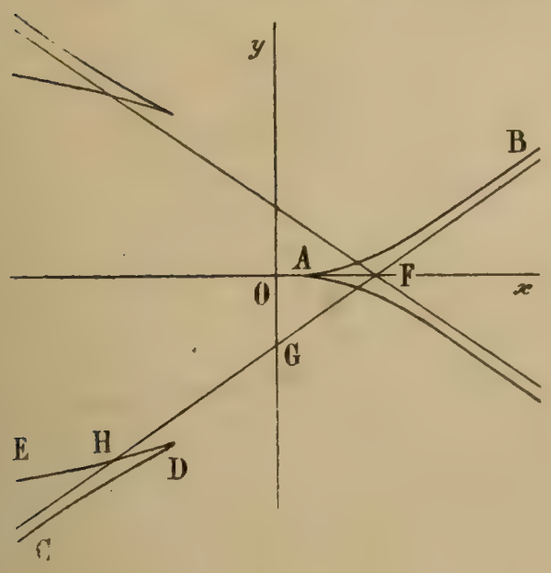
$$\frac{dx}{dt} = -\alpha \cdot \frac{2t(t^2+1)(t^2-3)}{(t^2-1)^2}, \qquad \frac{dy}{dt} = -\beta \cdot \frac{t^2(t^2-3)}{(t^2-1)^2}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{t}{2(t^2+1)}.$$

Dans ce cas, quand t croît de 0 à $+\infty$, x et y sont discontinues pour $t=1$, et $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ ont le signe de $-(t^2-3)$.

On en déduit les variations suivantes :

t	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x	α	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	-8α	↘	$-\infty$
y	0	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	$-\frac{3\alpha\sqrt{3}}{2}$	↘	$-\infty$

Nous obtenons ainsi les branches de courbe AB, CD, DE. Au point A $(t=0)$, la tangente est Ox.



Comme, pour $t=\sqrt{3}$, $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ sont nulles, le point D correspondant est un point de rebroussement. Ses cordonnées sont $x=-8\alpha$, $y=-\frac{3\beta\sqrt{3}}{2}$, et la tangente a pour pente $\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\sqrt{3}}{8}$.

On voit, comme dans le cas précédent, que la branche infinie DE, correspondant à t infini, est parabolique dans la direction Ox.

Étudions maintenant les branches infinies AB et DC qui correspondent aux valeurs de t voisines de 1.

Nous avons $\frac{y}{x}=\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{t^3}{(t^2+1)^2}$; quand t tend vers 1, $\frac{y}{x}$ a pour limite $\frac{\beta}{4\alpha}$. Donc la direction asymptotique a pour pente $\frac{\beta}{4\alpha}$. Cherchons la limite de $y-\frac{\beta}{4\alpha}x$. Nous avons

$$y-\frac{\beta}{4\alpha}x=-\frac{\beta t^3}{t^2-1}+\frac{\beta}{4}\frac{(t^2+1)^2}{t^2-1}=\frac{\beta}{4(t^2-1)}[(t^2+1)^2-4t^3],$$

ou, en divisant haut et bas par $t-1$,

$$(5)\qquad y-\frac{\beta}{4\alpha}x=\frac{\beta(t^3-3t^2-t-1)}{4(t+1)}.$$

Quand t tend vers 1, le second membre a pour limite $-\frac{\beta}{2}$; donc, l'équation de l'asymptote est

$$(6)\qquad Y-\frac{\beta}{4\alpha}x=-\frac{\beta}{2}.$$

Cette droite rencontre Ox au point F qui a pour abscisse 2α, et Oy au point G qui a pour ordonnée $-\frac{\beta}{2}$.

Pour avoir la position de la courbe par rapport à cette asymptote, retranchons (6) de (5); nous avons

$$y-Y=\frac{\beta}{4}\left[\frac{t^3-3t^2-t-1}{t+1}+2\right]=\frac{\beta}{4}\cdot\frac{(t-1)(t^2-2t-1)}{t+1}.$$

Pour les valeurs de t voisines de 1, $\frac{t^2-2t-1}{t+1}$ est négatif; par suite $y-Y$ est de signe contraire à $t-1$.

Pour $t<1$ (branche AB), $y-Y$ est positif, la courbe est au-dessus de l'asymptote; pour $t>1$ (branche DC), $y-Y$ est négatif, la courbe est au-dessous.

Remarquons en outre que le trinome t^2-2t-1 s'annule pour la valeur positive $t=1+\sqrt{2}$; c'est le t du point H où l'asymptote rencontre la courbe. Comme cette valeur est comprise entre $\sqrt{3}$ et $+\infty$, ce point est sur l'arc DE.

On peut d'ailleurs vérifier aisément que le point D est au-dessous de l'asymptote.

En achevant par symétrie par rapport à Ox, on a toute la courbe.

Elle admet trois points de rebroussement; ceci fait diminuer la classe de neuf unités; comme la courbe est du quatrième degré, on voit qu'elle doit être de troisième classe, comme on l'a vu plus haut.

Troisième cas. $q = 0$.

Dans ce cas l'équation (3) de la droite (D) ne renferme plus y_0 qu'au deuxième degré; elle s'écrit en effet

$$2pa^2x - b^2y_0y - c^2y_0^2 = 0.$$

Elle enveloppe la parabole qui a pour équation

$$b^4y^2 + 8pa^2c^2x = 0.$$

G. LACH, à Douai.

Bonnes solutions par MM. Emile Dion, école normale de St-Cloud; M. Roux, au Creusot; L. Simon, à Fourmies.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1914)

ÉCOLE CENTRALE

Algèbre et Trigonométrie (M. Gérardin).

10028. — Chercher les valeurs de x qui annulent le déterminant

$$\begin{vmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \\ 2^3 & 2^2 & 2 & 1 \\ 3^3 & 3^2 & 3 & 1 \\ 4^3 & 4^2 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

— **29.** — Etudier le système

$$\lambda x + y + z = a, \quad x + \lambda y + z = b, \quad x + y + \lambda z = c.$$

— **30.** — Etudier les séries

$$u_n = \frac{1}{n^2}, \quad u_n = \frac{1}{n^3}, \quad u_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}}, \quad u_n = \frac{\mathrm{L}n}{n^2}, \quad u_n = nx^n,$$

$$u_n = \frac{nx^n}{\sqrt{n^2+1}}, \quad u_n = \frac{x^n\sqrt{n}}{n+1}, \quad u_n = \frac{x^n}{n+2^n}, \quad u_n = \frac{x^n\mathrm{L}n}{n}, \quad u_n = \frac{x^n}{n+\mathrm{L}n}.$$

— **31.** — Calculer $e^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[4]{e}$ à $\frac{1}{100}$ près.

— **32.** — Démontrer que $\sqrt[n]{a}$ tend vers 1, quand n augmente indéfiniment.

— **33.** — Limite de $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n}$ pour n infini.

— **34.** — Limite de $y = \left(\cos\frac{x}{m}\right)^{m^2}$ pour m infini; cas particulier de $x = 1$; dans ce cas, calculer le résultat à $\frac{1}{100}$ près.

— **35.** — Dérivées de $y = x^m$ (m entier ou fractionnaire), $y = \mathrm{L}x$, $y = \arcsin x$, $y = \operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2}$ (expliquer le résultat).

— **36.** — Appliquer le théorème des accroissements finis à l'expression $\mathrm{L}4 - \mathrm{L}3$.

— **37.** — Dérivées de

$$y = x^{2x}, \quad y = x^{\frac{1}{x}}, \quad y = x^{\sin x}, \quad y = x^{\operatorname{tg} x}, \quad y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}, \quad y = x^{\mathrm{L}x}, \quad y = x^{\frac{1}{\mathrm{L}x}}, \quad y = \cos x^{\mathrm{L}x}.$$

— **38.** — Dérivée de $y = x^{\operatorname{tg} x}$; limite de $x^{\operatorname{tg} x}$, quand x tend vers 0.

— **39.** — Dérivée de $y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$; limite de y pour $x = 0$, pour $x = \frac{\pi}{4}$.

— **40.** — Calculer y_x sachant que $\frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} y} = x$.

— **41.** — Dérivée seconde d'une fonction implicite.

— **42.** — Variations des fonctions :

$$y = e^{\frac{1-x}{x}}, \qquad y = \mathrm{L}(x + \sqrt{x^2+1}), \qquad y = \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}, \qquad y = xe^{\frac{1}{x}}, \qquad y = \frac{e^x - 1}{x},$$

$$y = \frac{e^x}{\sqrt{x}}, \qquad y = \frac{\mathrm{L}x}{x}, \qquad y = \frac{\mathrm{L}x}{x^2}, \qquad y = \frac{\mathrm{L}x}{\sqrt{x}}, \qquad y = \frac{x}{x-1}\mathrm{L}x, \qquad y = x^x, \qquad y = (x-a)^x,$$

$$y = x^{\sqrt{x}}, \qquad y = x^{\frac{1}{x}}, \qquad y = x^{\frac{1}{\mathrm{L}x}}, \qquad y = x^{\mathrm{L}\frac{1}{x}}.$$

— **43.** — Développements en séries de $y = \mathrm{sh}\, x$, $y = \mathrm{ch}\, x$. — En déduire le calcul de $\mathrm{ch}(1)$ à $\frac{1}{10}$ près.

— **44.** — Développements en séries de

$$y = \sin x, \qquad y = \cos x, \qquad y = \frac{1}{1-x}, \qquad y = (1+x)^m, \qquad y = \mathrm{L}(1+x), \qquad y = \mathrm{L}\frac{1-x}{1+x},$$

$$y = \mathrm{arc\,tg}\, x, \qquad y = \mathrm{arc}\sin x, \qquad y = \mathrm{L}(x + \sqrt{1+x^2}).$$

— **45.** — Calculer $\mathrm{arc}\sin\frac{1}{2}$; limite supérieure de l'erreur commise en s'arrêtant au troisième terme.

— **46.** — Calculer $\mathrm{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}}$ (au moyen du développement de $\mathrm{arc\,tg}\, x$) à $\frac{1}{10}$ près.

— **47.** — Limites de $\left(\mathrm{ch}\frac{x}{m}\right)^{m^2}$, pour m infini; $(\sin x)^{\mathrm{tg}\, x}$, pour $x = \frac{\pi}{2}$;

$$(\cos x)^{\mathrm{L}x}, \qquad (\mathrm{ch}\, x)^{\mathrm{L}x}, \qquad \left[\frac{\cos(\alpha + x)}{\cos\alpha}\right]^{\frac{1}{x}}, \qquad \left[\frac{\mathrm{ch}(\alpha + x)}{\mathrm{ch}\,\alpha}\right]^{\frac{1}{x}}, \qquad (\sin x + \cos x)^{\mathrm{L}x}$$

$$(x + \sqrt{1+x^2})^{\mathrm{cotg}\frac{x}{2}}, \qquad (e^x + \mathrm{sh}\, x)^{\frac{1}{x}}, \qquad \left(\mathrm{sh}\, x + \sqrt[3]{1-x}\right)^{\frac{1}{x}},$$

pour $x = 0$.

— **48.** — Limites, pour $x = 0$, de $\sin x \mathrm{L}x$, $\sqrt{x}\,\mathrm{L}x$, $x(\mathrm{L}x)^2$.

— **49.** — Limite de $n^{\frac{1}{n}}$ pour n infini.

— **50.** — Formule de Moivre. En déduire la valeur de $\mathrm{tg}\, ma$.

— **51.** — Construire géométriquement la racine carrée d'un nombre imaginaire.

— **52.** — Décomposer $x^8 + 16$ en facteurs du second degré à coefficients réels. Représenter géométriquement les racines huitièmes de -16.

— **53.** — Racines quatrièmes de i, de $1 + i$; racines cubiques de $1 - i$; racines cinquièmes de $1 - i$.

— **54.** — Résoudre $e^z - e^{-z} = 4i$.

— **55.** — Nombre des racines réelles de l'équation $x^3 - 2x^2 + x - \lambda = 0$.

— **56.** — Limite supérieure des racines de l'équation $x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 6x - 20 = 0$.

— **57.** — Calculer $\sin 3a$ en fonction de $\sin a$; $\mathrm{tg}\, 4a$ en fonction de $\mathrm{tg}\, a$.

— **58.** — Calculer $\sin\frac{a}{3}$ en fonction de $\sin a$. Montrer que l'équation du troisième degré qui donne $\sin\frac{a}{3}$ a ses trois racines réelles.

— **59.** — Calculer $\mathrm{tg}\frac{a}{3}$ en fonction de $\mathrm{tg}\, a$.

(A suivre.)

SUJETS DE CONCOURS

ÉCOLE CENTRALE

Concours de 1918.

Géométrie analytique (1er sujet).

2383. — Soient Ox et Oy deux axes de coordonnées rectangulaires, Δ la circonférence de cercle de centre O, de rayon donné a, et deux points fixes sur Ox, B d'abscisse positive b, B' d'abscisse positive b', telles que $bb' = a^2$. On prend un point quelconque M sur Δ et, sur les segments rectilignes BM et B'M, pris respective-

ment pour diamètres, on décrit les circonférences C et C′ de cercles. Le point M décrivant Δ, on demande de trouver, reconnaître et construire :

1° le lieu du point M′, autre que M, commun à C et à C′;

2° le lieu du point N dont la puissance par rapport à C et à C′ est la même et égale au tiers de sa puissance par rapport à Δ;

3° le lieu du centre S de similitude externe et le lieu du centre S′ de similitude interne de C et de C′.

Nota. — Les considérations géométriques seront appréciées.

Mécanique (1er sujet).

2384. — Soit Ox, Oy, Oz un système de trois axes de coordonnées rectangulaires dont l'un, Oz, est vertical et dirigé positivement dans le sens contraire à celui de la pesanteur. On considère trois sphères homogènes, pesantes, non déformables, de même poids spécifique donné d, savoir : la sphère S_1 de centre $x=0$, $y=0$, $z=a$, de rayon a; la sphère S_2 de centre $x=2a$, $y=2a$, $z=2a$, de rayon $2a$, la sphère S_3 de centre $x=2a$, $y=-2a$, $z=2a$, de rayon $2a$, a étant une longueur positive donnée. Ces trois sphères sont tangentes au plan xOy sur lequel elles s'appuient et tangentes entre elles deux à deux extérieurement. On suppose ces sphères soudées entre elles invariablement en leurs points de contact. Une quatrième sphère, S_4, de rayon $\frac{3}{2}a$, homogène, pesante, non déformable, de poids spécifique D, est placée *au-dessus* des trois premières de manière à les toucher toutes les trois extérieurement et est soudée invariablement à chacune d'elles aux points de contact. On demande :

1° de calculer en fonction de a la coordonnée x du centre de S_4;

2° dans l'hypothèse où le plan d'appui xOy n'est pas déformable, où il n'y a *aucun frottement* et où $D=d$, montrer que le solide Σ formé des quatre sphères est en équilibre, et calculer en fonction des données les réactions de xOy sur S_1, S_2, S_3; puis, faisant

$$D=d=3, \qquad a=15 \qquad \text{(unités C. G. S.)},$$

calculer ces réactions à un gramme près.

3° Les données numériques étant les mêmes que précédemment, sauf pour D qui n'est plus donné, calculer, à un centigramme près, la plus grande valeur de D pour laquelle Σ reste en équilibre.

Géométrie analytique (2e sujet).

2385. — Soient $x=\frac{t^3}{t-1}$, $y=\frac{t(t-a)}{t-1}$; x, y désignent, par rapport à deux axes rectangulaires Ox Oy, les coordonnées d'un point M; t est un paramètre qui varie de $-\infty$ à $+\infty$, a une constante arbitraire. Lorsqu'on fait varier t, M décrit une courbe C qui dépend de la constante a.

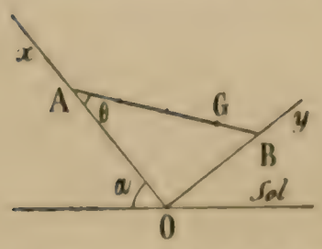
1° Cette courbe C a une asymptote à distance finie. Montrer que cette asymptote passe par un point fixe indépendant de la constante a.

2° Déterminer pour quelles valeurs de a la courbe C a des branches qui se croisent en un point.

3° Tracer la courbe C dans l'hypothèse particulière $a=\frac{3}{4}$.

Mécaniques (2e sujet).

2386. — Une barre rectiligne AB, *non homogène*, pesante, de poids p, de longueur $4a$, a son centre de gravité en un point G tel que $AG=3a$, $GB=a$.



Les extrémités A, B glissent *sans frottement*, l'une A sur un plan Ox, l'autre B sur un plan Oy. Ces deux plans sont *rectangulaires*; leur intersection O est *horizontale*; ils sont disposés tous deux au-dessus du plan horizontal passant par cette intersection O.

On propose, connaissant l'angle aigu α formé par la face Ox avec le plan horizontal, d'étudier la position d'équilibre de la barre AB.

Montrer qu'elle se place dans un plan perpendiculaire à la droite horizontale O.

Calculer : 1° les pressions supportées en A et B par les faces planes Ox, Oy; 2° l'angle $\theta=OAB$; 3° les longueurs OA, OB; on pourra donner une construction géométrique de la position d'équilibre.

Pour quelle valeur de α cette position est-elle horizontale?

Calculer, pour $p=10^{kg}$ et $\alpha=60°$, les valeurs numériques des pressions en A et B.

Géométrie analytique (3e sujet).

2387. — Soient, en coordonnées rectangulaires, une hyperbole équilatère H, d'équation $xy = k^2$, k étant une longueur donnée, et deux points C (x_0, y_0) et S (a, b). Dans la suite, l'hyperbole H reste invariable; les points C et S peuvent se déplacer dans le plan.

1° Former l'équation générale des hyperboles équilatères H′ de centre C et d'asymptotes parallèles à celle de H.

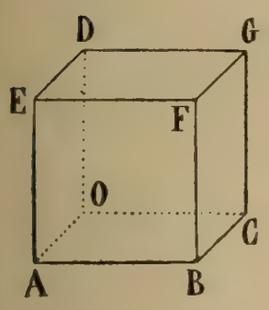
Montrer que H′ coupe en général H en deux points à distance finie, et que la droite joignant ces deux points conserve une direction invariable tant que C reste fixe.

2° Chercher, parmi les hyperboles H′, combien il y en a qui touchent l'hyperbole H en un point à distance finie. Discuter d'après la position de C dans le plan; placer les points de contact par rapport à la droite OC (O est l'origine des coordonnées).

3° Trouver l'équation de la courbe que doit décrire C pour que l'hyperbole H′, tout en restant tangente à H, passe par le point donné S. Comment cette courbe rencontre-t-elle les asymptotes de H? Reconnaître sa nature d'après la position de S dans le plan; en particulier, peut-on choisir S pour que cette courbe soit une circonférence? Placer alors cette circonférence.

Mécanique (3e sujet).

2388. — 1° Énoncer, sans démonstration, les conditions que doit remplir un ensemble de forces appliquées en différents points d'un corps solide qui peut glisser sans frottement le long d'un axe fixe, pour que ce corps soit en équilibre.



2° On envisage un corps solide homogène, pesant un poids P, ayant la forme d'un cube OABCDEFG, d'arête égale à $2a$; les faces OABC, DEFG sont horizontales, la première au-dessous de la seconde.

Au sommet G est appliquée directement une force d'intensité Q, ayant pour ligne d'action la droite illimitée représentée par l'arête DG. On maintient l'équilibre en assujettissant le solide à glisser sans frottement le long d'un axe fixe, réalisé par deux coussinets réduits chacun à un point, l'un placé en O, l'autre placé en un point S de la face verticale GFBC. Déterminer d'abord la position qu'il faut donner au point S. Valeurs extrêmes que peut prendre Q, P étant donné.

Dans le cas de $Q = \frac{P}{2}$, déterminer la direction et l'intensité de la pression supportée par le coussinet placé en O.

Trigonométrie.

2389. — Dans un triangle ABC on donne l'angle A et la longueur c du côté AB; calculer les deux autres côtés a et b de façon que $2a + b$ soit égal à une longueur donnée m : $2a + b = m$.

Discuter.

Calcul (*).

1° Calculer les six premières puissances

$$x,\ x^2,\ \ldots,\ x^6,$$
$$y,\ y^2,\ \ldots,\ y^6$$

des nombres x et y définis par les formules

$$x = \sqrt[4]{\frac{942\pi}{877}}, \qquad y = \sqrt[4]{\frac{40\,200}{877\pi}}.$$

2° Calculer les nombres t et u tels que

$$(1{,}71)^t = \pi, \qquad (0{,}171)^u = \frac{1}{\pi}.$$

On prendra $\pi = 3{,}1416$.

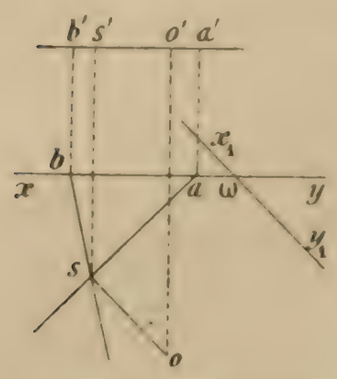
Épure.

2390. — Ni cadre, ni titres, ni flèches.

xy (en rouge) petit axe de la feuille, ω centre.

$$\omega a = 2^{cm}, \quad aa' = 7^{cm}, \quad \widehat{xas} = 45^\circ, \quad as = 8^{cm}, \quad \omega b = 9^{cm}, \quad aso = 90^\circ, \quad so = 6^{cm}.$$

(*) On peut employer, à volonté, les tables de logarithmes ou la règle à calcul.



Un cône de révolution a pour axe l'horizontale as, $a's'$ et pour sommet le point s, s' ; une génératrice de ce cône est l'horizontale sb, $s'b'$.

Une sphère de rayon 6^{cm} a pour centre ω, ω'. On demande l'intersection du cône et de la sphère ; on représentera le solide commun.

On fera aussi, soit avant, soit après, une autre projection verticale en prenant comme ligne de terre $x_1\omega y_1$, $\widehat{y\omega y_1} = 45°$.

Mise à l'encre. — Le résultat seul à l'encre noire : lignes vues en traits pleins, lignes cachées en points ronds. Tout le reste à l'encre rouge : traits pleins plutôt fins.

Constructions d'un point quelconque de l'intersection et de la tangente en ce point, des points et tangentes remarquables. Le trait rouge d'une tangente trouvée sera légèrement renforcé aux environs du point de contact.

Physique.

I. — Mesure de la vitesse de la lumière, dans l'air, par la méthode du miroir tournant de Foucault.

II. — **2391**. Détermination de la densité de vapeur d'un liquide par la méthode de Meyer : On laisse tomber une ampoule pleine du liquide dans un réservoir à air plongé dans une enceinte maintenue à température constante dans la vapeur de l'eau en ébullition sous la pression atmosphérique.

La méthode de pesée à charge constante appliquée à cette ampoule vide, puis pleine, a donné pour la masse liquide le nombre $0^g,080$.

Le volume d'air recueilli dans l'éprouvette graduée reposant sur la cuve à eau est de 60^{cm^3} ; la pression atmosphérique est de 77^{cm} de mercure et la température de l'eau de $20°$.

1° Calculer la valeur de la densité de vapeur fournie par ces mesures.

Masse du litre d'air à 0° et 76^{cm} : $1^g,293$.

Tension maximum F de la vapeur d'eau à 20° : $F_{20} = 1^{cm},7$.

2° Si on admet que :

a) la température de la cuve à eau est connue à $0°,5$ près ;

$$F \text{ à } 15° = 1^{cm},2. \qquad F \text{ à } 25° = 2^{cm},3 ;$$

b) la lecture du volume est faite à $0^{cm^3},2$ près ;

c) à chaque équilibre de la balance, l'erreur absolue possible est de $\frac{1}{2}$ mg.

on demande de déterminer l'ordre de grandeur de l'erreur due à chacune de ces trois causes sur le résultat final et l'approximation avec laquelle est connue la densité.

Chimie.

I. — Étude de l'acide chlorhydrique.

II. — **2392**. Une solution d'anhydride arsénieux est telle qu'on l'utilise dans les laboratoires pour certains titrages.

On expliquera et on formulera les réactions produites quand on la traite par chacun des cinq corps suivants :

1er cas : du chlore ;
2e cas : de l'oxygène ozonisé ;
3e cas : de l'hydrogène naissant ;
4e cas : de l'acide sulfhydrique ;
5e cas : du permanganate de potassium.

Ceci fait, on calculera les volumes de chlore, ozone, hydrogène, acide sulfhydrique, et le poids de permanganate de potassium, qui devront être employés dans ces réactions, si l'on admet que la solution donnée contenait, dans chacun des cas, un gramme d'anhydride arsénieux.

Chaque candidat reçoit un tableau des poids atomiques.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

Coulommiers. — Imp. Paul BRODARD.

30e Année. Mai 1920. N° 8.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

NOTE SUR LES DÉTERMINANTS

par M. **Edouard Pouget**, professeur du cours de Centrale au lycée Louis-le-Grand.

1. Le programme de la classe de Centrale spécifie que l'on se bornera à l'étude des déterminants à 4, 9 et 16 éléments. Dans ces conditions, j'estime rester dans l'esprit du programme, en m'abstenant de faire à mes élèves la théorie générale classique basée sur l'étude préalable des inversions d'une suite de nombres. Je fais une théorie élémentaire dont le point de départ est la définition de la valeur d'un déterminant par son développement par rapport aux éléments de la première ligne. Je ne fais, d'ailleurs, en cela, qu'imiter plusieurs de mes collègues.

Cette théorie élémentaire peut, naturellement, s'étendre par induction, à un déterminant d'ordre quelconque : c'est un exercice à la portée d'un élève à condition de le guider un peu. J'ai cru intéresser les élèves, lecteurs de cette revue, en rédigeant cette note où j'indique une façon de traiter l'exercice en question.

On peut imaginer des méthodes beaucoup plus rapides et plus élégantes que celle que j'ai suivie (*). Mon choix s'est fixé sur celle-ci parce qu'elle me paraît facile à suivre par un débutant. J'ai volontairement réduit au minimum l'emploi des expressions symboliques qui permettent d'écourter bien des calculs.

2. Étant donné un déterminant D, d'ordre n, représenté par le symbole classique

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

J'appellerai *mineur* relatif à un élément a_p^q et je représenterai par D_p^q le déterminant obtenu en supprimant dans D la ligne de rang p et la colonne de rang q, qui se croisent sur l'élément considéré. Il est clair qu'un tel déterminant est d'ordre $n-1$, si D est d'ordre n.

Définitions. — On appelle *valeur* du déterminant D l'expression

$$(1) \qquad D = a_1^1 D_1^1 - a_1^2 D_1^2 + a_1^3 D_1^3 - \dots + (-1)^{p+1} a_1^p D_1^p + \dots + (-1)^{n+1} a_1^n D_1^n.$$

Le calcul d'un déterminant d'ordre n se trouve donc ramené au calcul de n déterminants d'ordre $n-1$; le calcul de chacun de ces déterminants se ramène au calcul de $n-1$ déterminants d'ordre $n-2$ et ainsi de suite.

(*) On peut par exemple donner tout de suite comme définition de la valeur d'un déterminant l'une des deux expressions :

$$D = \sum_{q=1}^{q=n} (-1)^{p+q} a_p^q D_p^q \qquad D = \sum_{p=1}^{p=n} (-1)^{p+q} a_p^q D_p^q.$$

On montre très facilement l'égalité de ces deux expressions. Les théorèmes sur l'échange des lignes et des colonnes et sur l'échange de deux rangées entre elles, s'établissent alors, par induction, d'une façon simple et rapide.

Par définition, la valeur d'un déterminant du premier ordre, c'est-à-dire réduit à un seul élément, est la valeur de cet élément.

Il résulte immédiatement de ces définitions que l'on aura pour $n = 2, 3, 4$ les expressions suivantes :

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} = a_1^1 \mid a_2^2 \mid - a_1^2 \mid a_2^1 \mid = a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1.$$

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_1^1 \begin{vmatrix} a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} - a^2 \begin{vmatrix} a_2^1 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^3 \end{vmatrix} + a_1^3 \begin{vmatrix} a_2^1 & a_2^2 \\ a_3^1 & a_3^2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix} = a_1^1 \begin{vmatrix} a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix} - a_1^2 \begin{vmatrix} a_2^1 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix} + a_1^3 \begin{vmatrix} a_2^1 & a_2^2 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^4 \end{vmatrix} - a_1^4 \begin{vmatrix} a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix}.$$

De ces définitions résultent les propriétés suivantes :

1° Un déterminant d'ordre n est un polynome homogène de degré n par rapport à l'ensemble de ces éléments.

En effet, les trois expressions précédentes le montrent pour $n = 2, 3, 4$.

Si c'est vrai pour $n - 1$, l'expression (1) montre que c'est vrai pour n.

2° Un déterminant est un polynome homogène du premier degré par rapport aux éléments de chacune de ses lignes. C'est évident pour les premiers ordres d'après les expressions ci-dessus, et si c'est vrai pour l'ordre $n - 1$, la relation (1) montre que c'est vrai pour n.

Théorème I. — *L'expression* (1) *est égale à l'expression*

$$a_1^1 D_1^1 - a_2^1 D_2^1 + \ldots + (-1)^{q+1} a_q^1 D_q^1 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n^1 D_n^1; \tag{2}$$

autrement dit, l'expression (1) *ne change pas de valeur quand on échange entre eux les indices inférieurs et supérieurs des lettres qui y figurent.*

La proposition est évidente pour $n = 2$. Montrons qu'elle est vraie pour n quand elle a été établie pour $n - 1$. Les coefficients de a_1^1 sont égaux dans (1) et (2); montrons qu'il en est de même des coefficients de a_q^p. Cherchons le coefficient de cet élément dans (2). Considérons pour cela un terme quelconque de (2) :

$$(-1)^{q+1} a_q^1 D_q^1.$$

On a

$$D_q^1 = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1^3 & \ldots & a_1^p & \ldots & a_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{q-1}^2 & a_{q-1}^3 & \ldots & a_{q-1}^p & \ldots & a_{q-1}^n \\ a_{q+1} & a_{q+1}^3 & \ldots & a_{q+1}^p & \ldots & a_{q+1}^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^2 & a_n^3 & \ldots & a_n^p & \ldots & a_n^n \end{vmatrix};$$

le coefficient de a_q^p est

$$(-1)^p D_{q1}^{1p},$$

en représentant par la notation D_{q1}^{1p} le déterminant obtenu en supprimant dans D_q^1 la ligne de rang 1 et la colonne de rang p; il est clair que c'est aussi le déterminant obtenu en supprimant dans D les lignes de rang q et 1 et les colonnes de rang 1 et p. Enfin $D_{q1}^{1p} = D_{1q}^{p1}$. Dans le terme considéré de (2) le coefficient de a_q^p est donc

$$(-1)^p (-1)^{q+1} a^1 D_{q1}^{1p} = (-1)^p (-1)^{q+1} a_q^1 D_{1q}^{p1};$$

en faisant successivement $q = 2, 3, \ldots n$ dans cette expression et en faisant la somme des résultats obtenus on aura le coefficient de a_1^p dans (2), qui est, par suite,

$$(-1)^p\left[-a_2^1 D_{12}^{p1} + a^1 D_{13}^{p1} + \ldots + (-1)^{q+1} a_q^1 D_{1q}^{p1} + \ldots + (-1)^{n+1} a_n^1 D_{1n}^{p1}\right] =$$
$$(-1)^{p+1}\left[a_2^1 D_{12}^{p1} - a_3^1 D_{13}^{p1} + \ldots + (-1)^q a_q^1 D_{1q}^{p1} + \ldots + (-1)^n a_n^1 D_{1n}^{p1}\right].$$

Or, la quantité entre crochets est D_1^p dont on a pris la valeur par rapport à la première colonne, ce qui est permis, puisque c'est un déterminant d'ordre $n-1$, pour lequel le théorème est vrai par hypothèse.

Théorème II. — *Si dans un déterminant* D *on échange les lignes avec les colonnes de même rang on obtient un déterminant* Δ *qui est égal à* D.

La proposition se vérifie immédiatement pour le second ordre. Pour montrer qu'elle est vraie pour n quand elle a été établie pour $n-1$ il suffit de prendre la valeur de D par rapport aux éléments de sa première ligne et celle de Δ par rapport aux éléments de sa première colonne. Ces deux expressions sont deux polynomes du premier degré par rapport aux éléments considérés et les coefficients sont les déterminants d'ordre $n-1$ qui se déduisent deux à deux l'un de l'autre comme Δ a été déduit de D; ils sont donc égaux.

Corollaire. — Toute propriété démontrée pour les lignes est vraie pour les colonnes et réciproquement.

En particulier, un déterminant est un polynome homogène du premier degré par rapport aux éléments de l'une quelconque de ses colonnes.

Théorème III. — *Si dans un déterminant* D *on échange deux colonnes entre elles, on obtient un déterminant* Δ *qui est égal à* $a - D$.

La proposition est intuitive pour $n = 2$. Supposons-la vraie pour $n-1$ et établissons-la pour la valeur n. Supposons d'abord que les deux colonnes échangées soient adjacentes et soient a_1^p et a_1^{p+1} les éléments de tête de ces deux colonnes. Si l'on calcule les valeurs de D et de Δ par rapport aux éléments de leurs *premières lignes*, on constate que les coefficients de a_1^p et a_1^{p+1} sont égaux et de signes contraires. Les coefficients de tous les autres éléments sont égaux deux à deux, car ce sont des déterminants d'ordre $n-1$ déduits l'un de l'autre par l'échange des deux colonnes considérées, et ils sont précédés du même signe $-$.

Supposons maintenant qu'on échange la colonne de rang p avec la colonne de rang q. Soit k le nombre de colonnes situées entre les deux colonnes considérées.

Soit

$$a_1^1 a_1^2 \ldots a_1^p a_1^{p+1} \ldots a^{q-1} a_1^q a_1^{q+1} \ldots a_1^n$$

la première ligne de D. En échangeant la colonne de rang q successivement avec la colonne qui la précède on obtiendra un déterminant Δ' dont la première ligne est

$$a_1^1 a_1^2 \ldots a_1^q a_1^p a_1^{p+1} \ldots a_1^{q-1} a_1^{q+1} \ldots a_1^n;$$

en échangeant successivement la colonne dont a_1^p est l'élément de tête avec celles qui la suivent on obtiendra le déterminant Δ dont la première ligne est

$$a_1^1 a_1^2 \ldots a_1^q a_1^{p+1} \ldots a_1^{q-1} a_1^p a_1^{q+1} \ldots a_1^n.$$

On est passé de D à Δ' par $k+1$ échanges successifs de colonnes adjacentes, et de Δ' à Δ par k échanges semblables; donc, d'après la première partie de la démonstration, on a

$$\Delta' = D(-1)^{k+1},$$
$$\Delta = \Delta'(-1)^k = D(-1)^{2k+1} = -D.$$

Corollaire. — Un déterminant qui a deux lignes identiques est nul. (Démonstration classique.)

3. *Développement d'un déterminant par rapport aux éléments d'une rangée quelconque.*

Considérons les éléments d'une rangée quelconque, par exemple de la ligne de rang p. Nous avons vu que le déterminant était un polynome homogène et du premier degré par rapport aux éléments de cette rangée :

$$a_p^1 A_p^1 + a_p^2 A_p^2 + \ldots + a_p^q A_p^q + \ldots + a_p^n A_p^n,$$

en désignant par A_p^q le coefficient de a_p^q. Cette expression s'appelle le développement du déterminant par rapport aux éléments de sa p^e ligne.

Théorème. — *On a* $A_p^q = (-1)^{p+q} D_p^q$.

Pour la première ligne et la première colonne, cela résulte de la forme même des expressions (1) et (2).

Considérons un élément quelconque a_p^q. Par $p-1$ échanges successifs de lignes adjacentes, nous pouvons amener la ligne de rang p à être la première. Soit Δ le déterminant ainsi obtenu. Prenons sa valeur par rapport à la première ligne; le coefficient de a_p^q dans Δ sera donc

$$(-1)^{q+1} D_p^q.$$

Or,

$$\Delta = (-1)^{p+1} D,$$

donc le coefficient de a_p^q dans D est

$$A_p^q = (-1)^{p+q+2} D_p^q = (-1)^{p+q} D_p^q.$$

Règle pratique. — Au lieu de calculer $(-1)^{p+q}$, il est commode dans la pratique d'imaginer que l'on ait inscrit, au-dessus de chaque élément, alternativement les signes + et — comme il est indiqué dans le déterminant du 4e ordre ci-dessous :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ - & + & - & + \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ + & - & + & - \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ - & + & - & + \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix}.$$

Le signe à prendre pour un élément a_p^q est le signe inscrit au-dessus de lui.

4. J'ai jugé inutile, dans cette note, de rappeler les autres propriétés des déterminants (somme, produit, etc.) dont la démonstration est généralement basée sur le développement d'un déterminant par rapport aux éléments d'une même rangée, quelle que soit la méthode suivie pour parvenir à ce développement.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2239. — *On considère l'un des deux systèmes de sphères qui sont tangentes à deux sphères données; démontrer que le lieu des points de contact des plans tangents parallèles à un plan donné se compose de deux quadriques. Solution analytique; solution géométrique.*

Solution analytique. — Nous prendrons pour plan des xy un plan parallèle au plan donné,

pour origine le centre de l'une des sphères, et pour plan des xz un plan passant par le centre de l'autre sphère. Les équations des deux sphères seront

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$
$$(x - a)^2 + y^2 + (z - c)^2 - R'^2 = 0.$$

Appelons alors α, β, γ les coordonnées du centre de la sphère mobile, ρ, le rayon de cette sphère, et étudions le système des sphères tangentes aux deux sphères données de la même manière; nous aurons

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (R + \rho)^2,$$
$$(\alpha - a)^2 + \beta^2 + (\gamma - c)^2 = (R' + \rho)^2,$$

ρ ayant le même signe dans les deux relations, $+$ ou $-$.

D'autre part, le point de contact de la sphère mobile avec un plan parallèle au plan des xy a pour coordonnées

$$x = \alpha, \qquad y = \beta, \qquad z = \gamma + \rho,$$

ou

$$x = \alpha, \qquad y = \beta, \qquad z = \gamma - \rho.$$

Prenons le premier système, et éliminons α, β et γ; nous aurons

$$x^2 + y^2 + (z - \rho)^2 = (R + \rho)^2,$$
$$(x - a)^2 + y^2 + (z - c - \rho)^2 = (R' + \rho)^2.$$

Ces équations sont du premier degré en ρ; en égalant les valeurs de ρ, nous avons le lieu du point de contact :

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}{R + z} = \frac{(x - a)^2 + y^2 + (z - c)^2 - R'^2}{R' + z - c}.$$

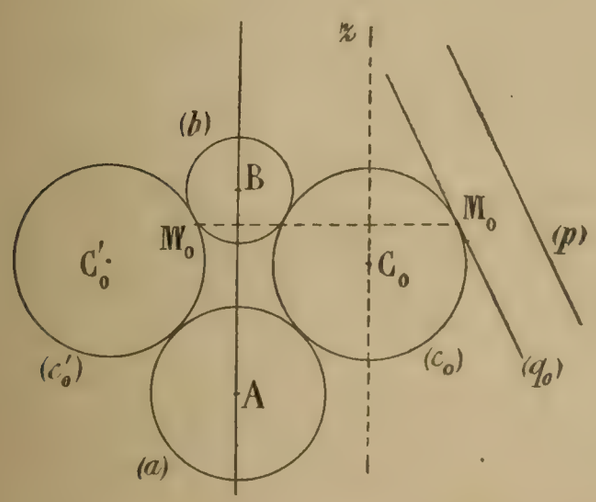
Cette équation se simplifie et s'écrit :

$$(R' - R - c)(x^2 + y^2 + z^2) + 2z(ax + cz) - R^2(z - c)$$
$$+ 2R(ax + cz) - z(a^2 + c^2 - R'^2) - R^2(R' - c) - R(a^2 + c^2 - R'^2) = 0;$$

elle représente une quadrique dont les plans cycliques sont en évidence.

En prenant le second système, on arrive de la même manière à une autre quadrique, ayant aussi pour plan cyclique le plan des xy.

Considérations géométriques. — Le plan de la figure est celui qui est mené par la ligne des centres A et B des deux sphères données (A) et (B), perpendiculairement au plan donné (P). On considère par exemple les sphères (C) qui sont tangentes aux deux sphères données de la même manière.



Supposons traitée la question de géométrie plane analogue à celle qui est posée dans l'espace : dans le plan de la figure, les tangentes aux cercles (c_0) parallèles à la droite (p) forment deux séries et, pour l'une des séries, le lieu des points de contact M_0, M'_0 est une conique (σ_0). Considérons celles des sphères (C) qui se déduisent d'une sphère (C_0) donnée par rotation autour de AB, et cherchons la ligne qui contient les points du lieu relatifs à ces sphères. Si on fait tourner la sphère (C_0) et le plan tangent (Q_0) autour de C_0z, parallèle à AB, d'un angle ω, si l'on fait tourner ensuite la figure obtenue autour de AB de l'angle $-\omega$, on obtient une sphère (C) et un plan tangent (Q) parallèle au plan (P); ω variant, le lieu du point de contact M est,

dans un plan perpendiculaire à AB, le cercle décrit sur M_0M_0 comme diamètre la sphère (C_0) correspond à $\omega = \pi$. Si maintenant on fait varier la sphère (C_0), on voit que le lieu cherché comprend la quadrique (Σ) qui est engendrée par les cercles dont on vient de parler, les diamètres M_0M_0 étant des cordes parallèles de la conique (σ_0).

Les plans des sections cycliques autres que celles que l'on vient d'obtenir sont parallèles au plan donné (P). En effet, pour celles des sphères considérées qui sont tangentes à un plan fixe (Q) parallèle au plan donné, et qui sont d'un côté déterminé de ce plan, le lieu des points de contact avec ce plan est un cercle ; c'est une conséquence du théorème de Dupuis : le lieu des points de contact des sphères tangentes à trois sphères fixes avec l'une de ces sphères se compose de quatre cercles.

Remarque. — Lorsqu'une surface admet deux modes de génération distincts par des coniques dont les plans restent parallèles à deux plans donnés et qui restent semblables à elles-mêmes, cette surface est une quadrique (Painvin, *Principes de la Géométrie analytique*, t. II, 2e partie, p. 41). C'est le cas dans la question actuelle, puisque la surface admet deux modes de génération distincts par des cercles dont les plans sont parallèles à deux plans fixes.

G. F.

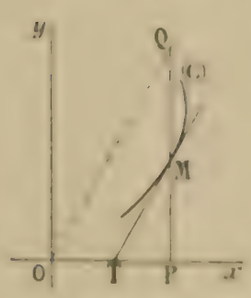
2242. — *Les axes Ox et Oy sont rectangulaires.*

Déterminer une courbe (C) par la condition suivante : Si l'on porte, à la suite de l'ordonnée PM, une longueur MQ égale à une fonction donnée $f(x)$ de x, la tangente MT est parallèle à QO.

Intégrer dans les cas où $f(x) = a$, et $f(x) = ax$. Donner la forme de la courbe (C) dans ces deux cas.

(*École nationale supérieure des mines*, 1945.)

Désignons par y la fonction de x qui correspond à la courbe (C), $y = g(x)$. L'ordonnée du point Q est $Y = y + f(x)$; le coefficient angulaire de OQ est $\frac{y + f(x)}{x}$ et celui de la tangente MT est y'; nous avons donc



$$y' = \frac{y + f(x)}{x},$$

ou

$$xy' - y = f(x), \qquad \frac{xy' - y}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}.$$

L'intégration est immédiate et donne

$$\frac{y}{x} = \int \frac{f(x)}{x^2}\,dx + C.$$

1° Cas où $f(x) = a$. Nous avons alors

$$\frac{y}{x} = -\frac{a}{x} + C, \qquad y = Cx - a.$$

Toutes les lignes (C) forment un faisceau de droites ayant pour sommet le point $(0, -a)$. Une pareille solution est évidente géométriquement.

2° Cas où $f(x) = ax$. Alors

$$\frac{y}{x} = \int \frac{a\,dx}{x} + C = a\,\mathrm{L}|x| + C.$$

Les courbes (C) ont pour équation générale

$$y = ax\,\mathrm{L}|x| + Cx.$$

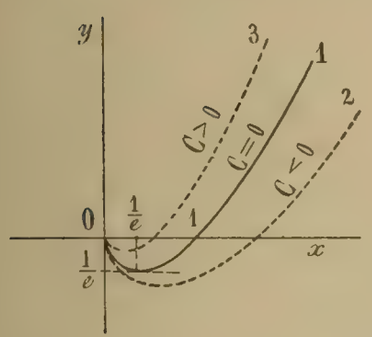
L'une de ces courbes, celle qui correspond à la valeur C, s'obtient en ajoutant à l'ordonnée de la droite $y = Cx$, l'ordonnée de la courbe fixe, $y = ax\mathrm{L}\,|x|$. Cette dernière courbe est symétrique par rapport au point O ; nous nous bornerons à construire la partie qui correspond aux x positifs. Si on change le signe de a, il suffit de changer aussi le signe de C, pour obtenir une courbe symétrique de la première par rapport à Ox. Il suffira donc de tracer les courbes qui correspondent aux valeurs positives de a.

Prenons, pour fixer les idées, $a = 1$, et construisons la courbe $y = x\mathrm{L}\,|x|$, seulement quand x varie de 0 à $+\infty$. Pour $x = 0$, y est nul; entre 0 et 1, y est négatif; pour $x = 1$, y redevient nul; enfin de 1 à $+\infty$, y croît constamment et devient infini avec x; comme $\frac{y}{x}$ est aussi infini, la branche infinie correspondante est parabolique dans la direction Oy. La dérivée de la fonction $y = x\mathrm{L}x$ est

$$y' = \mathrm{L}x + 1;$$

elle s'annule pour $\mathrm{L}x = -1$, $x = \frac{1}{e}$; elle est négative avant, positive après. La fonction décroît d'abord de 0 à $-\frac{1}{e}$; puis, croît indéfiniment.

La courbe a la forme ci-contre. Il est facile de voir en outre que la tangente au point O est Oy (forme 1).



Si C est négatif, toutes les ordonnées de cette courbe sont abaissées de celles de $y = Cx$. La courbe part toujours du point O et est tangente à Oy. Le minimum a lieu pour

$$\mathrm{L}x + 1 + C = 0, \qquad \mathrm{L}x = -C - 1,$$

$$x = e^{-C-1} = \frac{e^{-C}}{e};$$

il est rejeté plus loin du point O, vers les x positifs. Le point de rencontre avec Ox a pour abscisse la valeur de x pour laquelle

$$\mathrm{L}x + C = 0, \qquad x = e^{-C};$$

il est aussi rejeté vers la droite au delà du point $x = 1$. L'allure générale de la courbe est conservée et on obtient une courbe de la forme 2.

Lorsque C est nul, on retombe sur la courbe 1.

Supposons $C > 0$; alors le minimum et le point de rencontre avec Ox se rapprochent du point O (forme 3).

Chacune de ces courbes doit être complétée, bien entendu, en ajoutant la symétrique par rapport au point O.

Très bonnes solutions de M. L. Troin, à Tunis, qui montre que l'on peut traiter aussi aisément le cas où $f(x) = ax^n$.
Bonnes solutions de MM. E. Dumaine, lycée de Saint-Étienne; A. Malrait, lycée de Marseille; L. Simon, à Fourmies; Ch. Suchet.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE

Concours spécial pour les démobilisés de 1919.

Groupe I.

Mathématiques.

PREMIÈRE COMPOSITION

2393. — Soit, dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires Ox, Oy, les courbes (c) admettant pour équations

$$y = x\,\frac{a - \mu x^2}{x - \mu x^2},$$

a est un nombre fixe; le nombre μ pourra varier.

1° On choisit l'une des courbes (c). Se rendre compte de sa forme.

Montrer qu'elle admet un point d'inflexion I. Chercher les coordonnées du point I et l'équation de la tangente en ce point.

Montrer qu'on peut lui mener trois tangentes par un point donné du plan.

Montrer, en particulier, qu'on peut lui mener trois tangentes de pente donnée m et discuter leur réalité quand m varie.

2° Faire correspondre à chaque courbe (c) une courbe du second degré dont l'équation soit de la forme

$$\frac{1}{y} = px + q \qquad p \text{ et } q \text{ sont des nombres}$$

et qui puisse de la propriété de n'avoir aucun point commun à distance finie avec la courbe (c) considérée.

On définit ainsi une famille de courbes du second degré (S) dépendant du paramètre μ. On cherchera le lieu de leurs sommets et le lieu de leurs foyers.

3° Il passe, en général, deux courbes (c) par un point donné du plan. Dans quels cas sont-elles réelles? Peuvent-elles être confondues?

On envisage les deux courbes (c_1) et (c_2) obtenues en donnant au paramètre μ les valeurs μ_1 et μ_2. Montrer que les deux courbes (c_1) et (c_2) ont, à distance finie, trois points communs, à savoir : l'origine O des coordonnées, le point A de coordonnées (a, a) et un autre point. Vers quelle position limite tend ce dernier point en supposant que μ_1 reste constant et que μ_2 tende vers μ_1?

4° On associe les courbes (c) deux à deux de telle façon que leurs tangentes au point A (a, a) se correspondent dans deux faisceaux en involution donnés, c'est-à-dire qu'entre les pentes m et m' de ces tangentes il existe une relation de la forme

$$\alpha mm' + \beta(m + m') + \gamma = 0 \qquad (\alpha, \beta, \gamma \text{ sont des nombres donnés}).$$

On demande de trouver le lieu du point commun variable aux deux courbes (c) ainsi associées.

On étudiera jusqu'au bout les cas particuliers suivants :

a. Les tangentes en A aux deux courbes (c) associées sont symétriques en direction par rapport aux axes de coordonnées;

b. Elles sont symétriques en direction par rapport aux bissectrices des axes de coordonnées;

c. Elles sont rectangulaires.

5° On considère une transformation de la forme

$$X = \frac{ux + vy + w}{u'x + v'y + w'} \qquad Y = \frac{u''x + v''y + w''}{u'x + v'y + w'}$$

(u, v, w, u', v', w', u'', v'', w'' désignent des nombres).

Cette transformation fait correspondre au point m de coordonnées x, y le point M de coordonnées X, Y.

Si le point m décrit une droite, le point M décrit une droite et inversement.

Si le point m décrit une courbe algébrique, le point M décrit une courbe algébrique de même degré. A un point double ou à un point d'inflexion de l'une de ces courbes correspondent un point double ou un point d'inflexion sur l'autre.

Justifier ces remarques, les étendre à des points à l'infini par l'emploi des coordonnées homogènes; les utiliser pour trouver simplement les coefficients $u, \ldots, w''$ de telle façon que la transformée d'une courbe α déterminée soit la courbe C d'équation $XY = 1$.

Déduire de ce qui précède une solution précise de la question suivante : Discuter la réalité des trois tangentes menées d'un point P à l'une des courbes (c), quand le point P varie dans le plan.

Les coefficients $u, \ldots, w''$ entrant dans les transformations trouvées qui font correspondre à une courbe (c) la courbe (C) dépendent du paramètre μ et d'un autre paramètre.

Chercher parmi ces transformations celles pour lesquelles il n'existe qu'un point à distance finie confondu avec son transformé $(x = X, \quad y = Y)$ et trouver le lieu de ce point.

DEUXIÈME COMPOSITION

2394. — On considère les fonctions de x

$$y = (x + a) \mathrm{L} \frac{x+2}{x+4}$$

(a est un nombre donné et L désigne le logarithme de base e).

1° Dans quels intervalles la fonction $\frac{y}{x+a}$ est-elle développable en série entière soit par rapport à la variable x, soit par rapport à la variable $\frac{1}{x}$?

Écrire les développements correspondants de y.

2° Tracer, suivant la valeur de a, les différentes formes des courbes (C) représentant, en coordonnées rectangulaires, les variations des fonctions y.

Une courbe (C) coupe Oy en un point. Lorsque a varie, déterminer le lieu du centre du cercle osculateur à cette courbe, en ce point.

3° Calculer les primitives d'une des fonctions y.

Démontrer que pour $a = 3$, l'aire limitée par la courbe (C) correspondante, par la droite d'équation $y + 2 = 0$, par l'axe des y, et par la droite d'équation $x - x_0 = 0 (x_0 > 0)$ a une limite finie quand x_0 croît indéfiniment. Calculer cette limite.

4° On considère plus généralement une fonction de la forme

$$z = f(x) \mathrm{L} \frac{x+2}{x+4};$$

$f(x)$ est un polynome qui s'écrit, développé, $f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$.

On demande :

a. De calculer les primitives de z ;

b. En appelant $\Phi(x)$ l'une de ces primitives, de chercher s'il existe un polynome $\varphi(x)$ tel que la fonction $\Phi(x) - \varphi(x)$ tende vers zéro quand x croît indéfiniment.

Physique.

I. — Lois de Raoult. — Applications de ces lois à la détermination des masses moléculaires.

II. — **2395.** On gonfle une bulle de savon avec du gaz d'éclairage qu'on assimilera à un gaz parfait de densité constante $d = 0{,}4$. La bulle a un rayon égal à R_0^{cm}, une épaisseur $e = 0{,}002^{mm}$; la densité du liquide est égale à 1. On négligera d'abord la différence entre la pression intérieure et la pression de l'atmosphère ambiante.

1° La pression extérieure étant $H_0 = 760^{mm}$ de mercure normal (densité 13,6), la température 15° et la masse spécifique de l'air dans ces conditions étant $a = 0{,}00123$, calculer la masse de la bulle, la poussée qu'elle subit et la force ascensionnelle F. On calculera numériquement la valeur de F en milligrammes poids pour un rayon $R_0 = 2^{cm}$ et on cherchera la valeur du rayon R tel que la bulle soit en équilibre.

2° Dans les mêmes conditions atmosphériques, chercher la valeur de la vitesse limite d'ascension d'une bulle de rayon R_0 en admettant que la résistance de l'air est donnée par la formule $Q = kSv^2$, où S est la surface d'un grand cercle de la sphère, k une constante égale à 25×10^{-5} C.G.S. Calculer numériquement la valeur de la vitesse limite v pour $R_0 = 2^{cm}$.

3° On suppose maintenant que la bulle parvienne dans une région où la pression atmosphérique n'est plus que H_1^{cm} de mercure. On admet que la température est restée la même et que l'accélération de la pesanteur égale à 981 C.G.S. n'a pas changé. Le rayon de la bulle, qui était R_0, devient R_1, la force ascensionnelle a-t-elle changé ?

Admettant que le coefficient k est proportionnel à la pression, chercher comment varie la vitesse limite en fonction de la pression. La bulle s'élèvera-t-elle indéfiniment ?

4° On tiendra compte désormais de la différence entre la pression intérieure p_i et la pression extérieure p_e. On prendra pour la tension superficielle du liquide la valeur $A = 30$ mg. poids cm. On posera $p_i = p_e (1 + \varepsilon)$

et on calculera ε pour $R_0 = 2^{cm}$. La force ascensionnelle au niveau du sol a une valeur $F_1 = F(1 + \varepsilon)$ légèrement différente de F. Calculer la fraction ε pour $R_0 = 2^{cm}$.

5° De même, lorsque la pression extérieure a pris la valeur H_1 plus faible que H_0 le rayon de la bulle n'a pas rigoureusement la valeur R_1 calculée au § 3, mais une valeur très peu différente $R_1 = R_1(1 + \zeta)$. Écrire l'équation qui donne R_1 puis calculer ζ en fonction de $\frac{H_1}{H_0}$ et de ε; on pourra remplacer R_1 par R_1 dans des termes correctifs et négliger les puissances de ζ ou de ε supérieures à la première. Calculer numériquement ζ pour $\frac{H_1}{H_0} = 0.729$ et une bulle ayant sous la pression H_0 un rayon égal à 2 cm.

6° Tenant compte encore de ε, indiquer dans quel sens la force ascensionnelle varie avec H_1. Si la bulle se trouve en équilibre à une certaine hauteur dans une atmosphère dont la température est supposée constante et où la pression décroît régulièrement à mesure qu'on s'élève, cet équilibre est-il stable?

Groupe II.

Mathématiques.

Même sujet que la deuxième composition du groupe I.

Physique.

Cryoscopie. Tonométrie.

2396. — Une lunette astronomique est formée d'un objectif de 1^m de distance focale et de 10^{cm} de diamètre qu'on assimilera à une lentille simple, et d'un oculaire de 1^{cm} de distance focale et de 5^{mm} de diamètre, assimilé aussi à une lentille simple. Un observateur visant à l'infini a réglé la lunette sur un astre.

1° Chercher le diamètre de l'image réelle du soleil formée au foyer de l'objectif en admettant que le diamètre apparent du soleil est de $\frac{1}{2}$ degré.

L'observateur, en regardant dans la lunette pointée sur le centre du soleil, pourra-t-il apercevoir l'image complète de l'astre? Pourquoi est-il nécessaire, dans cette expérience, de protéger l'œil par un verre absorbant?

Ce verre absorbant étant enlevé, on coupe par un écran blanc normal à l'axe optique de l'instrument le faisceau de rayons sortant de l'oculaire. Pour quelle position de l'écran le disque éclairé formé sur l'écran a-t-il ses bords les plus nets et son diamètre le plus petit? Quelle est la valeur de ce diamètre minimum?

On veut maintenant obtenir sur cet écran une image nette, large de 1^{cm}, d'une tache du soleil dont le diamètre apparent est le dixième du diamètre apparent du soleil.

De combien et dans quel sens faut-il déplacer l'oculaire et où faut-il placer l'écran?

3° La lunette étant à nouveau réglée comme au début, on dirige l'axe optique vers le centre du soleil mais en retournant la lunette de façon que les rayons incidents rencontrent d'abord l'oculaire. Que verra dans la lunette l'observateur placé derrière l'objectif?

On reçoit à nouveau le faisceau de rayons sortant de la lunette sur un écran blanc normal à l'axe optique. Entre l'objectif et l'écran on dispose un corps opaque, éloigné de l'écran de quelques décimètres, et on observe son ombre sur l'écran. On enlève la lunette : l'ombre est-elle plus ou moins nette que précédemment?

Chimie.

Propriétés chimiques de l'eau.

Sciences naturelles.

L'azote, aliment essentiel des êtres vivants. Nutrition azotée. Cycle de l'azote dans la nature.

QUESTION PROPOSÉE

2397. — Étant donnés deux axes rectangulaires Ox, Oy et un point H (a, b), on mène par le point H une sécante de coefficient angulaire m, qui rencontre les axes aux points A et B, et on considère la parabole P tangente aux axes aux points A et B; on fait tourner autour de l'origine la droite AB de l'angle $+\frac{\pi}{2}$; soit

A'B' sa nouvelle position; soient A' et B' les points où elle rencontre les axes; on considère la parabole Q normale aux axes aux points A' et B'.

1° Trouver les équations des paraboles P et Q, puis, lorsque m varie, le lieu du point de rencontre de leurs directrices.

2° Démontrer que les points d'intersection de ces deux paraboles P et Q appartiennent à un même cercle: trouver son équation, et le lieu de son centre quand m varie.

3° Former l'équation de l'hyperbole équilatère qui passe par les points communs aux paraboles P et Q, trouver l'équation du lieu de son centre quand m varie, et, dans le cas particulier où le point H est sur l'axe des y, construire ce lieu en le rapportant à un système de coordonnées polaires.

A. Macé de Lépinay.

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE ET ANALYSE

2223. — *On considère la fonction*

$$y = x^2 \mathrm{L}\frac{1}{x} + \frac{1}{x}.$$

1° *Trouver les valeurs principales de la fonction; calculer ses diverses dérivées. Expression de la dérivée* $n^{\text{ième}}$. *Variation de cette fonction et courbe représentative.*

2° *Trouver l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des* x, *l'ordonnée d'abscisse* 1 *et celle d'abscisse* x. *Montrer que cette fonction s'annule pour une valeur de* x *plus grande que* 1.

3° *Former le polynome du* 4e *degré qui prend, ainsi que ses dérivées, les mêmes valeurs respectivement que la fonction* y *et ses quatre premières dérivées, pour* $x = 1$.

1. Cette fonction n'est définie que de 0 à $+\infty$; elle est alors parfaitement définie pour chaque valeur de x, sauf pour $x = 0$.

Je remarque encore que cette fonction peut s'écrire plus simplement

$$y = \frac{1}{x} - x^2 \mathrm{L}x.$$

Pour $x = +\varepsilon$, le premier terme est égal à $+\infty$, le second est nul; la fonction part de $+\infty$. Pour $x = 1$, elle est égale à 1; et enfin pour $x = +\infty$, elle est égale a $-\infty$, le rapport $\frac{y}{x^2}$ étant encore infini et le rapport $\frac{y}{x^{2+\varepsilon}}$ étant nul; elle a donc une branche parabolique dans la direction Oy, analogue à celle d'une parabole ordinaire.

Prenons maintenant les dérivées.

Nous aurons

$$y' = -x^{-2} - x - 2x\mathrm{L}x,$$

$$y'' = 1.2x^{-3} - 1 - 2 - 2\mathrm{L}x = 2!x^{-3} - 3 - 2\mathrm{L}x,$$

$$y''' = -3!x^{-4} - 2x^{-1},$$

$$y^{\text{iv}} = 4!x^{-5} + 2x^{-2}.$$

Il est alors facile d'avoir l'expression de la dérivée $n^{\text{ième}}$. Elle s'obtiendra en dérivant $(n-4)$ fois y^{iv}; elle aura pour expression

$$y^{n} = (-1)^n [n!x^{-n-1} + 2(n-3)!x^{-n+2}].$$

Étudions maintenant le signe de y ; nous apercevons tout de suite celui de y'''; y''' est toujours négatif, dans l'intervalle positif; par conséquent, y'' est une fonction décroissante, et, comme elle part de $+\infty$, pour descendre à $-\infty$, elle s'annule une fois et une seule fois pour une certaine valeur positive de x; cette valeur est d'ailleurs plus petite que 1, car pour $x=1$, y'' est déjà négatif. Alors y' croît d'abord, passe par un maximum pour cette valeur de x, et ensuite décroît continuellement. Or, pour $x=+\varepsilon$, y' est égale à $-\infty$; pour $x=-\infty$, y' est encore égale à $-\infty$; il importe donc de connaître le signe du maximum.

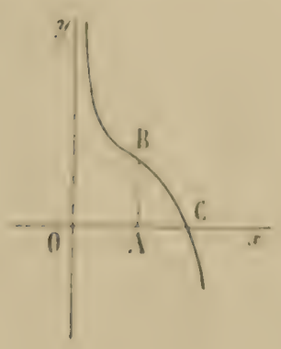
Or, en annulant y'', on a

$$2\mathrm{L}x=\frac{2}{x^3}-3,$$

et, en portant dans y',

$$y'=2x-\frac{3}{x^2};$$

il est facile de voir que cette valeur est négative, puisque x est plus petit que 1. Nous pouvons donc affirmer, que y' est toujours négative dans le champ des valeurs positives de x; par conséquent, que y est une fonction toujours décroissante ; si nous tenons compte des remarques déjà faites, de ce que y'' est d'abord positif, puis, négatif, nous pouvons tracer la courbe sans aucune espèce de difficulté.



Sur la figure, OA égale 1; AB égale 1; le point d'inflexion a lieu pour x inférieur à 1.

Quant à OC, c'est une longueur plus grande que 1, plus petite que e, et qu'il serait facile de déterminer mieux en resserrant l'intervalle.

2. Calculons l'aire comprise entre l'axe des x, l'ordonnée AB et une ordonnée variable PM. Au départ, quand x égale 1, l'aire est nulle; quand x augmente, l'aire devient positive et finit par être égale à l'aire du triangle mixtiligne ABC. Ensuite, il s'ajoute des parties négatives; l'aire diminue algébriquement; à un certain moment, elle devient nulle; puis, la portion négative l'emportant, elle devient négative et le reste indéfiniment. Elle s'annule pour une valeur plus grande que OC et, par conséquent, plus grande que 1.

Calculons cette aire

$$\mathrm{A}=\int_1^x\frac{dx}{x}-\int_1^x x^2\mathrm{L}x\,dx;$$

la première intégrale est $\mathrm{L}x$; la deuxième intégrale s'obtient en intégrant par parties. On a

$$\int x^2\mathrm{L}x\,dx=\frac{x^3}{3}\mathrm{L}x-\int\frac{x^2}{3}dx=\frac{x^3}{3}\mathrm{L}x-\frac{x^3}{9};$$

pour $x=1$, cette fonction est égale à $-\frac{1}{9}$; par conséquent,

$$\mathrm{A}=\mathrm{L}x-\frac{x^3}{3}\mathrm{L}x+\frac{x^3}{9}-\frac{1}{9}.$$

Nous voyons tout de suite que, pour $x=1$, cette aire est nulle. Si nous donnons à x une valeur un peu plus grande que 1, la partie $\mathrm{L}x-\frac{x^3}{3}\mathrm{L}x$ est positive, il en est de même de $\frac{x^3}{9}-\frac{1}{9}$, donc l'aire est positive. Quand x atteint la valeur e, nous avons $\mathrm{A}=1-\frac{1}{9}-\frac{2e^3}{9}$ et cette quantité est visiblement négative; l'aire s'est donc annulée entre 1 et e.

Il serait du reste facile de retrouver ses variations, en se servant des signes de y, c'est-à-dire des signes de sa dérivée, on retrouverait les résultats donnés par la géométrie.

3. Pour $x=1$, nous avons successivement :

$$f(1)=1;\qquad f'(1)=-2;\qquad f''(1)=-1;\qquad f'''(1)=-8;\qquad f^{\mathrm{IV}}(1)=26.$$

Par conséquent, nous connaissons tout de suite la valeur de la fonction et de ses dérivées. Nous pouvons donc lui appliquer la formule de Taylor et nous aurons ainsi immédiatement le polynome cherché :

$$P(x) \equiv 1 - 2(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{8}{6}(x-1)^3 + \frac{26}{24}(x-1)^4,$$

ou

$$P(x) \equiv \frac{26(x-1)^4 - 32(x-1)^3 - 12(x-1)^2 - 48(x-1) + 24}{24};$$

développons le numérateur, effectuons les réductions, nous aurons successivement :

$$P(x) = \frac{26(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) - 32(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - 12(x^2 - 2x + 1) - 48x + 72}{24},$$

$$P(x) = \frac{26x^4 - 136x^3 + 240x^2 - 224x + 118}{24}.$$

On eut pu d'ailleurs, et cela revient au même, partir de la valeur $x = 1$, poser $x = 1 + x'$, et développer la fonction y en série entière. En s'arrêtant au terme en x'^4, on aurait le polynome demandé, exprimé à l'aide de la variable x'; on y remplacerait ensuite x' par $x - 1$, et on retrouverait le polynome $P(x)$ sous sa première forme.

Bonnes solutions de MM. P. Bessot, à Toulouse; E. Dion; E. Krauss; G. Lach, à Douai; L. Simon, à Fourmies.
Assez bonnes solutions de MM. J. Chazelot; M. Hénon, à Lille; H. Mennessier.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

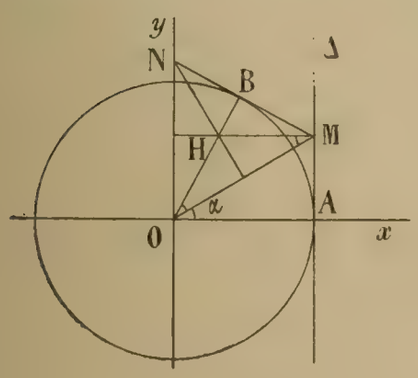
2220. — *On considère un cercle fixe de centre* O *et deux diamètres fixes et rectangulaires de ce cercle,* O*x et* O*y. Par le point* A*, où* O*x coupe le cercle, on mène une tangente fixe* Δ*, et on considère une tangente mobile qui rencontre* Δ *en* M *et* O*y en* N*. On demande :*

1° *Le lieu de l'orthocentre du triangle* OMN *et l'enveloppe de la hauteur issue du point* N*;*

2° *Le lieu du point de concours des diagonales du trapèze formé par les deux tangentes et par les axes. Construire ce lieu et trouver l'aire comprise entre cette courbe et l'asymptote.*

1. Soit B le point où la tangente mobile touche le cercle (O, R) donné. Si l'on pose $\widehat{AOB} = 2\alpha$, on a $AM = R \operatorname{tg}\alpha$, et l'orthocentre H du triangle OMN étant l'intersection des droites MH, OB d'équations

$$y = R \operatorname{tg}\alpha, \qquad y = x \operatorname{tg} 2\alpha,$$



ses coordonnées sont

$$y = R \operatorname{tg}\alpha, \qquad x = \frac{R}{2}(1 - \operatorname{tg}^2\alpha).$$

L'élimination de α entre ces deux équations donne

$$y^2 + 2R\left(x - \frac{R}{2}\right) = 0,$$

ce qui montre que le lieu de H est la parabole de foyer O et de directrice Δ.

La hauteur NH, perpendiculaire à la droite OM de pente $\operatorname{tg}\alpha$, a pour coefficient angulaire $-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ et pour équation

$$y - R \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\left[x - \frac{R}{2}(1 - \operatorname{tg}^2\alpha)\right].$$

ou
$$R \operatorname{tg}^2 \alpha - 2y \operatorname{tg} \alpha - 2x + R = 0.$$

Éliminons α entre cette équation et la suivante :
$$2R \operatorname{tg} \alpha \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 2y \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 0.$$

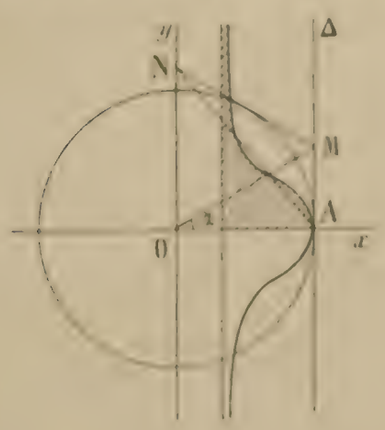
Il vient, presque immédiatement,
$$y^2 + 2R\left(x - \frac{R}{2}\right) = 0.$$

La droite NH enveloppe donc la parabole lieu de H.

Ceci s'établit d'ailleurs géométriquement d'une façon très simple.

En effet, le triangle OHM est isocèle et NH, perpendiculaire à OM, est bissectrice de $\widehat{OHM}$: H décrit donc la parabole de foyer O, de directrice Δ et NH enveloppe cette parabole qu'elle touche en H.

2. Les droites OM, AN, d'équations
$$y = x \operatorname{tg} \alpha \qquad \text{et} \qquad \frac{x}{R} + \frac{y \sin 2\alpha}{R} - 1 = 0.$$
se coupent au point P de coordonnées
$$x = \frac{R}{1 + 2\sin^2 \alpha}, \qquad y = \frac{R \operatorname{tg} \alpha}{1 + 2\sin^2 \alpha}.$$



L'élimination de α entre ces relations donne, après un calcul facile,
$$y = \pm x \sqrt{\frac{R - x}{3x - R}}.$$

On voit que la courbe lieu de P a tous ses points compris entre la droite Δ et la droite $x - \frac{R}{3} = 0$ qui est asymptote, et qu'elle est symétrique par rapport à Ox. Il suffit donc d'en construire la partie située dans la région des ordonnées positives et de la replier autour de Ox.

L'expression $y' = -\dfrac{3x^2 - 3Rx + R^2}{(3x - R)\sqrt{(R - x)(3x - R)}}$, toujours négative quand x croît de $\frac{R}{3}$ à R, montre que y décroît d'une manière continue, de ∞ à 0, et fait connaître la pente d'une tangente quelconque. En particulier, la tangente en A est la droite Δ.

La dérivée seconde $y'' = R^2 \dfrac{2R - 3x}{(3x - R)^2 (R - x)\sqrt{(R - x)(3x - R)}}$, s'annulant pour $x = \frac{2}{3}R$ en changeant de signe, la courbe présente un point d'inflexion de coordonnées $x = \frac{2}{3}R$, $y = \frac{2}{9}R\sqrt{3}$, où la tangente a pour pente $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. La courbe est alors facile à construire et s'achève par symétrie.

Aire. — L'aire comprise entre la courbe et l'asymptote a pour expression
$$2\int_{\frac{R}{3}}^{R} x \sqrt{\frac{R - x}{3x - R}}\, dx.$$

L'intégrale générale se calcule en posant $\sqrt{\frac{R - x}{3x - R}} = t$, d'où l'on tire
$$x = R\frac{1 + t^2}{1 + 3t^2}, \qquad dx = -4R\frac{t}{(1 + 3t^2)^2}\, dt$$
et
$$\int x \sqrt{\frac{R - x}{3x - R}}\, dx = -4R^2 \int \frac{t^2(1 + t^2)}{(1 + 3t^2)^3}\, dt.$$

Une identification facile donne

$$\frac{t^2(1+t^2)}{(1+3t^2)^3} = \frac{1}{9(1+3t^2)} + \frac{1}{9(1+3t^2)^2} - \frac{2}{9(1+3t^2)^3},$$

et, par suite,

$$\int x\sqrt{\frac{R-x}{3x-R}}\,dx = -\frac{4}{9}R^2\int\left(\frac{1}{1+3t^2} + \frac{1}{(1+3t^2)^2} - \frac{2}{(1+3t^2)^3}\right)dt.$$

La première intégrale du second membre se calcule à vue, les deux autres se ramènent à la première par une formule de récurrence bien connue, et l'on a

$$\int\frac{dt}{1+3t^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg} t\sqrt{3},$$

$$\int\frac{dt}{(1+3t^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{1+3t^2} + \int\frac{dt}{1+3t^2}\right) = \frac{t}{2(1+3t^2)} + \frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arc\,tg} t\sqrt{3},$$

$$\int\frac{dt}{(1+3t^2)^3} = \frac{1}{4}\left[\frac{t}{(1+3t^2)^2} + 3\int\frac{dt}{(1+3t^2)^2}\right] = \frac{t}{4(1+3t^2)^2} + \frac{3t}{8(1+3t^2)} + \frac{\sqrt{3}}{8}\operatorname{arc\,tg} t\sqrt{3},$$

d'où, toutes réductions faites,

$$\int x\sqrt{\frac{R-x}{3x-R}}\,dx = \frac{R^2}{9}\left[\frac{2t}{(1+3t^2)^2} + \frac{t}{1+3t^2} - \sqrt{3}\operatorname{arc\,tg} t\sqrt{3}\right].$$

Remplaçons t par sa valeur en x, il vient

$$\int x\sqrt{\frac{R-x}{3x-R}}\,dx = \frac{R^2}{9}\left[\frac{3x-R}{2R^2}\sqrt{(R-x)(3x-R)} + \frac{1}{2R}\sqrt{(R-x)(3x-R)} - \sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{3(R-x)}{3x-R}}\right].$$

En prenant le double de cette expression entre les limites $\frac{R}{3}$ et R on trouve, pour l'aire demandée,

$$2\int_{\frac{R}{3}}^{R} x\sqrt{\frac{R-x}{3x-R}}\,dx = \pi R^2\frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Remarque. — Les limites, pour t, qui correspondent à celles de x, sont $t=\infty$ et $t=0$. Il est donc inutile de transformer l'intégrale trouvée en fonction de t, en une nouvelle expression dépendant de x. Il est bon d'ajouter en outre que le changement de variable

$$\frac{R-x}{3x-R} = \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{3}.$$

conduit plus rapidement au résultat.

M. ROUX, Le Creusot.

Bonnes solutions de Mlle Barbillon, à Nancy; de MM. A. Berlande, à Saint-Cloud; P. Bessot, lycée de Toulouse; Jean Delage, lycée Carnot; Em. Dion, à Saint-Cloud; G. Lach, à Douai; L. Naucelle, à la Châtre; P. Robert, à Douai; Maurice Roi; Topin, à Grandvilliers; L. Troin.

Assez bonnes solutions de MM. Jolly, à Honfleur; Rachay Alexandre, à Lyon; L. Simon, à Fourmies.

2231. — *On donne une ellipse de centre* O. *On projette un point* M *quelconque de cette ellipse en* P *et* Q *sur les axes.*

1° *Enveloppe de l'hyperbole équilatère ayant pour centre* P (*ou* Q), *et* M *pour l'un des sommets réels.*

2° *Lieu du second point de rencontre* L *des deux hyperboles de cette espèce qui passent par* M.

3° *Enveloppe de l'hyperbole équilatère ayant son centre en* M *et un sommet réel en* P (*ou en* Q).

1. L'hyperbole équilatère, ayant pour centre $P(a\cos\varphi, 0)$ et pour sommet réel $M(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$, a pour équation

$$(1)\qquad (x-a\cos\varphi)^2 - y^2 + b^2\sin^2\varphi = 0,$$

ou
$$c^2\cos^2\varphi - 2ax\cos\varphi + x^2 - y^2 + b^2 = 0.$$

Nous aurons l'enveloppe de l'hyperbole en écrivant que cette équation a une racine double en $\cos\varphi$, ce qui donne
$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

L'hyperbole équilatère, ayant pour centre $Q(0, b\sin\varphi)$ et pour sommet réel $M(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$, a pour équation

$$(2) \qquad x^2 - (y - b\sin\varphi)^2 - a^2\cos^2\varphi = 0,$$

ou
$$c^2\sin^2\varphi + 2by\sin\varphi + x^2 - y^2 - a^2 = 0.$$

L'enveloppe de cette courbe est l'hyperbole
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} - 1 = 0.$$

2. Les hyperboles (1) et (2) ont mêmes directions asymptotiques et passent par le point M; elles admettent donc un deuxième point commun à distance finie L. Pour calculer les coordonnées de ce point, nous remplaçons le système (1), (2) par le système équivalent obtenu en ajoutant et en retranchant les équations (1) et (2); nous obtenons ainsi

$$(3) \qquad x(x - a\cos\varphi) - y(y - b\sin\varphi) = 0,$$

$$(4) \qquad a\cos\varphi(x - a\cos\varphi) + b\sin\varphi(y - b\sin\varphi) = 0.$$

La solution $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$ est en évidence; nous nous en débarrassons en éliminant $x - a\cos\varphi$ et $y - b\sin\varphi$, et en écrivant

$$\frac{x}{a\cos\varphi} = \frac{y}{-b\sin\varphi} = \frac{ax\cos\varphi + by\sin\varphi}{a^2\cos^2\varphi - b^2\sin^2\varphi},$$

puis, en tenant compte de l'équation (4),

$$\frac{x}{a\cos\varphi} = \frac{y}{-b\sin\varphi} = \frac{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi - b^2\sin^2\varphi}.$$

On en déduit les coordonnées du point L

$$(5) \qquad x = \frac{a\cos\varphi(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)}{a^2\cos^2\varphi - b^2\sin^2\varphi}, \qquad y = \frac{-b\sin\varphi(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)}{a^2\cos^2\varphi - b^2\sin^2\varphi}.$$

Il est alors facile d'éliminer φ entre ces deux équations; on en tire

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{ay}{bx}, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi - b^2\sin^2\varphi}\right)^2,$$

puis
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}\right)^2.$$

et enfin
$$(x^2 - y^2)^2(b^2x^2 + a^2y^2) - a^2b^2(x^2 + y^2)^2 = 0.$$

Pour construire cette courbe on peut utiliser les équations paramétriques (5).

3. L'hyperbole équilatère qui a pour centre le point M et pour sommet réel le point P a pour équation
$$(x - a\cos\varphi)^2 - (y - b\sin\varphi)^2 + b^2\sin^2\varphi = 0.$$

ou
$$(x - a\cos\varphi)^2 - y^2 + 2by\sin\varphi = 0.$$

Dérivons par rapport à φ, nous avons

$$a \sin\varphi(x - a\cos\varphi) + by\cos\varphi = 0.$$

En résolvant ces deux équations et en écartant les solutions $x = a\cos\varphi$, $y = 0$, correspondant au point P, on obtient les équations paramétriques de l'enveloppe

$$x = \frac{a\cos\varphi(b^2 - c^2\sin^2\varphi)}{b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi}, \qquad y = \frac{-2a^2b\sin^3\varphi}{b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi}.$$

et la construction de cette courbe ne présente pas de difficulté.

On trouvera de même, pour l'enveloppe de l'hyperbole ayant son centre en M et un sommet réel en Q,

$$x = \frac{2ab^2\cos^3\varphi}{b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi}, \qquad y = \frac{-b\sin\varphi(a^2 + c^2\cos^2\varphi)}{b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi}.$$

L. NAUCELLE, à la Châtre.

Bonnes solutions par MM. L. Jolly, à Honfleur; A. Roux, lycée de Lille; L. Simon, à Fourmies.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

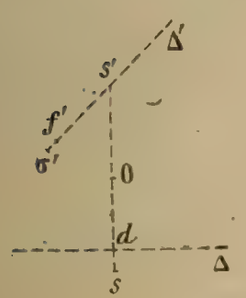
2283. — Intersection d'une sphère et d'un paraboloïde de révolution. — *Données : Centre de la feuille au point* O.

$$Os = Os' = 80^{mm}; \qquad ds = 15^{mm}.$$

La droite de front (Δ, Δ') *fait un angle de* 45° *avec le plan horizontal.*

Le centre de la sphère se trouve au point (s, s'); *son rayon est de* 70^{mm}.

Le paraboloïde est de révolution autour de (Δ, Δ'); *sa courbe méridienne est une parabole ayant pour sommet* σ' *et pour foyer* f'.



On donne $\sigma's' = 80^{mm}$; $f's' = 70^{mm}$.

1° *Construire un point quelconque, avec sa tangente :*

a) des deux contours apparents du paraboloïde;

b) de l'intersection des deux surfaces.

2° *Construire les points et droite remarquables ci-après :*

points situés sur les contours apparents des deux surfaces;

points de la projection horizontale de l'intersection, dont les tangentes sont parallèles à Δ;

droite des points doubles apparents en projection horizontale.

On représentera les constructions 1° *et* 2° *en traits noirs discontinus ou en traits rouges.*

3° *Représenter, en faisant la distinction des parties vues et cachées :*

en projection verticale le solide commun aux deux surfaces;

en projection horizontale la partie de la sphère extérieure au paraboloïde.

4° *Rédiger, sur feuille séparée, une notice explicative, exposant en détail, avec notations correspondantes sur l'épure, les constructions* 1° *et* 2°.

Titre et cadre inutiles.

(*École des Mines de St-Étienne*, 1914.)

La sphère (s, s') pouvant être considérée comme étant de révolution autour de son diamètre de bout, qui rencontre en (d, d') l'axe du paraboloïde, nous emploierons comme surfaces auxiliaires des sphères dont ce point sera le centre commun. Chacune d'elles coupe la sphère donnée suivant un petit cercle frontal projeté horizontalement suivant la corde pq commune aux deux cercles de contour apparent. On en déduit la projection verticale $p'q'$ du diamètre horizontal, et la projection verticale en vraie grandeur de ce cercle. D'autre part, nous obtenons dans le paraboloïde deux parallèles dont les plans ont pour traces verticales les deux cordes

nn', n_1n_1' communes à la parabole méridienne et au cercle de contour apparent de la sphère auxiliaire. Les points de rencontre de ces droites et du cercle pq donnent quatre points m', n', m_1, n_1 de la projection verticale de la courbe d'intersection. On les rappelle en m, n, m_1, n_1, sur pq.

Tangente en un point (m, m') *de la courbe.* — Nous emploierons la méthode du plan normal, tout indiquée pour les surfaces de révolution. La normale à la sphère est le rayon (sm, $s'm'$). Pour le paraboloïde, nous construirons, au moyen de la sous-normale de la méridienne principale, le sommet (φ, φ') du cône des normales, d'où nous déduirons la normale ($m\varphi$, $m'\varphi'$). On peut ensuite déterminer l'horizontale (sh, $s'h'$) et la frontale (sq, $s'q'$) du plan normal. Les projections mt, $m't'$ de la tangente de l'espace sont respectivement perpendiculaires à sh et $s'q'$.

Points remarquables. — I. *Points situés sur le contour apparent vertical de la sphère.* — On fait passer la sphère auxiliaire par le cercle de contour apparent vertical de la sphère donnée. On obtient ainsi les points (i, i'), (j, j'), (i_1, i_1'), (j_1, j_1').

II. *Points situés sur le contour apparent vertical du paraboloïde.* — Le plan méridien principal du paraboloïde coupe la sphère suivant un petit cercle projeté verticalement en vraie grandeur, et dont l'intersection avec la méridienne du paraboloïde fournit les points (k, k'), (l, l'), (k_1, k_1'), (l_1, l_1').

III. *Points situés sur les contours apparents horizontaux des deux surfaces.* — La recherche de pareils points constitue, dans chaque cas, un problème du quatrième degré que l'on sait résoudre, d'une manière évidente, par l'intersection d'un cercle et d'une conique. Il est plus simple, pratiquement, d'utiliser directement la projection verticale de la courbe d'intersection comme une courbe d'erreur, dès que l'on sera à même de la tracer avec une exactitude suffisante; car un léger déplacement du contact dans le plan horizontal serait sans influence sur le tracé de la projection correspondante de la courbe. Ce contact approché, qui n'est pas destiné au rappel inverse, constitue donc encore un document intéressant.

Pour ce qui concerne la sphère, on prendra les points de rencontre α' et β' de la projection verticale de la courbe avec le diamètre horizontal du cercle (s'), et l'on en déduira les projections horizontales α et β sur le cercle (s), le sens des éloignements relatifs par rapport au centre n'étant pas douteux. Quant au paraboloïde, on remarquera que le contour apparent horizontal est dans un plan de bout, dont la trace verticale est le diamètre de la parabole méridienne conjugué des cordes verticales. Son extrémité θ' appartient à la corde focale principale de la parabole, puisque l'axe est incliné à 45°, et l'on en déduit le sommet θ de la parabole de contour apparent horizontal, que l'on achève de déterminer avec un point particulier. Par exemple, on insérera dans le paraboloïde une sphère limite de centre (d, d'), et l'on prendra l'intersection (φ, φ') du parallèle de contact avec le plan du contour apparent horizontal de la même sphère. Le cône des normales donne la normale $d\varphi$, et la sous-normale, égale au paramètre, fournit les éléments focaux.

C'est sur cette parabole que l'on rappellera les points de rencontre de la projection verticale de la courbe avec le diamètre du point θ dans la parabole méridienne. Ces points sont au nombre de quatre, mais, pour éviter la confusion, nous n'avons rappelé que deux d'entre eux, γ' et δ'.

IV. *Points où la tangente est frontale.* — Si la sphère limite dont il vient d'être question avait pu servir à trouver des points de la courbe, il en serait résulté un double contact avec un cercle frontal de la sphère donnée. Mais on constate que cette sphère limite est tout entière à l'intérieur de la sphère (s, s').

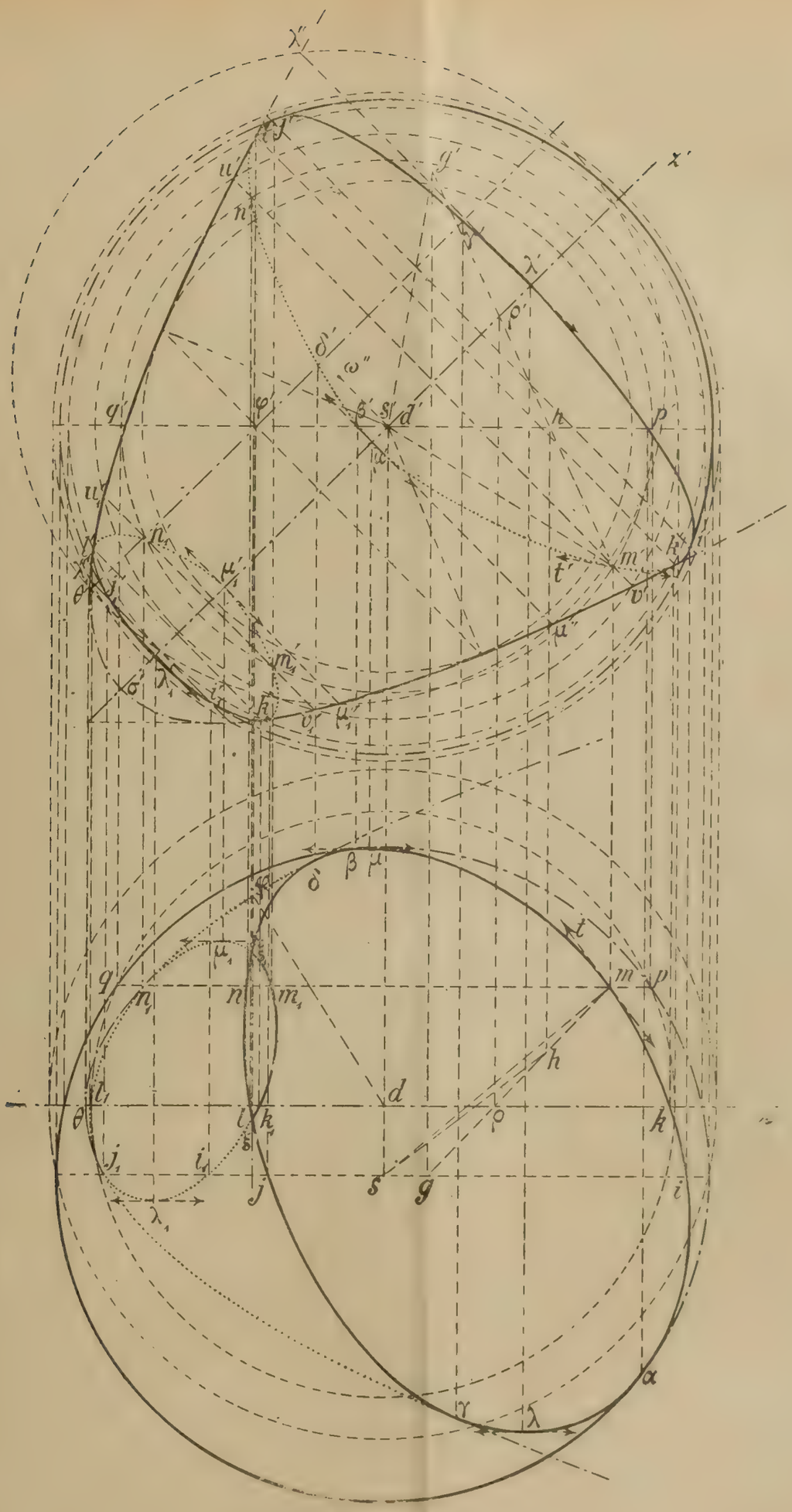
Les autres points où la tangente aura la direction demandée seront situés dans le plan de bout mené par l'axe du paraboloïde, et qui est un plan de symétrie commun aux deux surfaces. Nous avons couché ce plan sur le plan méridien principal du paraboloïde, en le faisant tourner autour de l'axe (dz, $d'z'$). Le centre du cercle qu'il détermine dans la sphère (s, s') est venu se projeter en ω'' sur la perpendiculaire à $d'z'$ au point d', et à une distance égale à ds. Les points λ'', μ'', λ_1'', μ_1'' où il coupe la parabole méridienne se ramènent en λ', μ', λ_1', μ_1' sur $d'z'$, et se rappellent enfin en λ, μ, λ_1, μ_1 au moyen des éloignements relatifs tels que $\lambda\lambda''$.

V. *Points doubles en projection.* — Pour la projection horizontale, la droite des points doubles est la projection de la droite de bout commune aux plans des contours apparents horizontaux. On remarque qu'elle est confondue avec la ligne de rappel du point (φ, φ'). En effet, ce point est commun aux contours apparents horizontaux du paraboloïde et de la sphère limite, qui a même centre que la sphère donnée, et par suite même plan diamétral horizontal. La droite obtenue coupe la projection correspondante de la courbe en deux points doubles ξ et ξ_1.

Les plans diamétraux conjugués des cordes de bout étant frontaux, la droite des points doubles sur le plan vertical est rejetée à l'infini.

Ponctuation. — D'après l'énoncé, on n'effectue pas la même représentation sur les deux projections, entre lesquelles il faudrait bien se garder de chercher une correspondance de ponctuation.

En projection horizontale, on voit nettement la grande brèche faite par le paraboloïde dans la sphère, et



Échelle : $\frac{2}{3}$.

la petite ouverture inférieure, en partie visible à la faveur de la première, puis les portions du contour apparent virtuel du paraboloïde qui relient ces deux ovales.

Sur la projection verticale, on voit le solide commun, entièrement convexe, limité par deux portions de parabole méridienne, deux portions du contour apparent de la sphère, dont l'une très peu apparente entre i_1 et j_1, et des raccordements constitués par des portions de la courbe d'intersection qui se prolongent en avant par deux arcs vus formant des arêtes saillantes. Le reste de la courbe est caché.

M. Mazet, à Alger, a envoyé une épure assez exacte, mais dont les traces exigent un espace trop grand, à cause du changement de plan. Le contour apparent de la sphère y est omis sur la projection verticale du solide.

Remarque sur l'épure du concours de l'École polytechnique en 1919. — Dans l'épure du numéro précédent, on peut signaler une propriété des points (u, u', v, v') que l'on a obtenus sur les équateurs du tore. Comme ils appartiennent au premier bissecteur, les plans tangents au tore sont parallèles au second bissecteur, et coupent ainsi le paraboloïde suivant deux génératrices du premier système tangentes au tore, et par suite à la courbe d'intersection. Comme elles rencontrent les directrices (X) et (Y), les tangentes en u et v vont passer par le rebroussement β, les tangentes en u' et v' par le rebroussement α.

J. L.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1914)

ÉCOLE CENTRALE (*suite.*)

10060. — Étudier les variations de $y = 2\sin x + 3\cos x$, sans prendre la dérivée.

— **61.** — Résoudre un triangle connaissant les angles et le périmètre. Rendre calculables par logarithmes les formules trouvées pour a, b, c.

— **62.** — Résoudre un triangle connaissant un côté, l'angle opposé et la hauteur correspondante.

— **63.** — Résoudre un triangle connaissant un angle, le côté opposé et la différence des deux autres côtés.

— **64.** — Distance de deux points inaccessibles.

— **65.** — Calculer les intégrales suivantes :

$$\int \frac{dx}{x^3+1}, \quad \int \frac{x\,dx}{x^2+x+1}, \quad \int \frac{dx}{x^2+2x+3^2}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2}}, \quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9+16x^2}}, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}, \quad \int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+x+1}},$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}, \quad \int \frac{dx}{(3+x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^{\frac{3}{2}}}, \quad \int \frac{x^2\,dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}, \quad \int \frac{dx}{3+\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \frac{\sqrt{3+4x^2}}{x}\,dx, \quad \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}\,dx, \quad \int \frac{\sqrt{3+4x^2}}{x^2}\,dx, \quad \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}\,dx,$$

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx, \quad \int \sqrt{x-x^2}\,dx, \quad \int \sqrt{x^2+1}\,dx, \quad \int (1+x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx, \quad \int x^2\sqrt{x^2+1}\,dx.$$

— **66.** — Calculer les intégrales suivantes :

$$\int \sin^2 x\,dx, \quad \int \sin^3 x\,dx, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx, \quad \int \frac{dx}{\cos x},$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad \int \frac{dx}{\cos^3 x}, \quad \int \operatorname{tg}^2 x\,dx, \quad \int \operatorname{tg}^{2n+1} x\,dx, \quad \int \operatorname{tg}^{2n} x\,dx, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^2 x}, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 x},$$

$$\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}, \quad \int \frac{dx}{(2-\cos x)^2}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-\cos\alpha\sin x}\ (0 < \alpha < \pi), \quad \int \cos x\sqrt{2+3\cos^2 x}\,dx,$$

$$\int \cos^3 x\sqrt{2-\cos^2 x}\,dx, \quad \int \frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{\cos x}\,dx, \quad \int e^{-\cos x}\,dx, \quad \int e^x \sin x\,dx, \quad \int e^{x^2}\cos x\,dx, \quad \int x^n\,dx,$$

$$\int x\sin^2 x\,dx, \quad \int x\sin^3 x\,dx, \quad \int x\sin^4 x\,dx, \quad \int x^n \operatorname{L}(x+\sqrt{1+x^2})\,dx, \quad \int \sin(x)\operatorname{L}\sin x\,dx$$

— **67.** — Intégrer les équations suivantes :

$$y' - 2y = 3, \qquad y' - 2y = x^2 + \cos x, \qquad y'(x^2 - 1) - xy = x^2, \qquad y'(x^2 + 1) - xy = 3 + 2x^2,$$

$$y(x^2 - 3) + 3xy = 1 - x, \qquad y'(x^2 + 1) + 3xy = 3x + 5, \qquad y'(1 - x^2) + xy = x^2 + 1, \qquad y'(x^2 + 1) + xy = x^2 - \frac{1}{x^2},$$

$$2y'(x^2 + x + 1) + y(2x + 1) = x^2 - 1, \qquad y'x(x^2 + 1) + y = 3x^2 + 2, \qquad y'\sqrt{1 + x^2} + y = x + \sqrt{1 + x^2}.$$

— **68.** — Trouver une courbe telle que la tangente limitée à l'axe des x ait une longueur constante donnée.

— **69.** — Intégrer les équations suivantes :

$$y'' - y = 0, \qquad y'' - 3y' + 2y = 0, \qquad y'' - 4y' + 3y = 0, \qquad y'' - 4y' + 5y = 0, \qquad y'' + y' - 2y = 0,$$

$$y'' + ay' + by = 0, \qquad y'' - 2y' = 1, \qquad y'' + 2y' - 3y = e^x, \qquad 2y'' - 3y' + y = e^x, \qquad y'' + y = \cos x,$$

$$y'' + y = \cos^2 x, \qquad y'' - y = \sin x, \qquad y'' + 4y = \cos^2 x, \qquad y'' + 4y = \cos 2x, \qquad y'' + 9y = \sin 3x,$$

$$y'' = -y'^2 - 1, \qquad y'' + a^2y'^2 + 1 = 0, \qquad y'' + a^2y'^2 - 1 = 0.$$

— **70.** — Longueur d'un arc de la parabole $y^2 - 2px = 0$.

— **71.** — Longueur d'un arc de cissoïde.

— **72.** — Trouver la longueur d'un arc de chaînette, puis son centre de gravité.

— **73.** — Longueur de l'arc de la courbe $y = \mathrm{L}\cos x$.

— **74.** — Longueur de l'arc pour les courbes

$$\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^4; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a\cos^3\varphi, \\ y = b\sin^3\varphi; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \cos^4 t, \\ y = \sin^4 t; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \mathrm{ch}^3\varphi, \\ y = \mathrm{sh}^3\varphi. \end{cases}$$

— **75.** — Aire de l'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

— **76.** — Aire limitée par la courbe $\rho^2 = \dfrac{1}{2\cos^2\omega + \sin^2\omega}$.

— **77.** — Aire comprise entre une cissoïde et son asymptote.

— **78.** — Construire rapidement la courbe $y = x\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$ et calculer l'aire comprise entre la courbe et son asymptote.

— **79.** — Aire de la boucle formée par la courbe $x^3 + y^3 = 3xy$.

— **80.** — Aire de la cycloïde.

— **81.** — Volume engendré par une parabole en tournant autour de son axe de symétrie.

— **82.** — Volume d'un segment d'hyperboloïde de révolution.

— **83.** — Volume engendré par l'aire d'une cycloïde, tournant autour de sa base.

— **84.** — Aire engendrée par un arc d'hyperbole équilatère tournant autour de l'axe transverse.

— **85.** — Aire engendrée par un arc de l'hyperbole équilatère $xy = k^2$, en tournant autour de Ox.

— **86.** — Aire engendrée par un arc de parabole en tournant autour de la tangente au sommet.

— **87.** — Aire engendrée par l'arc OA d'une parabole $y^2 = 2px$, en tournant autour de la droite $x + y = 0$.

— **88.** — Volume compris entre la surface $\dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{z^2}{a^2} = 1$ et le plan $x = a$; centre de gravité de ce volume.

— **89.** — Volume compris entre les deux surfaces $2x^2 + y^2 = z$, et $2x^2 + y^2 = 4 - z$.

— **90.** — Volume compris entre les deux surfaces $2x^2 + 3y^2 = 4 - z^2$ et $2x^2 + 3y^2 = 3z$.

— **91.** — Trouver le volume compris entre les deux surfaces $x^2 + 2y^2 = z$ et $x^2 + 2y^2 = 2 - z$; puis l'aire comprise entre les deux paraboles du plan des zx, $x^2 = z$ et $x^2 = 2 - z$.

— **92.** — Volume compris entre les deux surfaces $x^2 + y^2 = 3z$ et $x^2 + y^2 = 4 - z$. Moment d'inertie du solide commun par rapport à Oz.

— **93.** — Moment d'inertie d'un parallélépipède rectangle par rapport à un de ses axes.

— **94.** — Chercher le volume d'un cône de révolution, puis son moment d'inertie par rapport à son axe.

— **95.** — Calculer le volume d'un segment sphérique, puis son moment d'inertie par rapport à son axe.

— **96.** — Moment d'inertie d'un ellipsoïde de révolution par rapport à son axe.

— **97.** — Moment d'inertie d'un tore par rapport à son axe.

— **98.** — Moment d'inertie d'un ellipsoïde par rapport à l'un de ses axes.

— **99.** — Centre de gravité d'un arc de parabole.

— **100.** — Centre de gravité de l'arc de la courbe $x = t^2$, $y = t^3$.

— **101.** — Centre de gravité d'un arc de cycloïde.

— **102.** — Centre de gravité d'un arc de cardioïde.

— **103.** — Centre de gravité de l'arc de la courbe $\rho = e^m$.

— **104**. — Centre de gravité d'un quart d'ellipse.

— **105**. — Centre de gravité de l'aire d'une cycloïde.

— **106**. — Trouver l'aire limitée par la courbe $\rho = 2\cos\omega - 1$; puis son centre de gravité.

— **107**. — Centre de gravité de l'aire de la cardioïde.

— **108**. — Centre de gravité de l'aire de la courbe $\rho = \cos 2\omega$.

— **109**. — Centre de gravité de l'aire d'une boucle de la courbe $\rho = \sin 3\omega$.

— **110**. — Centre de gravité de l'aire d'une boucle de lemniscate.

— **111**. — Centre de gravité de la surface d'une demi-sphère; centre de gravité du volume.

Géométrie analytique et mécanique (M. Jablonski).

Géométrie analytique à deux dimensions.

— **112**. — Construire la longueur $x = \sqrt[4]{a^4b^2 + b^6 + ab^4}$.

— **113**. — Construire les racines de l'équation $ax^2 - (a^2 + b^2)x + a^3 + b^3 = 0$.

— **114**. — Construire les racines de l'équation $ax^6 - b^4x^2 + a^5 + b^5 = 0$.

— **115**. — Propriétés des droites $P + \lambda Q = 0$, P et Q étant des fonctions linéaires en x et y.

— **116**. — Condition pour que l'équation $x^2 + 2y^2 + 2\lambda xy - 2x - 4y - 1 = 0$ représente deux droites; déterminer ces deux droites.

— **117**. — Mener d'un point des tangentes à $x^2 + y^2 - R^2 = 0$.

— **118**. — Mener au cercle $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ une tangente de coefficient angulaire m.

— **119**. — Intersection de deux cercles. Propriétés de l'axe radical.

— **120**. — Asymptotes de la courbe $y = \dfrac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x}$.

— **121**. — Asymptotes de la courbe $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^3 + 1} + \sqrt[4]{x^6 - 1}}{x + 1}$.

— **122**. — Construire les courbes

$$y = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 2}, \qquad y = x + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}, \qquad y = xe^{\frac{1}{x}},$$

$$\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{t}, \\ y = t - \dfrac{1}{t}. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{t}{t^2 - 1}, \\ y = \dfrac{t^2}{t + 1}. \end{cases}$$

(*A suivre.*)

SUJETS DE CONCOURS

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

Concours ordinaire de 1919.

Mathématiques.

2398. — A) Soit l'imaginaire $y = f(x)$ définie par l'égalité

$$y = \frac{1 + ix}{1 + i\,\mathrm{tg}\,A + ix(1 + i\,\mathrm{tg}\,B)}, \qquad (i = \sqrt{-1})$$

et soient y_0 et y_1 les valeurs que prend la fonction y lorsqu'on donne à la variable x les valeurs $x_0 = 0$, $x_1 = \infty$. On demande de calculer le module r et l'argument z de l'imaginaire

$$\frac{y - y_0}{y - y_1} = r(\cos z + i\sin z).$$

Démontrer que z est indépendant de x et que r est proportionnel à x.

B) Démontrer les identités trigonométriques :

$$\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0,$$

$$\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0,$$

$$\cos x \cos y + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(y + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(y + \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\cos(x - y),$$

$$\cos x \cos y \cos z + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(y + \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(z + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(y + \frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(z + \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}\cos(x + y + z).$$

C) Étudier la courbe (C) définie par les équations

$$x = \frac{1}{2}\log \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha, \qquad y = \sin\alpha.$$

Rayon et centre de courbure en un point quelconque de (C).

Enveloppe (E) de la droite qui joint le point (x, y) de la courbe (C) au point (x_0, y_0) ayant pour coordonnées

$$x_0 = \frac{1}{2}\log \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \qquad y_0 = 0.$$

Rayon et centre de courbure en un point quelconque de (E). Étudier la courbe lieu des centres de courbure de (E).

Supposer que α varie en fonction du temps suivant la loi $\alpha = 2 \operatorname{arc\,tg} e^t$; déterminer la vitesse et l'accélération du mobile qui décrit la trajectoire (C).

Calcul trigonométrique.

On donne la fonction

$$y = e^{\operatorname{arc\,tg} x}.$$

Calculer les valeurs de y pour les valeurs suivantes de x :

$$x = 0{,}2;\ 0{,}4;\ 0{,}6;\ 0{,}8;\ 1;\ 1{,}5574;\ 2;\ 3;\ \ldots\ n;\ \ldots.$$

A quelle particularité correspond la valeur $x = 1{,}5574$?

Données :

$$\log \log e = \bar{1}{,}63778,$$

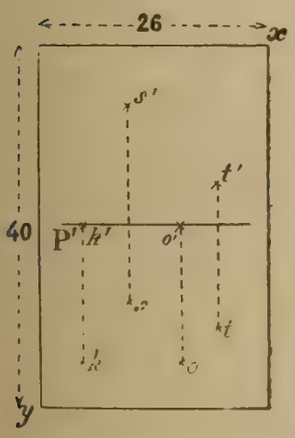
$$\log \frac{\pi}{2} = 0{,}19612,$$

log = logarithme vulgaire.

On prendra pour arc tg$x$ la détermination comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Épure.

2399. — Intersection de deux cônes ayant un plan tangent commun. — *Cadre :* $26^{cm} \times 40^{cm}$.



Coordonnées par rapport à l'angle supérieur gauche du cadre en centimètres :

Premier cône : sommet S (s, s'), $s(x = 14{,}2,\ y = 36)$, $s'(y = 4)$.

Base : cercle dans le plan horizontal P', centre (o, o'), $o(x = 15{,}5,\ y = 29{,}5)$, $o'(y = 15)$, rayon $= 7^{cm},7$.

Second cône : sommet T (t, t'), $t(x = 19{,}1,\ y = 31{,}3)$, $t'(y = 8{,}3)$.

Base : ellipse dans le plan horizontal P'; centre (k, k'), $k(x = 11{,}5,\ y = 29{,}5)$, $k'(y = 15)$; grand axe parallèle au plan vertical $= 20^{cm}$; petit axe tel que les deux cônes aient un plan tangent commun en avant des cônes (la longueur du petit axe est d'environ 14^{cm}).

Représenter le cône S entaillé par le cône T, en le limitant inférieurement au plan horizontal P'.

Épure à l'encre en noir. Constructions en rouge.

Tangentes, en un point quelconque et aux points remarquables en noir (traits interrompus) ou en bleu.

Physique.

I. — Si à une température t voisine de la température ordinaire on introduit une masse d'eau m dans un espace fermé de volume V rempli d'air sec à la pression P, quel sera l'équilibre atteint par cette masse d'eau? Déterminer les lois qui regissent les phénomènes observés, en indiquant si elles sont rigoureuses ou approchées.

II. — **2400.** Un tube cylindrique de section $s = 1^{cm^2}$, fermé à une extrémité et gradué en volumes à partir de cette extrémité, est renversé sur une cuve à mercure contenant une quantité indéfinie de liquide.

On y introduit de l'azote sec. La température étant $t = 28^\circ,4$ et la pression atmosphérique $H_0 = 760^{mm}$, le niveau du mercure se tient à une hauteur $h = 11^{cm}$ au-dessus du niveau extérieur, et le volume d'azote mesuré est $V_0 = 144^{cm^3}$.

On introduit dans le tube un volume $h = 68^{cm^3}$ d'eau pure à même température débarrassée de gaz par ébullition. La pression atmosphérique étant devenue $H_1 = 770^{mm}$, on déplace le tube de telle façon que le volume occupé par la masse gazeuse soit $V_1 = 12^{cm^3}$.

On demande de déterminer dans ces dernières conditions :

1° La pression de la masse gazeuse.

2° La position de la surface de séparation de l'eau et du gaz et de celle de l'eau et du mercure par rapport à la surface libre de la cuve;

3° Sachant que les erreurs absolues maxima sur les différentes grandeurs mesurées sont :

pour les pressions H_0, H_1 et pour la hauteur h	$\pm 0^{mm},1$,
— les volumes V_0, V_1	$\pm 100^{mm^3}$,
— le volume h	$\pm 10^{mm^3}$,
— la surface s	$\pm 1^{mm^2}$,

calculer quelle est de ce fait l'erreur absolue maximum sur la distance verticale calculée entre la surface libre dans la cuve et la surface de séparation de l'eau et du mercure.

On négligera l'absorption de l'azote par l'eau et la variation du volume liquide de l'eau résultant de la vaporisation partielle.

Tension maximum de la vapeur d'eau à 28°,4 : 30^{mm} de mercure.

Densité du mercure : 13,6.

Dans le calcul de l'erreur on négligera l'erreur sur la tension maximum, et on prendra, comme erreur sur la densité du mercure, $\pm 0,05$.

Chimie.

I. — Indiquer sommairement comment s'opère, dans l'industrie, la concentration de l'acide sulfurique des chambres de plomb. Quels sont les principaux usages de cet acide? En faire ressortir l'importance.

II. — **2401.** A) On fait agir sur l'ammoniac (AzH^3) un excès de gaz produit par l'action de l'acide chlorhydrique sur le chlorure de chaux. Le mélange gazeux résultant est mis en contact avec une dissolution renfermant 2g d'anhydride arsénieux. Après réaction, il reste 0g,02 d'anhydride arsénieux.

B) D'autre part, on traite du chlorure de chaux, délayé dans l'eau, par un peu de chlorure de cobalt. On chauffe. L'oxygène qui se dégage est mélangé avec le gaz qui provient de la série des opérations A. On ajoute à ce mélange, dépouillé de toute impureté, la moitié de son volume d'air sec et privé de CO^2. Le tout est soumis à l'action prolongée de l'étincelle électrique en présence de l'eau. On rappelle que dans ces conditions **il ne se produit qu'un seul acide.**

Au bout d'un certain temps, le volume de gaz ne varie plus. On trouve qu'il est égal à 80$^{cm^3}$. On fait alors agir l'acide pyrogallique et la potasse et l'on arrive ainsi à un résidu gazeux de 10$^{cm^3}$.

Indiquer : 1° La série des réactions;

2° Les quantités de chlorure de chaux (évaluées en hypochlorites), d'ammoniac et d'air utilisées.

Tous les gaz sont supposés mesurés à 0° et 760^{mm}.

Composition de l'air en volumes : oxygène 21 %, azote 78 %, argon 1 %.

Poids atomiques : O = 16, H = 1, Cl = 35,5, Az = 14, As = 75, Ca = 40. Volume atomique 11,2.

N. B. — Il ne devra en aucun cas être fait appel à la composition de l'air en poids.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

Coulommiers. — Imprimerie PAUL BRODARD.

30e Année. Juin 1920. N° 9.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

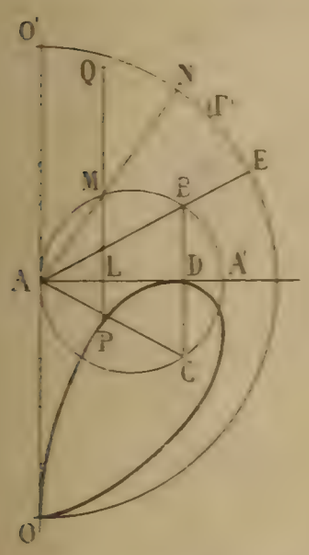
PREMIÈRE PARTIE

SUR LE FOLIUM DOUBLE

(Extrait d'une lettre de M. Gino LORIA, professeur à l'Université de Gênes, à M. H. Lemoyne.)

Gênes, 10 février 1920.

Le beau volume que vous venez de publier avec la collaboration savante de M. Lemoyne (*) a ramené ma pensée sur le sujet des courbes spéciales, dont je me suis occupé pendant longtemps et que je n'ai depuis jamais totalement abandonné. Comme votre intention est de signaler pour chaque courbe les différents points de vue sous lesquels on l'a considérée et les divers géomètres qui s'en sont occupés, je pense que la remarque suivante, mi-historique et mi-scientifique, que je viens de faire au sujet d'une ligne dont vous parlerez sans doute dans les tomes suivants de votre ouvrage, vous intéressera.



Le nom de *folium double* a été donné en 1888 par M. G. de Longchamps à la courbe dont l'équation polaire peut se réduire à la forme suivante :

$$(1) \qquad \rho = a \sin\omega \sin 2\omega.$$

Mais j'ai remarqué (**) qu'elle avait été rencontrée auparavant (1833) par I. K. Kobisch (***). Or je viens de découvrir (si ce grand mot peut être employé à l'occasion d'une petite chose) qu'elle a été étudiée, presque un siècle antérieurement, par un savant italien, connu comme inventeur d'instruments très ingénieux pour le tracé mécanique de plusieurs courbes remarquables : je veux parler de J. B. Suardi (né à Brescia en 1711, mort dans la même ville en 1767).

En effet, à la fin de son remarquable volume intitulé *Trattenimenti matematici* (Brescia, 1764), il s'est proposé la recherche des triangles isocèles inscrits dans un cercle et ayant le même périmètre. Cette considération l'a amené à étudier un lieu géométrique défini de la manière suivante :

$AA' = l$ est le diamètre d'un cercle donné et ABC un triangle isocèle inscrit ayant sa base BC perpendiculaire en D au diamètre AA' ; on prolonge le côté AB de la longueur $BE = BD$ et on décrit le cercle (Γ) dont A est le centre et AE le rayon ; si un rayon arbitraire AN de ce nouveau cercle coupe au point M le cercle donné, on mène ML perpendiculaire au diamètre AA' et on porte dans le sens ML la longueur $MP = MN$; le lieu géométrique du point P est la courbe envisagée par Suardi.

(*) *Courbes géométriques remarquables (courbes spéciales) planes et gauches*. Paris, Vuibert, 1919.

(**) *Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte*, II Auflage, t. I, p. 176, Leipzig, 1910.

(***) *Abhandlung über die Kurve deren Natur durch die Gleichung* $y^2 = (ax - 2x^2)y^2 - x^5$ *ausgedrückt wird*, Breslau, 1833.

Cette courbe passe évidemment au point D et par un autre point O, déterminé par les extrémités du diamètre du cercle (Γ) perpendiculaire au diamètre AA′ du cercle donné; c'est seulement la boucle ODO que considère le géomètre cité, qui, en conséquence, n'a pas aperçu la vraie forme de la courbe en question (quoiqu'il ait observé qu'il s'agit d'une courbe du quatrième ordre).

Or pour en reconnaître la vraie nature, nous nous servirons d'un système cartésien ayant A pour origine et AA′ pour axe des x. Si nous appelons α l'angle BAA′ et φ l'angle MAA′, on trouve facilement que les coordonnées x, y du point P sont

$$(2) \qquad x = l\cos^2\varphi, \qquad y = l\cos\varphi(1+\sin\varphi) - l\cos\alpha(1+\sin\alpha)$$

ou bien, en prenant pour origine le point O et posant $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$,

$$x = l\sin^2\psi, \qquad y = l\sin\psi(1+\cos\psi).$$

Il s'ensuit

$$x^2 + y^2 = 2l^2\sin^2\psi(1+\cos\psi) = 4l^2\sin^2\psi\cos^2\frac{\psi}{2}, \qquad \frac{y}{x} = \frac{1+\cos\psi}{\sin\psi} = \cot\frac{\psi}{2},$$

d'où

$$\rho = 2l\sin\psi.\cos\frac{\psi}{2}, \qquad \omega = \frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2}.$$

Si donc on élimine l'angle auxiliaire ψ, on arrive à l'équation polaire

$$(3) \qquad \rho = 2l\sin 2\omega.\sin\omega;$$

comme elle a la forme (1) il est prouvé que la courbe de Suardi est un folium double.

Il est à remarquer que la construction donnée par Suardi, de même que les formules (2), donnent seulement la boucle de la courbe située dans la région des x positives; l'autre est une boucle symétrique par rapport au diamètre OO′.

Ajoutons une dernière remarque. Si dans la construction exposée au début on porte encore le segment MN sur la droite ML, mais dans le sens opposé, en MQ, on trouve, comme lieu de ce dernier point, la courbe représentée par les formules suivantes :

$$(4) \qquad x = l\cos^2\varphi, \qquad y = l\cos\alpha(1+\sin\alpha) - l\cos\varphi(1-\sin\varphi),$$

ou, en changeant l'origine des coordonnées et le sens positif des y, et en introduisant encore l'angle ψ défini précédemment,

$$x = l\sin^2\psi, \qquad y = l\sin\psi(1-\cos\psi).$$

On en tire

$$x^2 + y^2 = 4l^2\sin^2\psi\sin^2\frac{\psi}{2}, \qquad \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{\psi}{2},$$

ou encore

$$\rho = 2l\sin\psi\sin\frac{\psi}{2}, \qquad \omega = \frac{\psi}{2}.$$

d'où, par élimination de l'angle auxiliaire ψ,

$$(5) \qquad \rho = 2l\sin 2\omega\sin\omega.$$

Le lieu du point O est donc un second folium double, égal à celui qu'a envisagé Suardi : c'est d'ailleurs ce qui résulte d'une simple considération géométrique, qui prouve que le nouveau folium est symétrique du premier par rapport au diamètre AA′.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2233. — *a) On considère une courbe* (C) *rapportée à deux axes rectangulaires* Ox *et* Oy, *et dans laquelle le rayon de courbure* R *en un point, la longueur* N *de la normale limitée à* Ox, *et l'angle* θ *de la tangente avec ce même axe sont liés par relation*

$$(1) \qquad N - R = 4a\cos^2\theta,$$

a étant une longueur donnée. On sait de plus que, pour $\theta = 0$, *la normale coïncide avec* Oy *et que l'on a*

$$N_0 = -2a.$$

1. *Trouver les coordonnées d'un point de* (C) *en fonction de* θ *et construire la courbe.*

2. *Quelle courbe* (Γ) *faut-il faire rouler sur* Ox *pour qu'un de ses points décrive* (C)? — *Cette courbe* (Γ) *a un axe de symétrie* Δ *et un point double* A. *Trouver, dans le mouvement de roulement, les enveloppes* (E) *et* (E') *de* Δ *et de la perpendiculaire* Δ' *élevée en* A *à* Δ.

3. *Construire graphiquement la courbe roulante dans une de ses positions successives quelconques.*

b) Montrer que, quelle que soit la relation entre R, N *et* θ, *la recherche de la courbe* (C) *peut toujours se ramener à l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre et à des quadratures.*

Étudier succinctement le cas $R = (k+1)N$.

a) **1.** Soit $x\sin\theta - y\cos\theta - p = 0$ l'équation d'une tangente à la courbe (C) dans laquelle θ désigne l'angle que fait cette tangente avec Ox et p une fonction de θ. Nous aurons l'enveloppe de cette droite en dérivant l'équation par rapport à θ et en résolvant les deux équations ainsi obtenues par rapport à x et à y :

$$x\sin\theta - y\cos\theta - p = 0,$$
$$x\cos\theta + y\sin\theta - p' = 0.$$

La première équation représente la tangente, MT, de la courbe (C) au point $M(x, y)$; la deuxième, la normale, MN. Le point de rencontre, N, de cette droite avec Ox, a pour coordonnées $x = \frac{p'}{\cos\theta}$, $y = 0$, et la normale, $MN = N$, est la distance de ce point à la première droite; c'est donc

$$N = \frac{p'\sin\theta}{\cos\theta} - p.$$

De même, le rayon de courbure est la distance du centre de courbure à la tangente, et le centre de courbure s'obtient en prenant l'enveloppe de la normale, c'est-à-dire la dérivée de la seconde équation :

$$-x\sin\theta + y\cos\theta - p'' = 0.$$

Cette nouvelle droite coupe la normale au centre de courbure; elle est parallèle à la tangente, et sa distance à cette tangente est le rayon de courbure. Nous trouvons ainsi $R = -p'' - p$, et la relation

$$N - R = 4a\cos^2\theta$$

s'écrit

$$p'' + p'\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - 4a\cos^2\theta = 0.$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre en $p' = q$.

L'équation sans second membre est

$$q' + q\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 0,$$

ou

$$\frac{dq}{q} = -\frac{\sin\theta\, d\theta}{\cos\theta};$$

elle donne $q = C\cos\theta$.

Faisons varier maintenant la quantité C; nous aurons

$$q' = C'\cos\theta - C\sin\theta,$$

et l'équation complète devient

$$C' \cos\theta = 4a \cos^2\theta,$$
$$C = 4a \cos\theta;$$

elle donne

$$C = 4a \sin\theta + \lambda,$$

λ étant une constante arbitraire.

Nous avons dès lors

$$q = p' = 4a \sin\theta \cos\theta + \lambda \cos\theta,$$

puis,

$$p = 2a \sin^2\theta + \lambda \sin\theta + \mu,$$

μ étant une nouvelle constante arbitraire.

Or, pour $\theta = 0$, $N = -p = -2a$; nous avons donc $\mu = 2a$, et la tangente a pour équation

$$x \sin\theta - y \cos\theta - 2a \sin^2\theta - \lambda \sin\theta - 2a = 0,$$

ou

$$(x - \lambda) \sin\theta - y \cos\theta - 2a(1 + \sin^2\theta) = 0.$$

La constante λ est une constante de translation qui tient à ce que l'on peut faire glisser la courbe parallèlement à Ox d'une quantité quelconque sans changer la relation imposée. En changeant $x - \lambda$ en x, cette équation devient

$$x \sin\theta - y \cos\theta - 2a(1 + \sin^2\theta) = 0.$$

L'équation dérivée est

$$x \cos\theta + y \sin\theta - 4a \sin\theta \cos\theta = 0.$$

En les résolvant toutes deux, on trouve

$$(1) \quad \begin{cases} x = 2a \sin\theta(2 + \cos^2\theta), \\ y = -2a \cos^3\theta. \end{cases}$$

Ce sont les équations de la courbe (C).

Pour construire cette courbe, il suffit de faire varier θ dans un intervalle d'étendue 2π, à cause de la périodicité des fonctions x et y. D'autre part, le changement de θ en $-\theta$ change x en $-x$ et y en y; la courbe est donc symétrique par rapport à Oy, et, en tenant compte de cette symétrie, nous pouvons supprimer la première moitié de l'intervalle $(-\pi, +\pi)$ et nous borner à faire varier θ de 0 à π. Si nous changeons maintenant θ en $\pi - \theta$, x se change en x et y en $-y$, la courbe est aussi symétrique par rapport à Ox, et cette nouvelle symétrie nous permet de réduire l'intervalle de moitié et de nous borner à faire varier θ de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

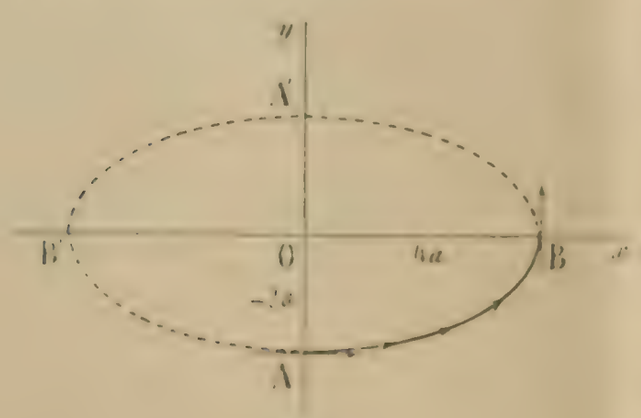


Fig. 1.

Nous avons d'ailleurs de suite

$$\frac{dx}{d\theta} = 6a \cos^2\theta, \qquad \frac{dy}{d\theta} = 6a \cos^2\theta \sin\theta,$$

et nous voyons que x croît de 0 à $4a$, et y, de $-2a$ à 0. D'autre part, le coefficient angulaire de la tangente est $\mu = \operatorname{tg}\theta$; il croît de 0 à $+\infty$. La branche obtenue est donc un quart d'ovale, orthogonal aux deux axes (fig. 1).

2. Pour trouver la courbe (Γ), nous allons attacher à cette courbe un plan mobile $O'x'y'$ qui glissera sur le plan fixe Oxy, pendant que la courbe (Γ) roulera sur Ox. Le point $O'(\alpha, \beta)$ sera le point qui décrit la courbe (C), les axes $O'x'$, $O'y'$ seront liés à cette courbe d'une manière que nous indiquerons plus tard.

Les formules générales du mouvement de glissement sont alors

$$x = \alpha + x' \cos\varphi - y' \sin\varphi,$$
$$y = \beta + x' \sin\varphi + y' \cos\varphi,$$

α et β étant deux fonctions de φ et φ une fonction du temps; x' et y' désignent deux constantes. les coordonnées d'un point du plan mobile, invariablement lié aux axes $O'x'$ et $O'y'$.

Les composantes de la vitesse sont alors

$$\frac{dx}{dt} = (\alpha' + x' \sin\varphi - y' \cos\varphi)\frac{d\varphi}{dt} = (\alpha' + \beta - y)\frac{d\varphi}{dt},$$
$$\frac{dy}{dt} = (\beta' + x' \cos\varphi - y' \sin\varphi)\frac{d\varphi}{dt} = (x + \beta' - \alpha)\frac{d\varphi}{dt},$$

α' et β' désignant, pour abréger, les deux dérivées $\frac{d\alpha}{d\varphi}$ et $\frac{d\beta}{d\varphi}$. Ces deux expressions indiquent une rotation instantanée autour du point $X = \alpha - \beta'$, $Y = \alpha' + \beta$, avec la vitesse angulaire $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$. Ce point (X, Y) est donc le centre instantané de rotation, et, comme il doit décrire l'axe des x, nous avons $Y = 0$ ou $\alpha' + \beta = 0$.

D'autre part, le point (α, β) décrit la courbe (C); nous avons donc

$$\alpha = 2a \sin\theta(2 + \cos^2\theta),$$
$$\beta = -2a \cos^3\theta;$$

puis,

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{d\alpha}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\varphi} = 6a \cos^3\theta \frac{d\theta}{d\varphi},$$
$$\alpha' + \beta = 6a \cos^3\theta \frac{d\theta}{d\varphi} - 2a \cos^3\theta = 0, \qquad d\varphi = 3d\theta.$$

Ceci nous donne $\varphi = 3\theta + C$, et, en plaçant les axes $O'x'$, $O'y'$ de façon que φ soit nul en même temps que θ, $\varphi = 3\theta$.

La roulante, c'est-à-dire la courbe (Γ), est le lieu du centre instantané dans le plan mobile. Si donc nous appelons X' et Y' les nombres qui correspondent à X et à Y, nous aurons, pour équations paramétriques de la courbe (Γ),

$$X' = -\beta' \cos\varphi + \alpha' \sin\varphi,$$
$$Y' = \beta' \sin\varphi + \alpha' \cos\varphi,$$

avec

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{d\alpha}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{1}{3}\frac{d\alpha}{d\theta}, \qquad \beta' = \frac{1}{3}\frac{d\beta}{d\theta}.$$

Le calcul est dès lors facile à achever et donne

$$(2) \qquad \begin{cases} X' = 2a \cos^2\theta \sin 2\theta, \\ Y' = 2a \cos^2\theta \cos 2\theta. \end{cases}$$

Ce sont les équations de la courbe (Γ). Cette courbe a pour équation cartésienne

$$(X'^2 + Y'^2 - aY')^2 = a^2(X'^2 + Y')^2;$$

c'est une cardioïde ayant son point de rebroussement à l'origine avec $O'y'$ pour tangente. Elle est aisée à construire et occupe à l'époque initiale $(\theta = 0)$ la position indiquée sur la figure 2.

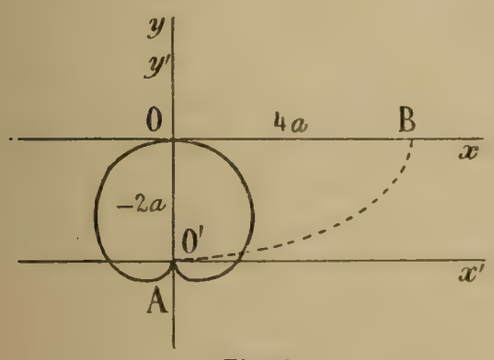


Fig. 2.

La troisième partie ayant pour but la construction de la courbe (Γ) dans une de ses positions, nous regarderons cette partie comme résolue.

La droite (Δ) a pour équation $x' = 0$, dans le système $O'x'y'$. Nous avons donc

$$x = \alpha - y' \sin\varphi,$$
$$y = \beta + y' \cos\varphi,$$

et, par suite,

$$(x - \alpha)\cos\varphi + (y - \beta)\sin\varphi = 0,$$

dans le système Oxy. Cette équation, développée, s'écrit

$$x\cos 3\theta + y\sin 3\theta - 4a\sin\theta\cos 3\theta - 2a\cos^2\theta\sin 2\theta = 0,$$

ou

$$x\cos 3\theta + y\sin 3\theta + 12a\cos\theta\sin^3\theta = 0.$$

Il est facile d'avoir l'enveloppe de cette droite : il suffit de dériver l'équation par rapport à θ et de résoudre les deux équations par rapport à x et y. Ce calcul donne

$$x\cos 3\theta + y\sin 3\theta + 12a\cos\theta\sin^3\theta = 0,$$
$$-x\sin 3\theta + y\cos 3\theta - 4a\sin^2\theta + 12a\sin^2\theta\cos^2\theta = 0,$$

$$(3)\quad \begin{cases} x = 4a\sin^2\theta\cos^2\theta(2 + 4\cos^2\theta), \\ y = -4a\sin^2\theta\cos^3\theta(4\cos^2\theta - 1). \end{cases}$$

Ces deux dernières équations représentent l'enveloppe de la droite Δ.

La droite Δ' a pour équation $y' = 0$ dans le système $O'x'y'$. Nous avons donc

$$x = \alpha + x'\cos\varphi,$$
$$y = \beta + x'\sin\varphi,$$

et l'équation de Δ' est

$$(x - \alpha)\sin\varphi - (y - \beta)\cos\varphi = 0,$$

ou

$$(x - \alpha)\sin 3\theta - (y - \beta)\cos 3\theta = 0,$$

dans le système Oxy. Cette équation s'écrit

$$x\sin 3\theta - y\cos 3\theta = 2a\sin\theta\sin 3\theta(2 + \cos^2\theta) + 2a\cos^3\theta\cos 3\theta,$$
$$x\sin 3\theta - y\cos 3\theta = 2a\cos^2\theta\cos 2\theta + 4a\sin\theta\sin 3\theta.$$

Il n'y a plus qu'à prendre la dérivée de cette équation par rapport à θ et résoudre ensuite les deux équations par rapport à x et y. Ce calcul donne

$$x\sin 3\theta - y\cos 3\theta = 2a\cos^2\theta\cos 2\theta + 4a\sin\theta\sin 3\theta,$$
$$x\cos 3\theta + y\sin 3\theta = 4a\sin\theta\cos 3\theta,$$

$$(4)\quad \begin{cases} x = 4a\sin\theta + 2a\cos^2\theta\cos 2\theta\sin 3\theta, \\ y = -2a\cos^2\theta\cos 2\theta\cos 3\theta. \end{cases}$$

Ces équations représentent l'enveloppe de la droite Δ'.

Les deux enveloppes de Δ et de Δ' sont des courbes compliquées, de degrés élevés et qui ne présentent rien d'intéressant.

b) Pour traiter la dernière partie, nous allons commencer par établir une relation entre R, N et θ. A cet effet, remarquons que

$$R = -p - p'',$$
$$N = p'\operatorname{tg}\theta - p,$$
$$\frac{dN}{d\theta} = p''\operatorname{tg}\theta + p'\operatorname{tg}^2\theta;$$

par suite,

$$\frac{dN}{d\theta} - N\operatorname{tg}\theta = (p + p'')\operatorname{tg}\theta = -R\operatorname{tg}\theta,$$

et

$$R = N - \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}\cdot\frac{dN}{d\theta}.$$

Par conséquent, toute relation entre R, N et θ s'écrit

$$f(R, N, \theta) = 0$$

et

$$f\left(N - \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}\cdot\frac{dN}{d\theta}, N, \theta\right) = 0;$$

c'est donc une équation différentielle du premier ordre. Si nous pouvons l'intégrer, elle donnera

$$N = g(\theta), \qquad \text{puis} \qquad R = g(\theta) - g'(\theta)\frac{1}{\operatorname{tg}\theta} = h(\theta).$$

Or,

$$R = \frac{ds}{d\theta}, \qquad \cos\theta = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{ds}, \qquad \sin\theta = \frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{ds};$$

nous avons donc

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta\frac{ds}{d\theta} = \cos\theta.\,h(\theta), \qquad \frac{dy}{d\theta} = \sin\theta.\,h(\theta)$$

et deux quadratures nous donneront x et y en fonction de θ.

Quand $R = (k+1)N$, l'équation différentielle devient

$$N - \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}\frac{dN}{d\theta} = (k+1)N,$$

$$\frac{dN}{N} = -k\operatorname{tg}\theta\,d\theta = k\frac{d\cos\theta}{\cos\theta},$$

$$L\frac{N}{C} = k\,L\cos\theta,$$

$$N = C\cos\theta, \qquad R = (k+1)N = C'\cos^k\theta.$$

Le calcul s'achève facilement.

Cette méthode eût pu être appliquée à la première partie et nous eût conduit à l'équation différentielle

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}\cdot\frac{dN}{d\theta} = 4a\cos^2\theta,$$

$$\frac{dN}{d\theta} = 4a\sin\theta\cos\theta,$$

$$N = 2a\sin^2\theta + C^{te}.$$

Or, pour $\theta = 0$, $N = -2a$; donc

$$N = -2a\cos^2\theta;$$

d'autre part,

$$R = N - \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}\cdot\frac{dN}{d\theta} = -2a\cos^2\theta - 4a\cos^2\theta = -6a\cos^2\theta.$$

Le calcul de x et de y s'achève alors sans difficulté.

PAUC.

Très bonne solution : M. G. Lach, à Douai.

PHYSIQUE ET CHIMIE

Concours d'admission à l'École polytechnique en 1914.

2256. — *a) Un gramme d'eau est vaporisé sous la pression d'une atmosphère. Calculer :*

1° *En centimètres cubes, l'augmentation de volume qu'il subit;*

2° *En joules, le travail qu'il fournit par cette augmentation de volume;*

3° *En calories, l'équivalent de ce travail.*

b) Un réservoir imperméable à la chaleur et de forme invariable contient 10^g *d'air à* 1 000 *degrés centigrades et à* 10 *atmosphères. Par un robinet jauge, on y introduit* 1^g *d'eau liquide à* 100°.

1° Quel est le volume du réservoir?

2° Quelles sont la température et la pression finale du système?

Densité relative à l'eau de l'air dans les conditions normales . . . . . $\delta = 0{,}00129$

— — *de la vapeur d'eau à 100°, 1 atmosphère* . . . . . $\delta' = 0{,}00060$

Chaleur spécifique à volume constant de l'air . . . . . $c = 0{,}18$

— — *de la vapeur d'eau* . . . . . $c' = 0{,}38$

Chaleur de vaporisation, en calories, de l'eau à 100°, 1 atmosphère . . . . . $L = 540$

Pression d'une atmosphère en mégabaryes . . . . . $a = 1{,}013$

Équivalent mécanique de la calorie en joules . . . . . $J = 4{,}18$

On admettra que l'air et la vapeur d'eau se comportent comme des gaz parfaits, avec le coefficient de dilatation . . . . . $\alpha = 0{,}0037$

a) 1° Le volume d'un gramme de vapeur d'eau à 100°, 1 atmosphère, est $\frac{1}{\delta'} = \frac{1}{0{,}0006} = 1\,667^{cm^3}$. Le volume d'un gramme d'eau liquide à 100° étant sensiblement 1^{cm^3}, l'augmentation de volume est

$$v = 1\,666.$$

2° Le travail fourni par l'augmentation de volume v contre une pression p d'une atmosphère est égal à pv, soit, en ergs, $1\,666 \times 1{,}013 \times 10^6$, et, en joules

$$w = 1\,666 \times 0{,}1013 = 168{,}76.$$

3° L'équivalent de ce travail en petites calories est

$$q = \frac{168{,}76}{4{,}18} = 40.$$

b) 1° Le volume V du réservoir est tel que l'on ait, entre V et les données, la relation connue

$$10 = V \times 0{,}00129 \times 10 \times \frac{1}{1 + 0{,}0037 \times 1\,000},$$

d'où l'on tire

$$V = 3\,643.$$

2° Les 10^g d'air, en se refroidissant, à volume constant, de 1 000° à la température finale θ, perdent $10 \times 0{,}18 \times (1\,000 - \theta)$ calories.

Le gramme d'eau introduit peut être considéré comme se vaporisant d'abord à 100° sans travail extérieur, ce qui absorbe $540 - 40 = 500$ calories; puis la vapeur s'échauffe à volume constant de 100° à θ°, ce qui absorbe encore $1 \times 0{,}38 \times (\theta - 100)$ calories.

Le réservoir étant imperméable à la chaleur, on doit donc avoir

$$10 \times 0{,}18(1\,000 - \theta) = 500 + 1 \times 0{,}38 \times (\theta - 100),$$

d'où

$$\theta = 614.$$

La pression finale se compose :

1° De la pression de 10^g d'air à 614° dans un réservoir où ils produisent une pression de 10 atmosphères à 1 000°, ce qui fait, en atmosphères, $10 \times \frac{1 + 614\alpha}{1 + 1\,000\alpha}$;

2° De la pression, à 614° et dans un volume 3 643, d'un gramme de vapeur qui serait à une atmosphère et à 100° dans le volume 1 667, ce qui fait $\frac{1\,667}{3\,643} \times \frac{1 + 614\alpha}{1 + 100\alpha}$.

La somme est égale à

$$P = 10 \times \frac{3{,}27}{4{,}7} + 0{,}458 \times \frac{3{,}27}{1{,}37} = 6{,}96 + 1{,}09 = 8^{atm},05.$$

2257. — 1° *Étant donné un mélange solide de sulfate, d'hyposulfite et de sulfite neutre de sodium, indiquer les réactions par lesquelles on pourrait caractériser qualitativement la présence de l'hyposulfite, du sulfate et du sulfite dans le mélange. On signalera les raisons pour lesquelles la caractérisation du sulfite présente quelques difficultés.*

2° *Indiquer les réactions qui se produiront si l'on chauffe au rouge avec du charbon le mélange des trois sels préalablement déshydratés et si l'on attaque ensuite par l'acide chlorhydrique le produit de ces réactions.*

3° *Sachant que les deux premiers sels existent originairement dans le mélange à l'état d'hydrates dont les formules sont respectivement* $SO^4Na^2,10H^2O$ *et* $S^2O^3Na^2,5H^2O$, *que le sulfite y est anhydre, on propose de déduire la composition quantitative du mélange des opérations et constatations suivantes :*

a) On prend 10^g *du mélange et on les dissout dans l'eau, de façon à faire un litre d'une solution que nous désignerons par* A.

b) Dans 100^{cm^3} *de cette solution* A, *on fait passer un courant de chlore jusqu'à ce que l'oxydation soit complète. On ajoute alors au liquide un excès d'une solution de chlorure de baryum qui détermine dans le liquide la formation d'un précipité dont le poids est* $1^g,305$.

c) D'autre part, à 100^{cm^3} *de la solution* A, *on ajoute un peu d'empois d'amidon et l'on y fait tomber goutte à goutte une solution d'iode dans l'iodure de potassium jusqu'à l'apparition d'une coloration bleue persistante. Avec une solution à* $12^g,7$ *par litre, on obtient ce résultat en employant* $43^{cm^3}.8$ *de la solution.*

Calculer les proportions centésimales des trois sels constituant le mélange.

Poids atomiques : O = 16 ; S = 32 ; I = 127 ; Na = 23 ; Ba = 137.

1° Calcinons le mélange à l'air; l'hyposulfite se dédouble d'abord suivant la formule

$$4S^2O^3Na^2 = 3SO^4Na^2 + Na^2S^5,$$

puis le persulfure de sodium brûle avec une flamme bleue en dégageant du gaz sulfureux,

$$Na^2S^5 + 6O^2 = SO^4Na^2 + 4SO^2,$$

ce qui est caractéristique de l'hyposulfite.

Dissolvons le mélange et traitons par l'acide chlorhydrique; l'hyposulfite se révèle par l'apparition d'un précipité de soufre. En même temps, l'hyposulfite, comme le sulfite, dégage, dans ces conditions, du gaz sulfureux, de sorte que l'odeur de ce gaz ne permet pas de caractériser le sulfite.

Traitons le mélange dissous à chaud par du chlorure de baryum; le sulfate et le sulfite doivent être seuls précipités, car l'hyposulfite de baryum est soluble en liqueur chaude et peu concentrée. Sur le précipité obtenu, versons de l'acide chlorhydrique : le sulfite de baryum sera dissous avec dégagement de gaz sulfureux et la présence du sulfite dans le mélange primitif sera ainsi révélée.

Le résidu de l'action de l'acide chlorhydrique sera dusulfate de baryum, caractérisé par sa résistance à tous les acides.

2° Le charbon réduira au rouge chacun des trois sels; le sulfate et le sulfite laisseront un résidu de monosulfure, l'hyposulfite également, avec dégagement de soufre ou production de polysulfure.

L'action de l'acide chlorhydrique sur le résidu donnera de l'acide sulfhydrique et peut-être un dépôt de soufre et un peu de bisulfure d'hydrogène.

3° Représentons la composition de 10^g du mélange par la formule

$$xSO^4Na^2,10H^2O + yS^2O^3Na^2,5H^2O + zSO^3Na^2.$$

En remplaçant chaque poids moléculaire, ou plutôt millimoléculaire par sa valeur, nous avons la première équation

$$322x + 248y + 126z = 10\,000. \qquad (1)$$

Le chlore transforme tout le soufre en acide sulfurique et chaque atome de soufre donne finale-

ment une molécule de sulfate de baryum dont le poids moléculaire est 233. Pour un litre de la solution A, le poids du précipité de sulfate serait $13,05$, donc $(x + 2y + z)233 = 13\,050$, ou

$$(2) \qquad x + 2y + z = 56.$$

La réaction de l'iode sur l'hyposulfite se formule

$$\frac{y}{2}(2S^2O^3Na^2 + I^2 = S^4O^6Na^2 + 2NaI),$$

et celle de l'iode sur le sulfite

$$z(SO^3Na^2 + I^2 + H^2O = SO^4Na^2 + 2HI).$$

Le poids d'iode employé est donc $(y + 2z)I$. D'autre part, pour 100^{cm3} de la solution A, on a employé $43,8 \times 12^{mg},7$; pour un litre, on en aurait employé $43,8 \times 127$. Donc

$$(3) \qquad y + 2z = 43,8.$$

L'équation (3) donne $y = 43,8 - 2z$ et l'équation (2) $x = 3z - 31,6$. Portons ces valeurs dans l'équation (1) :

$$322(3z - 31,6) + 248(43,8 - 2z) + 126z = 10\,000,$$

d'où l'on tire

$$z = 15,625 \quad \text{et} \quad 126z = 1\,969,$$

puis

$$y = 12,550 \quad \text{et} \quad 248y = 3\,112,$$
$$x = 15,275 \quad \text{et} \quad 322x = 4\,919.$$

La composition centésimale du mélange est donc

Sulfate	49,2
Hyposulfite	31,1
Sulfite.	19,7
	100,0

SUJETS DE CONCOURS

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Session spéciale d'octobre 1919.

Mathématiques élémentaires (*).

On donne, dans un même plan, deux cercles Γ, Γ' de centres C, C' et de rayons R, R' respectivement. Soit M un point du plan, soit P le point qui lui correspond dans l'inversion de pôle C et de puissance R^2, soit P' le point qui correspond à M dans une seconde inversion de pôle C' et de puissance R'^2. On suppose le point M placé de manière que la droite PP' rencontre la ligne des centres CC' en un point donné I.

1° Trouver le lieu géométrique du point M. Démontrer que si les cercles Γ, Γ' se coupent, les lieux géométriques de P et de P' se coupent sous un angle indépendant de la position fixe attribuée au point I.

2° On suppose dans tout ce qui suit le point I choisi de telle sorte que les points C, C', P, P' soient sur un même cercle. Quel est alors le lieu du point M?

3° Dans quel cas le cercle passant par C, C', P, P' est-il fixe?

4° Dans quel cas le lieu du point de rencontre des droites CP', C'P est-il une droite?

5° Quel est l'enveloppe de la perpendiculaire au milieu de PP'?

6° Quel est le lieu du conjugué harmonique du point I par rapport à P et P'?

Mathématiques spéciales.

1. — **2402.** Sur une sphère de rayon a rapportée à trois axes rectangulaires $Oxyz$ issus du centre, on considère la courbe (Γ) lieu des points dont la longitude θ est égale à la latitude

(*) Des solutions étudiées de la question seront publiées dans le *Journal de Mathématiques élémentaires*.

Exprimer en fonction de θ les coordonnées d'un point de (Γ). Quelles sont les projections de (Γ) sur les plans de coordonnées?

(Γ) admet un point double A. Quelles sont les perspectives de (Γ) sur le plan des yz lorsqu'on prend pour point de vue le point A, puis le point diamétralement opposé sur la sphère? Quelle est la perspective de (Γ) sur le plan des xy, le point de vue étant le point B de la sphère qui a pour cote a?

Il passe par (Γ) un cylindre circulaire (C); on développe celui-ci sur un plan après l'avoir ouvert suivant la génératrice menée par A; comment se développe (Γ)? Comment s'enroule (Γ) quand on enroule (C) sur un cylindre de rayon double?

II. — On peut trouver dans le plan des xz une infinité de couples de points F, F' symétriques par rapport à Ox et tels que la somme de leurs distances à tous les points de (Γ) soit constante. Construire le lieu Σ des points F, F'; en donner une définition géométrique simple; indiquer une construction simple de la tangente en un point.

F et F_1 désignant deux points quelconques de (Σ), quelle relation y a-t-il entre leurs distances au point décrivant (Γ)?

III. — On considère les plans normaux à (Γ); construire l'enveloppe de leurs traces sur un plan parallèle au plan des xy.

Combien peut-on mener de normales à (Γ) par un point arbitraire? Discuter, suivant la position de ce point dans l'espace, la réalité de ces normales.

Soit AB l'arc de (Γ) sur lequel on a $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ et $z \geqslant 0$; il existe sur cet arc deux points M, M' où le plan normal est à une même distance δ du point double A. Montrer que la différence des arcs AM et BM' est égale à $\frac{1}{2}\delta$. [On établira d'abord que les longitudes de M et M' sont liées par une relation de la forme $\operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\theta' =$ constante.]

IV. — Par (Γ) et un point de l'espace il passe une quadrique; discuter sa nature suivant la position de ce point dans l'espace.

Trouver le lieu des points de vue tels que la perspective de (Γ) sur un plan ait deux points de rebroussement; ceux-ci sont-ils toujours réels?

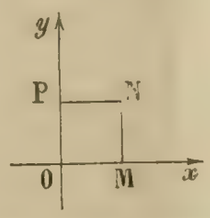
Comment faut-il choisir le point de vue et le plan de projection pour que la perspective de (Γ) soit une courbe bicirculaire?

Le point de vue M étant pris dans le plan tangent en A à la sphère, la perspective de (Γ) sur un plan possède un point de contact avec elle-même et un autre point double ω; dans quelles régions doit se trouver le point M pour que ce point double ω soit effectif ou isolé?

Calcul différentiel et intégral.

I. — 1° Soit $f(\zeta)$ une fonction de la variable complexe $\zeta = \xi + i\eta$. Soit C le contour du carré OMNP dont les sommets ont respectivement pour affixes les quatre nombres complexes

$$0,\ 1,\ 1+i,\ i.$$



Montrer que, si $f(\zeta)$ est sur C une fonction de ζ bien déterminée et bornée qui est continue sur C sauf peut-être aux sommets, l'intégrale curviligne

$$\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{z-\zeta},$$

est une fonction de la variable complexe $z = x + iy$ qui est holomorphe en tout point n'appartenant pas au contour C.

2° Calculer effectivement l'intégrale (sous forme de combinaison algébrique de fonctions élémentaires de z dans les trois cas suivants :

a) $f(\zeta) = \zeta$ sur tout le contour C,

b) $f(\zeta) = 1$ quand $\eta = 0$ ou $\eta = 1$
$= 0$ sur tout le reste du contour C,

c) $f(\zeta) = \xi$, partie réelle de ζ, sur tout le contour C.

Le sens positif de parcours sur C est celui dans lequel on rencontre successivement les points O, M, N, P.)

3° Montrer que dans ces trois cas l'intégrale est une fonction continue dans tout le plan sauf *peut être* sur la ligne polygonale ouverte OMNP d'origine O, extrémité P.

4° Désignons par $2\pi F(z)$ la valeur de l'intégrale calculée quand $f(z) = \xi$ (cas III), en un point z situé en dehors de la ligne ouverte OMNP. On demande de calculer la discontinuité éprouvée par $F(z)$ en traversant cette ligne polygonale (de l'intérieur du carré C vers l'extérieur). Le calcul sera effectué en se servant de l'expression analytique de $F(z)$ obtenue au paragraphe 2°, III.

5° Développer $F(z)$ en série suivant les puissances entières de $\frac{1}{z}$. Déterminer le domaine de convergence de la série obtenue.

6° Calculer la dérivée F'_z de $F(z)$. Séparer sa partie réelle et sa partie imaginaire.

REMARQUE. — On aura soin pour ces différentes questions de préciser, quand il y a lieu, quelles sont celles des branches des fonctions élémentaires multiformes employées pour calculer $F(z)$ et F_z qu'il faut considérer pour que les égalités formelles obtenues soient exactes.

7° On considère dans le plan xOy les courbes S telles que, si T est un point variable sur l'une de ces courbes Γ, l'on ait sur S

$$\frac{TM.TP}{TN.TQ} = \text{constante}.$$

Trouver les trajectoires orthogonales de la famille des courbes S.

II. — 1° Montrer que l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^\lambda}\,dx$, où $0 < \lambda < \frac{\pi}{2}$, croît indéfiniment lorsque λ tend vers zéro.

2° On considère l'intégrale

$$J(\varepsilon) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin^2 x + \varepsilon \cos^2 x}},$$

où ε est un nombre > 0. Montrer que si ε tend vers zéro la quantité $J(\varepsilon)$ croît indéfiniment.

3° En établir l'expression approchée

$$J(\varepsilon) = \log \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + \omega,$$

où ω est infiniment petit en même temps que ε.

Mécanique rationnelle.

I. — Deux points matériels pesants M, M', de même masse m, sont reliés par un fil flexible de masse négligeable. Ils sont placés sur un plan incliné fixe, faisant un angle α avec le plan horizontal.

Étudier le mouvement du système et spécialement le mouvement du point M par rapport à des axes de directions fixes issus du milieu G du fil :

1° En supposant le fil inextensible;

2° En supposant le fil élastique; on admettra dans ce cas que la tension du fil est $mk^2\frac{r-l}{l}$, où m désigne la masse donnée de M, k^2 un coefficient constant, $2l$ la longueur naturelle du fil, $2r$ sa longueur actuelle. Comment dans cette hypothèse doit-on choisir les conditions initiales pour que le fil reste tendu pendant toute la durée du mouvement? Peut-on choisir ces conditions initiales de manière que le fil conserve une longueur constante $2r_0 > 2l$?

II. — Un tube circulaire matériel de rayon R est fixé, à plat, sur le plan incliné. Le fil, supposé inextensible, est placé à l'intérieur de ce tube, avec les deux points pesants attachés à ses deux extrémités; il affecte donc, une fois tendu, la forme d'un arc de cercle dont on appellera $2\varphi \leqslant 2\pi$ l'angle au centre correspondant.

On imprime au plan incliné un mouvement de rotation uniforme, de vitesse angulaire donnée ω, autour d'un axe vertical fixe Δ. On suppose que le point où l'axe Δ perce le plan incliné est sur la même ligne de plus grande pente que le centre du tube circulaire, plus bas que lui, la distance qui les sépare étant $\frac{g \sin\alpha}{\omega^2 \cos^2\alpha}$.

Trouver et discuter les positions d'équilibre relatif du fil supposé tendu. La longueur $2l$ du fil étant donnée, à quelles conditions doit satisfaire R pour qu'il y ait au moins une position d'équilibre stable?

III. — On enlève le tube circulaire, les deux points pesants M et M', reliés par le fil, supposé inextensible, sont de nouveau placés sur le plan incliné auquel on continue à imprimer un mouvement de rotation uniforme autour de Δ.

1° Déterminer le mouvement du milieu G du fil par rapport au plan incliné. Existe-t-il pour ce point des

positions d'équilibre? Étudier leur stabilité. É udier les mouvements de G dans lesquels le point ne s'éloigne pas à l'infini; montrer qu'il tend alors, quand t augmente indéfiniment, vers une position limite, et reconnaître dans quels cas la trajectoire du point G admet ce point limite comme point asymptote.

Le point G étant placé initialement sur celle des lignes de plus grande pente du plan incliné qui rencontre l'axe Δ, à quelle condition doit satisfaire la direction de sa vitesse initiale pour que, dans son mouvement ultérieur, il ne s'éloigne pas à l'infini?

2° Déterminer et discuter le mouvement du point M par rapport à des axes issus de G et de directions invariablement liées au plan incliné. Le point M admet-il par rapport à ces axes des positions d'équilibre? Étudier leur stabilité. Calculer la tension du fil et chercher si, le fil étant tendu au début du mouvement, il peut cesser d'être tendu dans le cours du mouvement.

N. B. On négligera les frottements et on admettra, dans la IIIe partie, que les points M et M' ne peuvent pas se détacher du plan incliné.

QUESTION PROPOSÉE

2403. — On considère le plan (Π) représenté par l'équation

$$x\cos u + y\sin u + vz + \cos 2u + v^2 = 0$$

1° Quand u et v varient, le plan (Π) enveloppe une surface (Σ); calculer les coordonnées du point de contact, M, en fonction de u et v; montrer que cette surface (Σ) admet les trois plans de coordonnées pour plans de symétrie.

2° Lorsque v varie seul, le plan (Π) enveloppe un cylindre circonscrit à (Σ) tout le long d'une parabole, section droite du cylindre. Déterminer le plan (P), l'axe (A) et le sommet, S, de la parabole. Déterminer et construire le lieu (L) de S et l'enveloppe (E) de (A). Dire la relation qu'il y a entre ces courbes. Calculer leurs rayons de courbure.

Soient α et β les points de rencontre de (A) avec les axes, I, leur milieu, γ, la projection de O sur (A). Montrer que S est au milieu de Iγ.

3° Quel est le lieu de M, quand u varie seul? Le construire dans les deux cas où $v=0$ et $v=\sqrt{3}$. Déterminer l'arête de rebroussement de l'enveloppe de (Π) et montrer que c'est une hélice du cylindre dont (E) est une section droite.

HAAG.

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE ET ANALYSE

2235. — *Faire la sommation de la suite*

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}.$$

Si on suppose que n croisse indéfiniment, déterminer les limites entre lesquelles x doit être compris pour que la série ainsi obtenue soit convergente. Représenter par une courbe les variations de la fonction définie par cette série et former une équation différentielle du premier ordre qu'elle doit vérifier, équation ne contenant pas la variable indépendante x.

(*École supérieure d'aéronautique*, 1re *année spéciale*, 1913.)

La fonction

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$$

est la dérivée du polynome

$$\varphi(x) = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{x(1-x^n)}{1-x}.$$

En dérivant alors la fraction située dans le dernier membre, on obtient sans difficulté

$$f(x) = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Supposons maintenant que n augmente indéfiniment; $f(x)$ est alors la somme des n premiers termes d'une série, dont le terme général u_n est égal à nx^{n-1}.

Si $|x| \geqslant 1$, ce terme général est infini pour n infini, la série est divergente.

Si $|x| < 1$, la série est absolument convergente, car le rapport $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ ou $\left|\frac{n+1}{n}x\right|$ a pour limite $|x|$ pour n infini.

Dans ce cas, la somme de la série est la limite de

$$\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

pour n infini.

Posons $x=\frac{1}{a}$, $|a|$ étant supérieur à 1. Les produits $(n+1)x^n$ et nx^{n+1} sont égaux à $\frac{n+1}{a^n}$ et $\frac{n}{a^{n+1}}$; on sait qu'ils ont pour limite zéro pour n infini; donc $f(x)$ a pour limite $\frac{1}{(1-x)^2}$. C'est la somme de la série.

Quand x croît de -1 à $+1$, $1-x$ décroît de 2 à 0, et $(1-x)^2$ de 4 à 0; par suite, la fonction $y=\frac{1}{(1-x)^2}$ croît de $\frac{1}{4}$ à $+\infty$. On en déduit aisément la forme de la courbe.

La dérivée de y par rapport à x est $y'=\frac{2}{(1-x)^3}$; on a donc

$$y=\frac{1}{(1-x)^2}, \qquad y'=\frac{2}{(1-x)^3}.$$

Élevons la première équation au cube, la deuxième au carré et éliminons $(1-x)^6$, nous obtenons l'équation différentielle demandée

$$y'^2-4y^3=0.$$

L. TROIN.

Bonnes solutions par MM. Henri Japhet, collège Chaptal; L. Jolly, à Honfleur; G. Lach, à Douai; M. Mazet, à Alger; M. Roux, au Creusot; L. Simon, à Fourmies.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2227. — *On considère une droite Δ fixe et un point O fixe aussi. De ce point, on abaisse une perpendiculaire OA sur Δ; on joint le point O à un point quelconque P de Δ, et on porte, de part et d'autre du point P, sur cette droite, $PM=PM'=AP$, puis on construit les deux triangles isocèles OMN, OM'N' ayant leurs bases sur OA. On demande alors :*

1° Le lieu du point de rencontre des diagonales du trapèze MNM'N';

2° Le lieu des centres des cercles circonscrits aux triangles MAN, M'AN';

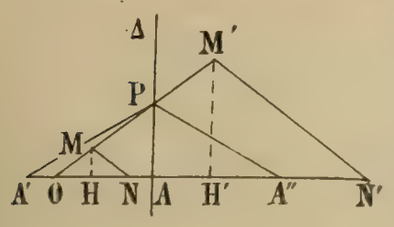
3° L'enveloppe des droites PA' et PA'', A' et A'' étant les symétriques de A par rapport aux parallèles à Δ menées par M et M';

4° L'enveloppe des droites MN, M'N' et la développée de cette enveloppe;

5° La surface et le volume compris à l'intérieur de la surface de révolution engendrée par cette enveloppe en tournant autour de OA.

Nous prendrons le point O comme origine, OA pour axe des x et pour axe des y une parallèle à Δ. Posons $OA=a$, et désignons par φ l'angle que fait OP avec Ox.

Il existe sur la droite OP une demi-droite qui a pour cosinus directeurs $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$, et comme les coordonnées du point P sont a, $a\operatorname{tg}\varphi$, un point quelconque de la droite OP a pour coordonnées



$$x = a + \rho\cos\varphi, \qquad y = a\operatorname{tg}\varphi + \rho\sin\varphi,$$

ρ désignant la valeur algébrique du vecteur qui a pour origine le point P et pour extrémité le point (x, y).

On aura donc les coordonnées des points M et M′ en donnant à ρ les valeurs $\pm$AP ou $\pm a\operatorname{tg}\varphi$. Par suite, les coordonnées du point M sont

$$\text{(M)} \qquad x = a(1 - \sin\varphi), \qquad y = a(1 - \sin\varphi)\operatorname{tg}\varphi,$$

et celles du point M′

$$\text{(M′)} \qquad x = a(1 + \sin\varphi), \qquad y = a(1 + \sin\varphi)\operatorname{tg}\varphi;$$

on en déduit immédiatement celles des points N et N′ :

$$\text{(N)} \qquad x = 2a(1 - \sin\varphi), \qquad y = 0,$$

$$\text{(N′)} \qquad x = 2a(1 + \sin\varphi), \qquad y = 0.$$

Remarquons qu'on passe des coordonnées de M, N à celles de M′, N′ en changeant φ en $\pi + \varphi$.

1. On trouve aisément que l'équation de la diagonale M′N est

$$x(1 + \sin\varphi)\operatorname{tg}\varphi + y(1 - 3\sin\varphi) - 2a\sin\varphi\cos\varphi = 0;$$

en y changeant φ en $\pi + \varphi$, on obtient l'équation de la diagonale MN′

$$x(1 - \sin\varphi)\operatorname{tg}\varphi + y(1 + 3\sin\varphi) - 2a\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

Nous aurons le lieu du point de rencontre en éliminant φ entre ces deux équations. Pour le faire aisément, ajoutons-les et retranchons-les membre à membre, nous obtenons

$$x\operatorname{tg}\varphi + y - 2a\sin\varphi\cos\varphi + 0, \qquad x\operatorname{tg}\varphi - 3y = 0;$$

l'élimination de φ est alors facile, et nous donne

$$2x^2 + 18y^2 - 3ax = 0,$$

qu'on peut écrire

$$\frac{\left(x - \frac{3a}{4}\right)^2}{\left(\frac{3a}{4}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{a}{4}\right)^2} - 1 = 0.$$

Cette équation représente une ellipse aisée à construire.

2. Le centre du cercle circonscrit au triangle AMN est le point de rencontre de la perpendiculaire au milieu de AN

$$x = \frac{a(3 - 2\sin\varphi)}{2},$$

et de la perpendiculaire au milieu de AM. Comme le triangle MAM′ est rectangle en A, cette perpendiculaire passe par le point P et est parallèle à AM′. Ceci nous donne son équation

$$x(1 + \sin\varphi) - y\cos\varphi - a = 0.$$

Éliminons φ entre ces deux équations; de la première nous tirons

$$\sin\varphi = \frac{3a - 2x}{2a},$$

et de la seconde

$$\cos\varphi = -\frac{(2x - a)(x - 2a)}{2ay}.$$

En portant ces valeurs dans la relation $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, nous obtenons

$$y^2 = \frac{(2x - a)(x - 2a)^2}{5a - 2x},$$

ou, en transportant l'origine au point double en évidence $x = 2a$, $y = 0$,

$$2x(x^2 + y^2) - a(y^2 - 3x^2) = 0.$$

Cette équation représente une cubique circulaire à point double, symétrique par rapport à Ox.

Il est clair que le centre du cercle circonscrit au triangle AMN décrit cette même courbe, puisque les droites qui définissent ce centre se déduisent de celles qui définissent le centre du cercle AMN en changeant φ en $\pi + \varphi$.

3. L'équation de la droite PA′ est

$$x - 2y\cos\varphi - a(1 - 2\sin\varphi) = 0;$$

pour obtenir l'enveloppe de cette droite, nous dérivons son équation par rapport à φ, nous avons

$$2y\sin\varphi + 2a\cos\varphi = 0,$$

et nous éliminons φ entre ces deux équations. Pour cela, nous écrivons la première

$$2y\cos\varphi - 2a\sin\varphi = x - a,$$

et nous faisons la somme des carrés; nous obtenons

$$4y^2 + 4a^2 = (x - a)^2,$$

ou

$$(x - a)^2 - 4y^2 - 4a^2 = 0.$$

C'est l'équation d'une hyperbole dont le centre et les axes sont en évidence.

Cette hyperbole est aussi l'enveloppe de la droite PA″.

4. On voit facilement que l'équation de MN est

$$x\sin\varphi + y\cos\varphi - 2a\sin\varphi(1 - \sin\varphi) = 0,$$

ou, en transportant l'origine au point $x = 2a$, $y = 0$,

$$(1) \qquad x\sin\varphi + y\cos\varphi + 2a\sin^2\varphi = 0.$$

Dérivons par rapport à φ, nous obtenons

$$(2) \qquad x\cos\varphi - y\sin\varphi + 4a\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

L'élimination de φ entre ces deux équations donnerait lieu à un calcul laborieux; il sera plus simple de résoudre ces équations par rapport à x et y. Nous aurons ainsi les équations paramétriques de l'enveloppe

$$x = -2a\sin\varphi(1 + \cos^2\varphi), \qquad y = 2a\sin^2\varphi\cos\varphi.$$

Nous obtiendrons toute la courbe en faisant varier φ dans un intervalle quelconque d'étendue égale à 2π. Si nous changeons φ en $\pi + \varphi$, x et y changent de signe; donc, la courbe est symétrique par rapport à l'origine. Il suffit alors de faire varier φ dans un intervalle quelconque d'étendue égale à π, et de prendre la symétrique de la branche obtenue par rapport au point O. Enfin, si l'on change φ en $-\varphi$, x change de signe et y ne change pas, donc, symétrie par rapport à Oy. Prenons comme intervalle d'étendue égale à π l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ et décomposons-le en deux $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ et $\left(0, +\frac{\pi}{2}\right)$; ces deux intervalles nous donneront des branches de courbe symétrique, par rapport à Oy. Il suffira de considérer l'un d'eux, par exemple $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

En résumé, nous ferons varier φ de 0 à $\frac{\pi}{2}$, nous construirons la branche de courbe correspon-

dante C; nous prendrons le symétrique de C par rapport à Oy, soit C′, puis les symétriques de C et de C′ par rapport à l'origine.

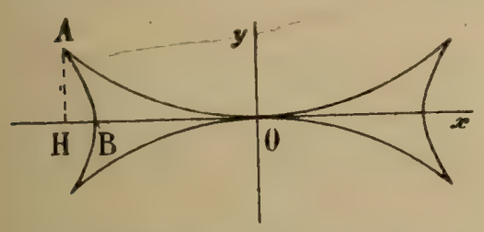
x et y sont des fonctions continues pour toutes les valeurs de φ; leurs dérivées sont

$$\frac{dx}{d\varphi} = -2a\cos\varphi(3\cos^2\varphi - 1), \qquad \frac{dy}{d\varphi} = 2a\sin\varphi(3\cos^2\varphi - 1).$$

Nous en déduisons la pente de la tangente

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg}\varphi;$$

c'est bien la pente de la droite définie par l'équation (1).



Entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, $\frac{dx}{d\varphi}$ et $\frac{dy}{d\varphi}$ s'annulent pour la même valeur de φ; c'est une valeur α dont le cosinus est égal à $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{dx}{d\varphi}$ est positif pour $\varphi > \alpha$, négatif pour $\varphi < \alpha$; c'est le contraire pour $\frac{dy}{d\varphi}$.

On a donc le tableau suivant :

φ	0		α		$\frac{\pi}{2}$
x	0	↘	$-\frac{8a\sqrt{6}}{9}$	↗	$-2a$
y	0	↗	$\frac{4a\sqrt{3}}{9}$	↘	0
$\frac{dy}{dx}$	0	↘	$-\sqrt{2}$	↘	$-\infty$

et la branche de courbe OAB.

Il n'y a plus qu'à achever par symétrie, et on obtient la courbe complète, qui est d'ailleurs symétrique par rapport aux deux axes.

Le point A est un point de rebroussement de première espèce, puisque $\frac{dx}{d\varphi}$ et $\frac{dy}{d\varphi}$ sont tous les deux nuls en ce point et que la pente de la tangente varie dans le même sens aux environs de ce point.

Cherchons maintenant la développée de cette courbe.

Le point limite de l'enveloppe que nous venons d'étudier est défini par les équations (1) et (2). La première représente la tangente, et la deuxième représente une droite perpendiculaire à la tangente et passant par le point de contact : c'est donc la normale.

Le point limite de cette normale, qui décrit la développée de l'enveloppe, sera défini par l'équation (2) :

$$(2) \qquad x\cos\varphi - y\sin\varphi + 4a\sin\varphi\cos\varphi = 0,$$

et par l'équation dérivée

$$-x\sin\varphi - y\cos\varphi + 4a(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0.$$

En résolvant ces deux équations, nous obtenons les coordonnées d'un point du lieu :

$$x = -4a\sin^3\varphi, \qquad y = 4a\cos^3\varphi.$$

Ce sont les équations paramétriques d'une hypocycloïde à quatre rebroussements, qui peut être définie par l'équation

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (4a)^{\frac{2}{3}}.$$

5. Le volume demandé est égal à deux fois le volume V engendré par l'aire OAB en tournant autour de Ox, et celui-ci est la différence des volumes V_1 et V_2 engendrés par les aires OAH et BAH.

On a

$$V_1 = \pi \int_a^{\infty} y^2 dx, \qquad V_2 = \pi \int_a^{\frac{\pi}{2}} y^2 dx,$$

et

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} y^2 dx.$$

Remplaçons y^2 et dx par leurs valeurs en fonction de φ, nous avons

$$V = 8\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi \cos^4\varphi (3\cos^2\varphi - 1) d\varphi.$$

On peut écrire

$$\sin^4\varphi \cos^4\varphi (3\cos^2\varphi - 1) d\varphi = \sin^4\varphi (1 - \sin^2\varphi)(2 - 3\sin^2\varphi) d\sin\varphi,$$
$$= (2\sin^4\varphi - 5\sin^6\varphi + 3\sin^8\varphi) d\sin\varphi;$$

d'où l'on déduit, pour la valeur de l'intégrale définie,

$$\frac{2\sin^5\varphi}{5} - \frac{5\sin^7\varphi}{7} + \frac{\sin^9\varphi}{3},$$

et

$$V = \frac{16\pi a^3}{105}.$$

Le volume cherché est donc $\frac{32\pi a^3}{105}$.

Calculons maintenant l'aire engendrée par l'arc OAB. Elle est égale à la somme des aires A_1 et A_2 engendrées par les arcs OA et AB. Nous avons

$$A_1 = 2\pi \int_0^{\alpha} y ds, \qquad A_2 = 2\pi \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} y ds.$$

Dans ces deux intégrales ds doit avoir le signe de $d\varphi$.

On a

$$ds = \pm 2a(3\cos^2\varphi - 1) d\varphi.$$

Dans la première intégrale, φ est compris entre 0 et α, donc $3\cos^2\varphi - 1$ est positif, on prendra le signe + dans le deuxième membre; dans la seconde, on prendra le signe —; par suite, on a

$$A_1 = 8\pi a^2 \int_0^{\alpha} \sin^2\varphi \cos\varphi (3\cos^2\varphi - 1) d\varphi = 8\pi a^2 [F(\alpha) - F(0)],$$

$$A_2 = -8\pi a^2 \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \cos\varphi (3\cos^2\varphi - 1) d\varphi = 8\pi a^2 \left[F(\alpha) - F\left(\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

$F(\varphi)$ désignant l'intégrale indéfinie

$$\int \sin^2\varphi \cos\varphi (3\cos^2\varphi - 1) d\varphi, \qquad \text{ou} \qquad \int \sin^2\varphi (2 - 3\sin^2\varphi) d\sin\varphi$$

donc

$$F(\varphi) = \frac{2\sin^3\varphi}{3} - \frac{3\sin^5\varphi}{5} = \frac{\sin^3\varphi (10 - 9\sin^2\varphi)}{15}.$$

On a alors

$$A_1 - A_2 = 8\pi a^2 \left[2F(\alpha) - F(0) - F\left(\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

et en remarquant que $\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$, on en déduit aisément

$$A_1 + A_2 = \frac{8\pi a^2 (16\sqrt{6} - 9)}{135}.$$

Par suite, l'aire totale, double de $A_1 + A_2$, est égale à

$$\frac{16\pi a^2(16\sqrt{6}-9)}{135}$$

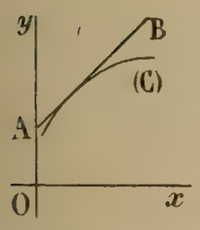
L. NAUCELLE, à la Châtre.

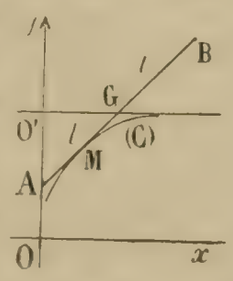
Bonnes solutions par MM. G. Lach, à Douai; M. Roux, au Creusot; L. Simon, à Fourmies.

MÉCANIQUE

2232. — *Une barre homogène pesante* AB *de longueur* $2l$ *est située dans un plan vertical et s'appuie sur une courbe* (C) *de ce plan. L'extrémité* A *est assujettie à glisser sans frottement sur une verticale* Oy *du plan. Déterminer la courbe* (C) *de manière que la barre soit en équilibre quel que soit son point de contact avec la courbe* (*il n'y a pas frottement*).

La barre restant en équilibre quel que soit son point de contact avec la courbe (C), c'est que dans le déplacement, la somme des travaux des forces extérieures est nulle. Comme il n'y a pas frottement de la barre sur la verticale Oy ni sur la courbe (C), les forces de réaction, qui ont des déplacements normaux à leurs directions, ne travaillent pas.





Il en résulte que le travail de la pesanteur *est nul*. Par suite le centre de gravité G, milieu de la barre AB, se déplace sur une horizontale O'G et la courbe (C), enveloppe d'une droite de longueur constante dont les extrémités se déplacent sur deux droites rectangulaires données, est une hypocycloïde à quatre points de rebroussement.

G. LACH, à Douai.

Il est facile de traiter la question par le calcul, en exprimant que les lignes d'action des forces appliquées en A, en M et en G, sont concourantes. Soit

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

l'équation de la droite AB; celle de la normale en M est

$$-x\sin\alpha + y\cos\alpha - p' = 0;$$

celle de la normale à Oy en A,

$$y\sin\alpha - p = 0,$$

et, enfin, celle de la verticale du point G,

$$x - l\sin\alpha = 0.$$

La condition de rencontre est donc

$$-l\sin^2\alpha + p\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - p' = 0,$$

ou

$$\frac{p'\sin\alpha - p\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = -l\sin\alpha.$$

Le premier membre est la dérivée de $\frac{p}{\sin\alpha}$, et l'intégration est immédiate :

$$\frac{p}{\sin\alpha} = l\cos\alpha + C.$$

La droite AB a donc pour équation

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - C\sin\alpha - l\sin\alpha\cos\alpha = 0.$$

Une des courbes (C) correspond à une valeur de la constante C. Portons alors les axes au point $x = 0$, $y = C$; l'équation deviendra

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - l \sin\alpha \cos\alpha = 0,$$

et nous savons que cette droite enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements ayant les deux axes de coordonnées actuels pour axes de symétrie contenant chacun deux points de rebroussement.

A. ROUX, lycée de Lille.

Nous avons reçu diverses solutions basées sur des considérations analogues ou sur les conditions d'équilibre et qui toutes mènent à ce résultat :

MM. Mazet, conducteur des Ponts et Chaussées à Alger; H. Lecouffe, à Paris; M. Roi, 69e d'artillerie; M. Roux, au Creusot; P. Vie, à Lyon; C. R., à Marseille.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1914)

ÉCOLE CENTRALE (*Suite*)

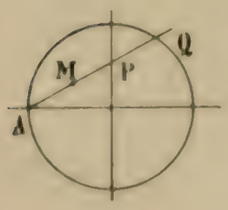
10123. — Construire les courbes

$$\rho = \frac{1 - \sin\omega}{\cos\omega}, \quad \rho = \frac{\operatorname{tg}\omega}{\cos\omega - \sin\omega}, \quad \rho = \frac{\operatorname{tg}\omega}{\cos\omega + \sin\omega}, \quad \rho = \frac{\sin\omega}{1 - \operatorname{tg}\omega}, \quad \rho = \frac{\sin^2\omega}{1 - \operatorname{tg}\omega},$$

$$\rho = \frac{2}{3 + \cos\omega}, \quad \rho = \frac{\operatorname{tg}\omega}{1 - 3\cos\omega}, \quad \rho = \frac{1}{\sin 2\omega}, \quad \rho = \frac{\sin\omega - \cos\omega + 1}{1 - 2\sin\omega}.$$

— **124.** — Construire la courbe $x^3 + y^3 - xy = 0$.

— **125.** — Courbe pour laquelle la sous-tangente est constante.



— **126.** — Sous-normale à une courbe en coordonnées rectangulaires. Appliquer à $x^2 - 2py = 0$.

— **127.** — Lieu des points dont le rapport des distances à deux points fixes est constant.

— **128.** — Lieu des points dont le rapport des distances à un point et à une droite est constant.

— **129.** — Équation de la cissoïde; de la strophoïde droite; d'une conchoïde de droite.

— **130.** — Soient un cercle et deux diamètres rectangulaires de ce cercle; à partir du point A, on porte $AM = PQ$; lieu du point M.

— **131.** — Enveloppe de la droite $\lambda x + \lambda^2 y - a = 0$.

— **132.** — Réduction des équations des coniques :

$$2x^2 + xy + 3y^2 - 1 = 0, \quad x^2 + 3y^2 + xy - x + y = 0, \quad x^2 + 4y^2 - xy - 1 = 0,$$

$$x^2 - 5y^2 + xy + 2x - y - 1 = 0, \quad (x - y)^2 + x = 0, \quad (y - x)^2 + 4x = 0.$$

— **133.** — Recherche des foyers dans les coniques :

$$x^2 + 4y^2 - a^2 = 0, \quad x^2 + 3y^2 - a^2 = 0, \quad x^2 - y^2 - a^2 = 0, \quad x^2 - 4y^2 - 5 = 0.$$

— **134.** — Résoudre le système d'inégalités

$$x^2 + y^2 - 2x - 1 > 0, \quad x(x - y) < 0.$$

— **135.** — Démontrer que la tangente en un point d'une conique est conjuguée du diamètre qui passe par ce point.

— **136.** — Démontrer que, dans une conique, deux diamètres conjugués interceptent, sur une tangente quelconque, deux segments dont le produit est constant.

— **137.** — Quand un point décrit une droite, sa polaire par rapport à une conique passe par un point fixe.

— **138.** — Montrer que dans l'ellipse $MF + MF' = C^{te}$.

— **139.** — Podaire d'une ellipse par rapport à un foyer.

— **140.** — Soit une ellipse $x^2 + 4y^2 - a^2 = 0$. Peut-on mener par un point de l'axe Oy une normale à l'ellipse, différente de cet axe?

— **141.** — Développée de l'ellipse $x^2 + 2y^2 - a^2 = 0$.

— **142.** — Diamètres conjugués dans l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Variation de l'angle de deux diamètres conjugués.

— **143.** — Exprimer les coordonnées d'un point de l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ en fonction d'un paramètre.

— **144.** — Montrer que dans une hyperbole la différence $MF' - MF = C^{te}$.

— **145.** — Démontrer que dans une hyperbole le produit des distances des deux foyers à une tangente est constant.

— **146.** — Mener d'un point (x_0, y_0) les tangentes à l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Tangente de coefficient angulaire donné.

— **147.** — Démontrer que dans une hyperbole le pied de la normale divise le segment intercepté par les axes dans un rapport constant.

— **148.** — Polaire d'un point par rapport à une hyperbole.

— **149.** — Développée de l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$; développée de $xy - k^2 = 0$.

— **150.** — Propriétés segmentaires des asymptotes de l'hyperbole.

— **151.** — Propriétés focales de la tangente à la parabole.

— **152.** — Mener du point (x_0, y_0) les tangentes à la parabole $y^2 - 2px = 0$.

— **153.** — Chercher la polaire du point (x_0, y_0) par rapport à la conique $y^2 = 2px$.

— **154.** — Mener à $y^2 - 2px = 0$ une normale de coefficient angulaire m.

— **155.** — Podaire d'une parabole.

— **156.** — Tangente à la parabole $y^2 - 2px = 0$; retrouver la parabole comme enveloppe de ces droites.

— **157.** — Mener d'un point une normale à $y^2 - 2px = 0$.

— **158.** — Développée de la parabole.

— **159.** — Rayon de courbure d'une parabole.

— **160.** — Lieu des centres des coniques passant par quatre points.

Géométrie analytique à trois dimensions.

— **161.** — Définir la position d'un point de l'espace sur un vecteur, au moyen du rapport segmentaire.

— **162.** — Angle des deux droites $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ et $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$.

— **163.** — Équation de la droite symétrique de $x = az + h$, $y = bz + k$, par rapport au plan

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

— **164.** — Mener par une droite un plan faisant un angle α avec une droite donnée.

— **165.** — Direction d'un plan faisant le même angle avec trois plans donnés.

— **166.** — Distance d'un point donné à la droite $y - x = 0$, $z = h$.

— **167.** — Distance du point (1, 3, 2) à la droite $x + y = 0$, $x - z - 1 = 0$.

— **168.** — Distance du point (3, 4, 2) à la droite $x + y - z = 0$, $2x - y + z - 1 = 0$.

— **169.** — Mener par le point (1, 2, — 1) la perpendiculaire à la droite $x - y - z = 0$, $2x + y + 2z - 1 = 0$.

— **170.** — Distance de Oz à la droite $x + y - z = 0$, $x - y + 2z - 1 = 0$.

— **171.** — Distance des deux droites $x = az + h$, $y = bz + k$; $x = a'z + h'$, $y = b'z + k'$.

— **172.** — Distance des deux droites $x - z = 0$, $y + 2z - 1 = 0$; $x = 3y = 4z$.

— **173.** — Distance des deux droites $x - y = 0$, $x + z - 1 = 0$; $x + 2y - 1 = 0$, $2x - z + 1 = 0$.

— **174.** — Rayon du cercle défini par les deux équations

$$x^2 + y^2 + z^2 - 5x + 7y - 1 = 0, \qquad x - y + 2z = 0.$$

— **175.** — Mener par la droite $x - a = 0$, $z + y - a = 0$, un plan qui coupe $x^2 + y^2 + z^2 - ax = 0$ suivant un cercle de rayon donné.

— **176.** — Mener par $x - y = 0$, $x + z - 1 = 0$ un plan tangent à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

— **177.** — Puissance d'un point par rapport à une sphère.

— **178.** — Équation du cône de sommet (1, — 1, 2) ayant pour directrice la courbe

$$x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad x + z - y = 0.$$

— **179.** — Équation du cône de sommet (1, 2, — 1) ayant pour directrice la courbe

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \quad x + y + z = 0.$$

— **180.** — Équation d'un cylindre de révolution dont on connaît l'axe en position et le rayon.

— **181.** — Équation d'un tore; section par un plan bitangent.

— **182.** — Équation du plan osculateur en un point à l'hélice circulaire.

— **183.** — Rayon de courbure de la courbe $x - y - z = 0$, $x^2 - y^2 - x - y = 0$, à l'origine. — Même question pour les courbes $x^2 + y^2 - z = 0$, $z^2 - x = 0$; $xy - z = 0$, $x^2 + y^2 - z = 0$.

— **184.** — Propriétés des sections par deux plans parallèles dans une même quadrique.

— **185**. — Discussion du genre des sections diamétrales dans l'hyperboloïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

— **186**. — Sections planes de $x^2 + y^2 - 2pz = 0$.

— **187**. — Que représente l'équation $x^2 - y^2 - 2z^2 - 1 = 0$? Longueur des axes de cette quadrique; plans de sections circulaires; un tel plan étant donné, évaluer le rayon de la section.

— **188**. — Sections circulaires dans les quadriques :

$x^2 + 2y^2 - 3z^2 - a^2 = 0$; $x^2 - 2y^2 - 3z^2 + a^2 = 0$; $x^2 + 4y^2 - 2z = 0$; $x^2 + 2y^2 - 2pz = 0$.

— **189**. — Intersection de la quadrique $x^2 - y^2 + z^2 - a^2 = 0$ avec le plan variable $x + y + \lambda(z - a) = 0$.

— **190**. — Mener par la droite $x = y = z - h$ un plan qui coupe la surface $x^2 - y^2 - z^2 - a^2 = 0$ suivant une parabole.

— **191**. — Mener par la droite $x - az + h = 0$, $y - bz - k = 0$ un plan qui coupe la surface $x^2 + y^2 - z^2 - l^2 = 0$ suivant une parabole.

— **192**. — Mener par la droite $x - y + z + a = 0$, $2x + z - a = 0$ un plan coupant la surface $x^2 + 2y^2 - z^2 - a^2 = 0$ suivant une parabole.

— **193**. — Sommet de la courbe $x^2 + 4y^2 + 2z = 0$, $x - y - 1 = 0$. Même question pour la parabole, section de la surface $x^2 + 2y = 0$ par le plan $x + y - z = 0$.

— **194**. — Section de la surface $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0$ par le plan $\alpha x + \beta y + \lambda = 0$. Qu'arrive-t-il lorsque λ varie?

— **195**. — Diamètres conjugués dans l'ellipsoïde.

— **196**. — Équations d'un diamètre de la quadrique $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2z = 0$.

— **197**. — Exprimer que le plan $x + 2y - z + \lambda = 0$ est tangent à la surface $x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 1 = 0$.

— **198**. — Mener à la quadrique $x^2 + 2y^2 + z^2 - a^2 = 0$ un plan tangent parallèle au plan $2x + y + z = 0$.

(A suivre.)

SUJETS DE CONCOURS

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

Concours militaire de 1919.

Mathématiques.

Trois questions au choix.

I

TRIGONOMÉTRIE. — Résolution et discussion de l'équation trigonométrique $a \sin x + b \cos x = c$.

ALGÈBRE. — Limite de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ quand m grandit indéfiniment en valeur absolue.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE. — Étude d'une courbe dont l'équation est résolue par rapport à l'une des coordonnées. Tracé, équation de la tangente en un point, sous-tangente, normale, sous-normale, concavité, convexité, points d'inflexion.

Application : étude de la courbe $y = \sqrt{\frac{x^3}{a - x}}$.

II

TRIGONOMÉTRIE. — Résoudre un triangle rectiligne connaissant deux côtés a, b et l'angle A opposé à l'un d'eux. Discussion.

ALGÈBRE. — Fonctions de plusieurs variables indépendantes, dérivées partielles, formule des accroissements finis. Dérivée d'une fonction composée.

Trouver les dérivées des fonctions suivantes :

$$y = \operatorname{arc\,tg}(x + \sqrt{x^2 - 1}), \qquad y = \arcsin \sqrt{\frac{1 - e^2 \sin x}{1 - e \cos x}}, \qquad y = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}.$$

Géométrie analytique. — *Courbes du second ordre* : Division en trois genres d'après la nature des points à l'infini ; asymptotes. Condition pour que deux points soient conjugués par rapport à une conique ; polaire d'un point. Condition pour que deux droites soient conjuguées ; pôle d'une droite.

III

Trigonométrie. — Énoncé, sans démonstration, les formules relatives à l'addition et à la multiplication des angles.

Calculer $\cos\frac{x}{3}$ en fonction de $\cos x$.

Algèbre. — Séries à termes positifs : caractères de convergence ou de divergence tirés de l'étude des expression $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, $\sqrt[n]{u_n}$, $n^p u_n$.

Application : Étudier les séries $u_n = \frac{x^n}{1-x^n}$ $\left(\text{on appliquera la règle } \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, $u_n = e^{an+bn^2}$ (on appliquera la règle $\sqrt[n]{u_n}$), a et b désignant deux constantes qui peuvent recevoir toutes les valeurs positives ou négatives.

Géométrie analytique. — Courbes algébriques en général : intersection d'une courbe algébrique donnée, définie par une équation entière et homogène $f(x, y, z) = 0$, avec une droite arbitraire menée par un point quelconque donné sur cette courbe ; point simple, tangente en ce point. Cas particulier où le point est rejeté à l'infini : asymptote définie comme tangente à la courbe en ce point.

Épure.

I

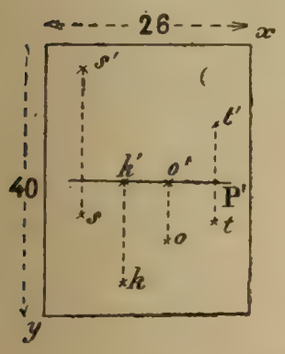
Intersection de deux cônes. — *Cadre :* $26^{cm} \times 40^{cm}$.

Coordonnées par rapport à l'angle supérieur gauche, en centimètres.

Premier cône : S, $s'(x = 6,\ y = 3{,}4)$, $s(y = 22{,}8)$.

Base : cercle dans le plan horizontal P' : centre (o, o'), $o'(x = 14{,}8,\ y = 20)$, $o\,y = 28{,}8)$; rayon : 4^{cm}

Second cône : T, $t'(x = 16{,}8,\ y = 12{,}5)$, $t(y = 24{,}1)$.



Base : cercle dans le plan horizontal P' : centre (k, k'), $k'(x = 7,\ y = 20)$, $k(y = 30{,}4)$; rayon : $6^{cm},8$.

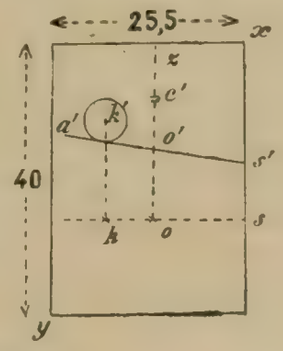
Représenter le cône T entaillé par le cône S en le limitant au plan horizontal P'.

Épure en noir, constructions en rouge.

II

Intersection d'un cône et d'un tore. — *Cadre* : $25^{cm},5 \times 40^{cm}$.

Coordonnées par rapport à l'angle supérieur gauche, en centimètres.



1° Axe du tore vertical $oo'z$, $o(x = 6{,}5,\ y = 8)$, rayon : ^{m}; le tore est engendré par le cercle de centre (k, k') situé dans le plan de front passant par l'axe, $k'(x = 6{,}5,\ y = 8)$, rayon : 5^{cm} ;

2° Cône de révolution : sommet (s, s'), $s'(x = 25{,}5,\ y = 16{,}2)$, $s(y = 27)$.

La génératrice de contour apparent vertical $s'a'$ est tangente au cercle (k, k') inférieurement.

Centre de la sphère inscrite (c, c'), sur l'axe $oo'z$, $c'(y = 5{,}8)$.

Représenter le tore entaillé par le cône.

Épure en noir. Constructions en rouge.

Physique.

I

Mesure de la vitesse de la lumière par la méthode de Fizeau (méthode de la roue dentée).

Application. — Soit $n = 150$ le nombre de pleins de la roue dentée ; $D = 12^{km}$ la distance entre la roue dentée et le miroir.

A) Quelle vitesse N évaluée en tours par seconde faut-il imprimer à la roue dentée pour produire la première éclipse, sachant que la vitesse de la lumière est d'environ 300 000^{km} par seconde?

B) Sachant que l'erreur relative sur D est inférieure à $\frac{1}{10^{e}}$, que l'erreur absolue possible sur le nombre de tours est de 11 tours par seconde, quel que soit l'ordre de l'éclipse observée, on demande à partir de quelle éclipse l'erreur relative sur la vitesse de la lumière calculée sera inférieure à $\frac{1}{100}$.

II

Application du pendule à la mesure de l'intensité de la pesanteur. Mesure de la durée d'oscillation. On ne traitera pas la mesure de la longueur du pendule simple synchrone.

Application. — On utilise pour la mesure de l'intensité de la pesanteur une horloge battant la seconde (durée de l'oscillation simple), et un pendule qui équivaut à un pendule simple d'une longueur approximative de 4^{m}.

A) Sachant que deux coïncidences successives sont séparées par 2 110 oscillations simples de l'horloge, calculer la durée d'oscillation du second pendule.

B) On observe le nombre d'oscillations 2N de l'horloge entre le départ et la coïncidence d'ordre c (la coïncidence au départ n'étant pas comprise dans ce nombre c). Comment faut-il choisir c pour que l'erreur relative sur T soit inférieure à $\frac{1}{500\,000}$, sachant que l'erreur absolue sur N est inférieure à 10 oscillations? On néglige l'erreur sur la durée d'oscillation de l'horloge.

III

Qu'entend-on par équivalence de la chaleur et du travail?

Comment Joule a-t-il déterminé l'équivalent mécanique de la calorie?

Application. — Une roue à palettes du poids de 2^{kg} et de chaleur spécifique moyenne C = 0,1 est plongée dans une masse d'eau de 10^{kg} et se trouve en équilibre de température avec elle à la température t = 15°. Sous l'influence d'un moteur extérieur qui fournit une puissance constante, la roue est mise en mouvement, puis arrêtée après 30 minutes de marche. La température finale d'équilibre, corrigée pour tenir compte des pertes extérieures, est de T = 30°.

La température initiale et la température finale sont connues chacune à $\frac{1}{100}$ de degré près en plus ou en moins.

La chaleur spécifique moyenne de la roue est comprise entre 0,10 et 0,11. L'équivalent mécanique de la grande calorie est compris entre 424 et 425 kilogrammètres.

On demande :

A) Quelle est en chevaux-vapeur la puissance fournie par le moteur à la roue;

B) Quelle est l'erreur relative qui entache le résultat obtenu. L'erreur sur les poids et sur les temps est négligeable.

Chimie.

I

Fluor.

II

Acide sulfurique. Réactions fondamentales donnant naissance à ce corps. Modes de préparation dans l'industrie. Concentration. Impuretés. Usages.

III

Acide azotique. Réactions fondamentales donnant naissance à ce corps. Modes de préparation industriels. Concentration. Impuretés. Usages.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

Coulommiers. — Imp. PAUL BRODARD.

30e Année. Juillet 1920. N° 10.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Note de la réduction. — Nous avons déjà averti nos lecteurs de la suppression des solutions de certaines questions proposées. Peut-être en supprimerons-nous encore d'autres, afin de faire disparaître le retard dans la publication des solutions de toutes ces questions.

Dans le même but, nous ne publierons aucune note ni aucune question d'oral dans les trois numéros de juillet, août et septembre.

La situation sera normale à la rentrée pour le numéro d'octobre, et alors nous pourrons de nouveau publier des notes, des questions d'oral et des énoncés variés.

PREMIÈRE PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2243. — *Deux paraboles* P *et* Q *sont placées dans un plan de telle sorte que leurs axes soient rectangulaires.*

1° *Montrer qu'il y a une relation simple entre la somme des angles que font avec une direction fixe, avec un des axes par exemple, les tangentes communes à* P *et à* Q, *et l'angle que fait avec la même direction la ligne joignant les foyers.*

2° *On suppose que chaque parabole* P *et* Q *se déforme en conservant son sommet et son axe. La déformation est d'ailleurs telle que la ligne joignant les foyers passe par un point fixe. Trouver alors le lieu du point de rencontre des directrices.*

3° *Déterminer les paraboles de façon que les trois tangentes communes soient confondues.*

4° *Discuter le nombre des tangentes communes réelles dans le cas particulier où le sommet d'une des paraboles est sur l'axe de l'autre.* (*École nationale supérieure des mines*, 1914.)

Prenons pour axes des x et des y les axes des deux paraboles et représentons par

$$y^2 = 2p(x-a), \qquad x^2 = 2q(y-b)$$

les équations de ces deux paraboles; les nombres p et q sont les paramètres des deux paraboles, a est l'abscisse du sommet de la première parabole, b, l'ordonnée du sommet de la seconde.

1. Pour exprimer qu'une droite,

$$y = mx + \lambda,$$

est tangente à la première parabole, on forme l'équation aux ordonnées des points de rencontre, en éliminant x entre les deux équations précédentes :

$$y^2 = 2p\frac{y-\lambda}{m} - 2pa,$$

ou

$$my^2 - 2py + 2p(\lambda + ma) = 0,$$

et on écrit que cette équation a une racine double, ce qui donne

$$2m(ma+\lambda) - p = 0;$$

on exprimera de même qu'elle est tangente à la seconde parabole en formant l'équation aux abscisses des points de rencontre

$$x^2 = 2q(mx + \lambda) - 2qb,$$

et écrivant qu'elle a une racine double, ce qui donne encore

$$qm^2 - 2\lambda - 2b = 0.$$

Éliminons λ entre les deux relations de contact; nous aurons une équation qui donne les coefficients angulaires des tangentes communes aux deux paraboles, autres que la droite de l'infini. Cette équation est

$$qm^3 - 2am^2 - 2bm + p = 0;$$

elle donne les tangentes trigonométriques des angles que font ces trois droites avec Ox :

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = m_1, \qquad \operatorname{tg}\alpha_2 = m_2, \qquad \operatorname{tg}\alpha_3 = m_3.$$

D'autre part, nous savons que

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\alpha_3 - \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha_3}{1 - \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_3 - \operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha_3};$$

nous avons donc

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \frac{2a + p}{q + 2b}.$$

Les coordonnées du foyer de la première parabole sont $a + \frac{p}{2}$ et 0; celles du foyer de la seconde 0 et $b + \frac{q}{2}$; l'angle V que la droite des foyers fait avec Ox est donné par

$$\operatorname{tg} V = -\frac{b + \frac{q}{2}}{a + \frac{p}{2}} = -\frac{2b + q}{2a + p}$$

et nous avons la relation

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = -\cot V = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + V\right);$$

par conséquent, les quatre angles sont liés par la relation

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - V = (2k - 1)\frac{\pi}{2},$$

où k désigne, comme d'habitude, un nombre entier quelconque.

2. Si chaque parabole se déforme en conservant son foyer et son axe, a et b sont fixes, p et q varient; mais la ligne des foyers a pour équation

$$\frac{x}{\frac{p}{2} + a} + \frac{y}{\frac{q}{2} + b} - 1 = 0,$$

et, en exprimant qu'elle passe par un point fixe (α, β), nous avons la relation

$$\alpha\left(\frac{q}{2} + b\right) + \beta\left(\frac{p}{2} + a\right) - \left(\frac{p}{2} + a\right)\left(\frac{q}{2} + b\right) = 0.$$

Les directrices ont d'ailleurs pour équations respectives

$$x = a - \frac{p}{2}, \qquad y = b - \frac{q}{2};$$

le lieu de leur point de rencontre s'obtient en éliminant p et q entre ces deux équations et la relation trouvée, ce qui donne

$$\alpha(2b - y) + \beta(2a - x) - (2a - x)(2b - y) = 0;$$

c'est l'équation d'une hyperbole équilatère ayant ses asymptotes parallèles aux axes.

Les équations de ces asymptotes sont

$$x = 2a - \alpha, \qquad y = 2b - \beta,$$

et elles donnent, en même temps, les coordonnées du centre.

3. Pour que les tangentes communes soient confondues, il faut et il suffit que l'équation du troisième degré en m ait une racine triple, c'est-à-dire que l'on ait identiquement

$$qm^3 - 2am^2 - 2bm + p \equiv q(x-h)^3.$$

Ceci donne

$$2a = 3qh, \qquad 2b = -3qh^2, \qquad p = -qh^3;$$

les deux premières relations donnent $ah + b = 0$, $h = -\frac{b}{a}$; et alors, nous obtenons immédiatement p et q :

$$p = -q\frac{b^3}{a^3}, \qquad q = -\frac{2a^2}{3b}.$$

Si donc a et b sont donnés, les paraboles sont déterminées; nous avons :

$$p = -\frac{2b^2}{3a}, \qquad q = -\frac{2a^2}{3b},$$

et, pour équations des paraboles,

$$y^2 = -\frac{4b^2}{3a}(x-a),$$

$$x^2 = -\frac{4a^2}{3b}(y-b).$$

On pourrait d'ailleurs se donner tout aussi bien p et q et calculer a et b.

4. Si le sommet d'une des paraboles est sur l'axe de l'autre, a ou b est nul. Supposons que ce soit a; l'équation en m devient

$$qm^3 - 2bm + p = 0,$$

ou

$$m^3 - \frac{2b}{q}m + \frac{p}{q} = 0;$$

pour qu'elle ait ses trois racines réelles et distinctes, il faut que $4P^3 + 27Q^2$ soit négatif, ce qui donne ici

$$-4 \times \frac{8b^3}{q^3} + \frac{27p^2}{q^2} < 0,$$

ou

$$p^2 < \frac{32}{27}\frac{b^3}{q}.$$

Cette inégalité n'est possible que si b et q ont le même signe; nous pouvons toujours les supposer positifs, en choisissant convenablement le sens positif de Oy. Alors la valeur numérique de p est limitée supérieurement :

$$|p| < \sqrt{\frac{32}{27}}\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{q}};$$

celle de q aussi.

On pourrait aussi se donner p et q et limiter b inférieurement :

$$b > \sqrt[3]{\frac{27qp^2}{32}}.$$

Dans tout autre cas, il y a une tangente commune réelle et deux imaginaires conjuguées.

L. SIMON, à Fourmies.

Bonnes solutions : MM. A. Malrait, lycée de Marseille; J. Collet, école des Anglais, à Lyon; Marescalchi.

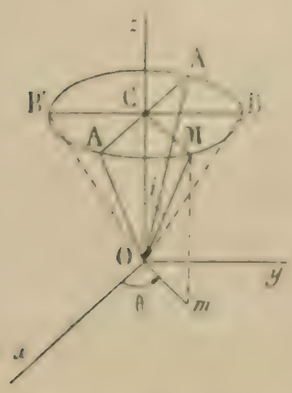
MÉCANIQUE

2245. — *Un point* M *se meut sur un cône de révolution donné, dont les génératrices forment l'angle* i *avec l'axe* SA. *La vitesse* v *du point* M *est constante, et, de plus, l'aire décrite par le rayon vecteur joignant le sommet* S *à la projection* N *du point* M *sur le plan mené par* S *perpendiculairement à* SA *croît proportionnellement au temps* t.

Exprimer, en fonction de t, *la longueur* SM $= r$ *ainsi que l'angle* θ *formé par le plan* ASM *avec un plan fixe passant par* SA. *Calculer la distance du sommet* S *à la tangente en* M *à la trajectoire du point* M. *Déterminer enfin la direction de la tangente à l'hodographe et la nature de cette courbe.*

(*École nationale supérieure des Mines*, 1914.)

Les notations de l'énoncé ont été légèrement modifiées : O est le sommet du cône, Oz, l'axe, Ox et Oy sont deux axes rectangulaires, perpendiculaires à Oz et passant au sommet du cône, m désigne la projection du point M sur le plan des xy, et θ l'angle du demi-plan OzM avec le demi-plan zOx, le sens positif des axes étant le sens de la rotation qui amène Ox sur Oy.



Posons $OM = r$; nous aurons

$$Om = r \sin i \qquad \text{et} \qquad x = Om \cos\theta, \qquad y = Om \sin\theta.$$

Les coordonnées du point M sont donc

$$x = r \sin i \cos\theta, \qquad y = r \sin i \sin\theta, \qquad z = r \cos i.$$

Elles nous donnent

$$\frac{dx}{dt} = \sin i \cos\theta \frac{dr}{dt} - r \sin i \sin\theta \frac{d\theta}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = \sin i \sin\theta \frac{dr}{dt} + r \sin i \cos\theta \frac{d\theta}{dt}, \qquad \frac{dz}{dt} = \cos i \frac{dr}{dt};$$

en exprimant que

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

est égal à une constante v^2, nous aurons la relation

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \sin^2 i \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = v^2$$

D'autre part, la loi des aires sur le plan des xy nous donne

$$r^2 \sin^2 i \frac{d\theta}{dt} = C;$$

par suite,

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{C^2}{r^4 \sin^4 i}.$$

Alors la relation précédente devient

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2 \sin^2 i} = v^2,$$

puis,

$$\frac{r\,dr \sin i}{\sqrt{v^2 r^2 \sin^2 i - C^2}} = dt.$$

Posons $vr \sin i = u$; nous aurons

$$v \sin i\, dr = du,$$

puis,

$$v^2 \sin^2 i\, r\,dr = u\,du;$$

la relation différentielle deviendra

$$\frac{udu}{\sqrt{u^2 - C^2}} = v^2 \sin i dt.$$

L'intégrale est immédiate et donne

$$\sqrt{u^2 - C^2} = v^2 \sin i(t - t_0),$$

$$v^2 r^2 \sin^2 i - C^2 = v^4 \sin^2 i(t - t_0)^2,$$

(1) $$r = \frac{\sqrt{v^4 \sin^2 i(t - t_0)^2 + C^2}}{v \sin i}.$$

Pour $t = t_0$, r prend la valeur $\frac{C}{v \sin i}$; choisissons ce moment pour origine des temps et faisons passer le demi-plan zOx par ce rayon particulier, θ sera nul à l'origine des temps, et r prendra la valeur

$$r = \frac{\sqrt{v^2 t^2 \sin^2 i + C^2}}{v \sin i}.$$

Calculons maintenant θ; nous avons

$$r^2 \sin^2 i \frac{d\theta}{dt} = C,$$

$$\frac{v^4 \sin^2 i t^2 + C^2}{v^2} \cdot \frac{d\theta}{dt} = C;$$

par conséquent,

$$d\theta = \frac{Cv^2 dt}{v^4 \sin^2 i t^2 + C^2}.$$

Posons alors $v^2 \sin it = Cu'$; nous aurons $v^2 \sin i dt = Cdu'$, et la différentielle $d\theta$ devient

$$d\theta = \frac{\frac{C^2 du'}{\sin i}}{C^2(u'^2 + 1)} = \frac{1}{\sin i} \cdot \frac{du'}{1 + u'^2};$$

nous avons donc

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{\sin i} \operatorname{arc\,tg} u' = \frac{1}{\sin i} \operatorname{arc\,tg} \frac{v^2 \sin it}{C};$$

or, pour $t = 0$, $\theta = 0$; nous avons finalement

(2) $$\theta = \frac{1}{\sin i} \operatorname{arc\,tg} \frac{v^2 \sin it}{C}.$$

Telles sont les valeurs de r et de θ en fonction du temps.

Les équations de la tangente à la trajectoire sont

$$\frac{X - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y - y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{Z - z}{\frac{dz}{dt}};$$

la distance du point O à cette droite est donnée par

$$d^2 = \frac{P^2 + Q^2 + R^2}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \frac{P^2 + Q^2 + R^2}{v^2},$$

en posant

$$P = y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}, \qquad Q = z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}, \qquad R = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt};$$

la somme $P^2 + Q^2 + R^2$ se transforme par la formule de Lagrange et s'écrit

$$(x^2 + y^2 + z^2)\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] - \left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right)^2;$$

d'autre part,

$$x^2+y^2+z^2=r^2, \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=v^2, \qquad x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}=r\frac{dr}{dt};$$

la valeur de d^2 est donc

$$d^2=\frac{v^2t^2-r^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}{v^2};$$

comme $r\frac{dr}{dt}=v^2t$,

$$d^2=r^2-v^2t^2=\frac{C^2}{v^2\sin^2 i},$$

$$(3) \qquad d=\frac{C}{v\sin i}.$$

La distance d est constante; le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point O sur la tangente à la trajectoire est une courbe située sur la sphère ayant pour centre O et pour rayon $\frac{C}{v\sin i}$. La trajectoire est donc une des courbes du cône dont les tangentes sont tangentes à cette sphère. Au point initial sur la trajectoire $r=\frac{C}{v\sin i}$; ce point est donc aussi situé sur la sphère indiquée.

Passons maintenant à l'hodographe; les équations de cette courbe sont

$$x=\sin i\cos\theta\frac{dr}{dt}-r\sin i\sin\theta\frac{d\theta}{dt}, \qquad y=\sin i\sin\theta\frac{dr}{dt}+r\sin i\cos\theta\frac{d\theta}{dt}, \qquad z=\cos i\frac{dr}{dt};$$

nous savons que

$$(4) \qquad x^2+y^2+z^2=v^2;$$

l'hodographe est situé sur la sphère (4).

Cherchons maintenant la direction de la tangente à cette courbe; ses paramètres sont

$$\frac{dx}{dt}=\sin i\cos\theta\frac{d^2r}{dt^2}-2\sin i\sin\theta\frac{dr\,d\theta}{dt\,dt}-r\sin i\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2-r\sin i\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

$$\frac{dy}{dt}=\ldots,$$

$$\frac{dz}{dt}=\cos i\frac{d^2r}{dt^2}.$$

Or, si nous dérivons

$$r^2\sin^2 i\frac{d\theta}{dt}=C,$$

nous obtenons

$$2r\frac{dr\,d\theta}{dt\,dt}+r^2\frac{d^2\theta}{dt^2}=0,$$

et ceci nous montre que la somme du second et du quatrième terme est nulle; il reste donc

$$\frac{dx}{dt}=\sin i\cos\theta\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right], \qquad \frac{dy}{dt}=\sin i\sin\theta\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right], \qquad \frac{dz}{dt}=\cos i\frac{d^2r}{dt^2}.$$

Remplaçons $\frac{d\theta}{dt}$ par $\frac{C}{r^2\sin^2 i}$ et calculons $\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$; cette expression devient

$$\frac{r^3\sin^4 i\frac{d^2r}{dt^2}-C^2}{r^3\sin^2 i};$$

d'autre part,

$$r^2=v^2t^2+\frac{C^2}{v^2\sin^2 i}, \qquad r\frac{dr}{dt}=v^2t, \qquad r\frac{d^2r}{dt^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=v^2;$$

multiplions par r^2, et remplaçons $\left(r\frac{dr}{dt}\right)^2$ par v^4t^2; nous aurons

$$r^3\frac{d^2r}{dt^2} = v^2(r^2 - v^2t^2) = \frac{C^2}{\sin^2 i},$$

et

$$\frac{r^3\sin^4 i\,\frac{d^2r}{dt^2} - C^2}{r^3\sin^4 i} = \frac{C^2(\sin^2 i - 1)}{r^3\sin^4 i}.$$

Les paramètres de la tangente à l'hodographe sont donc

$$\frac{-C^2\cos^2 i\cos\theta}{r^3\sin^3 i}, \qquad \frac{-C^2\cos^2 i\sin\theta}{r^3\sin^3 i}, \qquad \frac{C^2\cos i}{r^3\sin^2 i};$$

divisons-les par $\frac{C^2\cos i}{r^3\sin^2 i}$, ils deviendront

$$\frac{-\cos i\cos\theta}{\sin i}, \qquad \frac{-\cos i\sin\theta}{\sin i}, \qquad 1,$$

et, enfin,

$$-\cos\theta, \qquad -\sin\theta, \qquad \operatorname{tg} i.$$

En projection horizontale, cette direction est parallèle à Om, ce qui était attendu, puisque la projection de l'accélération sur le plan horizontal passe au point O. Cette direction fait un angle constant avec le plan des xy ou avec Oz,

$$\cos\gamma = \frac{\operatorname{tg} i}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 i}} = \sin i;$$

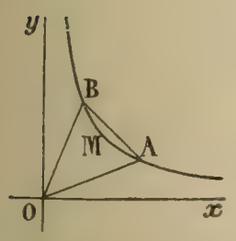
l'angle γ avec Oz est le complément de i.

Enfin cette direction est perpendiculaire à OM; elle est aussi perpendiculaire à la tangente à la trajectoire; par conséquent, l'accélération est dirigée suivant la normale au cône au point M.

CALCUL

2246. — *L'unité de longueur est le mètre.*

On considère, dans un système d'axes rectangulaires, l'hyperbole $xy = 1$.



La droite OA *fait avec* Ox *un angle égal à* $\frac{\pi}{8}$; *la droite* OB *fait avec* Oy *un angle égal à* $\frac{\pi}{8}$.

Calculer l'aire du triangle mixtiligne OAMB, *et celle du segment* AMB. *Calculer aussi la longueur de la corde* AB.

(*École nationale supérieure des Mines*, 1914.)

L'équation en coordonnées polaires de l'hyperbole équilatère, $xy = 1$, est

$$\rho^2\sin\omega\cos\omega = 1.$$

L'aire du triangle mixtiligne OAMB est donnée par

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}}\rho^2 d\omega, \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}}\frac{d\omega}{\sin\omega\cos\omega}.$$

L'intégrale indéfinie peut s'écrire $\int\frac{dt}{t}$, en posant $t = \operatorname{tg}\omega$. L'aire cherchée est donc

$$\frac{1}{2}(L\,|\operatorname{tg}\omega|)_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}};$$

mais, dans l'intervalle envisagé, $\operatorname{tg}\omega$ est positive; par conséquent, l'aire demandée est

$$\frac{1}{2}\mathrm{L}\frac{\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}.$$

Comme $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$ est la racine positive de l'équation $\frac{2t}{1-t^2}=1$; c'est $\sqrt{2}-1$.

L'angle $\frac{3\pi}{8}$ est le complément de $\frac{\pi}{8}$, $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}=\sqrt{2}+1$; par conséquent, la valeur de l'aire s'écrit

$$\frac{1}{2}\mathrm{L}\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\mathrm{L}(\sqrt{2}+1).$$

L'aire du triangle rectiligne OAB est

$$\frac{1}{2}\mathrm{OA}.\mathrm{OB}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}^2\sin\frac{\pi}{4};$$

or

$$\overline{\mathrm{OA}}^2=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}}=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{4}};$$

par suite, l'aire est égale à 1.

L'aire du segment AMB est donc

$$1-\mathrm{L}(\sqrt{2}+1)=\mathrm{L}\frac{e}{\sqrt{2}+1}.$$

Pour avoir la longueur de la corde AB, il faut écrire de deux façons l'aire du triangle OAB; nous avons ainsi

$$\mathrm{AB}\times\mathrm{OH}=2,$$

OH étant la perpendiculaire abaissée du point O sur AB. Cette longueur OH est donnée par

$$\mathrm{OH}=\mathrm{OA}\cos\frac{\pi}{8},$$

et, comme

$$\mathrm{OA}=\sqrt{\frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}}},\qquad \mathrm{OH}=\sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}};$$

donc

$$\mathrm{AB}=2\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}=\sqrt{\sqrt{2}-1}.$$

Nous avons bien ainsi toutes les valeurs demandées dans l'énoncé.

Pour faire les calculs numériques, nous prendrons $e=2{,}718$, $\sqrt{2}=1{,}414$, et nous aurons à calculer les nombres

$$\mathrm{X}=\mathrm{L}2{,}414,\qquad \mathrm{Y}=\mathrm{L}\frac{2{,}718}{2{,}414},\qquad \mathrm{Z}=2\sqrt{0{,}414}.$$

Ceci peut s'écrire

$$e^{\mathrm{X}}=2{,}414,\qquad e^{\mathrm{Y}}=\frac{2{,}718}{2{,}414},\qquad \mathrm{Z}=\sqrt{1{,}656}.$$

Prenons alors les logarithmes vulgaires; nous aurons

$$\mathrm{X}=\frac{\log 2{,}414}{\log 2{,}718},\qquad \mathrm{Y}=\frac{\log 2{,}718+\operatorname{colog}2{,}414}{\log 2{,}718}$$

et

$$\log\mathrm{Z}=\frac{1}{2}\log 1{,}656.$$

Calculs.

$$\log 2{,}718 = 0{,}43425,$$
$$\log 2{,}414 = 0{,}38274, \qquad \operatorname{colog} 2{,}414 = \bar{1}{,}61726,$$
$$\log 1{,}656 = 0{,}21906;$$

$$X = \frac{38\,274}{43\,425} \quad \text{ou} \quad \frac{3\,827}{4\,243};$$

$$Y = \frac{05\,151}{43\,425} \quad \text{ou} \quad \frac{515}{4\,342};$$

$$\log Z = 0{,}10953; \qquad Z = 1^{m},287.$$

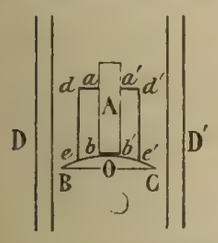
Pour X et Y, nous emploierons les logarithmes :

$$\log X = \log 3\,827 + \operatorname{colog} 4\,342,$$
$$\log Y = \log 515 + \operatorname{colog} 4\,342,$$
$$\log 3\,827 = 3{,}58286; \qquad \log 515 = 2{,}71181;$$
$$\log 4\,342 = 3{,}63769, \qquad \operatorname{colog} 4\,342 = \bar{4}{,}36231;$$
$$\log X = \bar{1}{,}94517, \qquad X = 0^{m^2},8814;$$
$$\log Y = \bar{1}{,}07412, \qquad Y = 0^{m^2},1186.$$

Bonnes solutions : MM. L. Simon, à Fourmies; E. Dumaine, à Saint-Étienne; M. Mazet, à Alger.

PHYSIQUE

2265. — *Un cylindre de verre* A *est porté par un cylindre métallique edd'e' dans lequel il est saisi à la hauteur de la base supérieure dd'; le support edd'e' repose sur la face supérieure d'une lentille plan-convexe dont la face inférieure, plane, est parallèle à la base bb' du cylindre* A. *La distance de bb' à la face supérieure de la lentille est égale à* $0^{mm},1$; *la longueur ab, entre la base du cylindre* A *et le niveau où ce cylindre est maintenu dans son support, est égale à* 20^{mm}; *le rayon de courbure de la face supérieure de la lentille est très grand et on peut, sauf en ce qui concerne la forme des franges dont il sera question plus loin, confondre cette surface avec le plan tangent en son sommet* O.



1° *On éclaire avec une lumière monochromatique* ($\lambda = 0^{\mu},589$) *tombant normalement sur* BC *et se réfléchissant sur la base polie bb' du cylindre* A; *on reçoit la lumière réfléchie dans un viseur. Étudier les franges qu'on peut ainsi observer. Voit-on ces franges si on remplace la lumière monochromatique par de la lumière blanche? Que voit-on alors si on reçoit sur la fente d'un spectroscope la lumière qui s'est réfléchie au point* O?

2° *On chauffe tout le système par un courant de vapeur d'eau bouillante circulant dans un cylindre à double paroi* DD' *concentrique au cylindre* A. *Décrire ce qui va se passer.*

On remarquera que le support métallique edd'e' s'échauffe avant le cylindre A, *car il est plus près des parois chauffantes.*

3° *Dans une expérience, on constate que, lorsque la température est devenue uniforme, il est rentré au centre, au total,* 12 *anneaux, la température initiale était* 18°, *la température finale* 100°. *On recommence l'expérience en remplaçant le cylindre* A *par un cylindre de quartz de forme identique et identiquement placé : on voit rentrer* 16,5 *anneaux au centre, la température initiale et la température finale étant les mêmes que précédemment. Le coefficient moyen de dilatation du cylindre de quartz, dans le sens de l'axe du cylindre, entre* 18° *et* 100°, *est égal à* 813×10^{-8}. *En déduire les coefficients moyens de dilatation du verre* A *et du métal qui constitue le support edd'e'.*

On ne cherchera pas à avoir une approximation supérieure au centième sur les diverses quantités qui entrent dans les calculs. (*École normale supérieure et bourses de licence, groupe II, concours de 1914.*)

1° En un point où l'épaisseur d'une lame d'air est e, il y a frange sombre si l'on a

$$2e + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \qquad \text{ou} \qquad e = k\frac{\lambda}{2},$$

k étant un nombre entier, frange brillante si l'on a

$$2e + \frac{\lambda}{2} = 2k\frac{\lambda}{2} \qquad \text{ou} \qquad e = k\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{4}.$$

Le quotient de $0^{mm},1$ par $0^{\mu},2945$ est presque exactement 339,5 et la seconde égalité est sensiblement satisfaite pour $k = 340$. On aperçoit donc au centre une tache brillante entourée d'un système d'anneaux sombres.

Le numéro d'ordre 340 est beaucoup trop élevé pour qu'on puisse rien apercevoir en lumière blanche. Dans le spectroscope, on verra des franges sombres sur toutes les couleurs pour lesquelles on a $e = k\frac{\lambda}{2}$. Si l'on prend pour limites du spectre les couleurs dont les longueurs d'onde sont respectivement $760^{\mu\mu}$ et $400^{\mu\mu}$, on trouve $k = 263$ pour la première couleur et $k = 500$ pour la seconde. Le nombre des franges sera donc environ $500 - 263 + 1 = 238$.

2° Si on chauffe le tout, la dilatation du support écarte l'une de l'autre les deux faces de la lame d'air et les anneaux périphériques se contractent pour venir disparaître au centre. Le cylindre se dilatant à son tour, les deux surfaces réfléchissantes se rapprochent et les anneaux reparaissent; mais la dilatation du verre étant moindre que celle du métal, il reparaît moins d'anneaux qu'il n'en a disparu.

3° S'il a disparu finalement n anneaux, la variation d'épaisseur de la lame d'air est $n\frac{\lambda}{2}$; elle représente la différence entre la dilatation du support, $20,1d(t - t_0)$, et la dilatation du cylindre, $20d'(t - t_0)$, d et d' désignant les coefficients de dilatation linéaire des deux substances. On a donc

$$(20,1d - 20d')(t - t_0) = n\frac{\lambda}{2}.$$

Cette équation, appliquée à la première expérience, donne $(20,1d - 20d') \times 82 = 12 \times 0,0002945$, et appliquée à la seconde, $(20,1d - 20 \times 813 \times 10^{-8}) \times 82 = 46,5 \times 0,0002945$.

La seconde égalité donne, pour le métal, $d = 0,000011 = 11 \times 10^{-6}$.

Portons cette valeur dans la première, on trouve pour le verre $d' = 0,0000089 = 8,9 \times 10^{-6}$.

SUJETS DE CONCOURS

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE

Concours de 1919.

Groupe I.

Mathématiques, première composition.

2404. — On donne trois axes rectangulaires $Oxyz$ et on considère les circonférences $C(a)$ définies par les équations

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a + r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = 0, \end{cases}$$

dans lesquelles a et r désignent des constantes et φ un paramètre.

1° Déterminer les trajectoires orthogonales des circonférences C (a) lorsque a varie. Ces trajectoires sont des courbes γ', appelées tractrices; on prendra leurs équations sous la forme (1), en y posant $a = f(\varphi)$ et on déterminera la fonction $f(\varphi)$.

En désignant par γ celle des courbes γ' qui admet Oy pour axe de symétrie et qui est tout entière du côté des y positifs, discuter le nombre des points communs à γ et à l'une quelconque des circonférences C (a).

2° Trouver les courbes (Γ) qui coupent les circonférences C (a) sous un angle constant α.

3° On désigne par $\gamma(\psi)$ la courbe déduite de γ par une rotation d'angle ψ autour de Ox et par une translation $r\psi$ le long de Ox et on désigne par S la surface engendrée par $\gamma(\psi)$ lorsque l'angle ψ varie.

Aux points de γ, on élève des normales (N) à (S); prouver que ces normales ont une enveloppe (U) dont on construira les projections sur le plan Oxy et sur le plan Oyz.

Ces normales (N) engendrent une surface; comparer les sections de cette surface par les plans parallèles à Oxy avec les courbes (Γ) de la deuxième partie.

4° Trouver les courbes (E) de la surface (S) qui coupent à angle droit les tractrices $\gamma(\psi)$. Montrer que chaque courbe est tracée sur une sphère (Σ); déterminer toutes les sphères (Σ).

On considère la famille de droites D obtenues de la façon suivante : on joint le centre d'une quelconque des sphères (Σ) à l'un quelconque des points de la courbe (E) tracée sur cette sphère.

Déterminer les droites D qui passent par un point quelconque A du plan Oyz. Construire la courbe s que A doit traverser pour que le nombre des racines réelles d'une des équations dont on peut faire dépendre la détermination de ces droites augmente ou diminue de 2.

Quelle est la position de la courbe s par rapport à la surface (S)? Expliquer le résultat.

5° Démontrer que les normales à la surface (S) en tous les points d'une courbe (E) ont une enveloppe (V).

Soit MN la normale à (S) en un point M; M_0 et M_0N_0 désignent des positions particulières de M et de MN.

Quand M décrit la tractrice $\gamma(\psi)$ passant par M_0, MN a une enveloppe que M_0N_0 touche au point P_0.

Quand M décrit la courbe (E) passant par M_0, MN a une enveloppe que M_0N_0 touche au point Q_0.

Calculer le produit $$\overline{M_0P_0} \times \overline{M_0Q_0}.$$

Deuxième composition.

2405. — 1° On considère, dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires Ox, Oy, la trajectoire (Γ) du point M dont les coordonnées sont, à l'instant t, données par les formules

$$\text{M} \quad \begin{cases} x = r\left(\cos t + t\sin t - \dfrac{t^2}{2}\cos t\right), \\ y = r\left(\sin t - t\cos t - \dfrac{t^2}{2}\sin t\right), \end{cases}$$

r étant une longueur donnée.

Trouver, en fonction de t, les coordonnées du point de contact N de la normale en M à la courbe (Γ) avec la développée γ de la courbe (Γ). Trouver aussi les coordonnées du point de contact P de la normale en N à la courbe γ avec la développée de la courbe γ.

En déduire une définition géométrique des courbes (γ) et (Γ).

2° Tracer l'arc AB de la courbe (Γ) et l'arc correspondant AC de la développée γ obtenus en faisant varier t de 0 à π.

On considère la portion de plan (S) limitée par l'arc AB, par l'arc AC et par le segment de droite BC. On demande, en prenant pour unité de longueur r et pour unité de surface r^2, de calculer à une unité près : 1° la longueur du périmètre de (S); 2° l'aire de (S).

3° Étudier l'hodographe du mouvement du point M. Placer l'extrémité Q du vecteur accélération du point M par rapport aux points N et P.

Chercher les mouvements plans dans lesquels le vecteur vitesse et le rayon de courbure de la trajectoire ont tous deux constamment pour longueur $r\dfrac{t^2}{2}$.

4° Effectuer les intégrations qui achèvent la détermination des mouvements plans dans lesquels le mouvement sur l'hodographe est donné par les formules.

$$\begin{cases} x'_t = r\dfrac{t^n}{n!}\cos\left[t - \dfrac{(n-1)\pi}{2}\right], \\ y'_t = r\dfrac{t^n}{n!}\sin\left[t - \dfrac{(n-1)\pi}{2}\right] \end{cases} \qquad (n \text{ entier positif}).$$

Définir géométriquement les trajectoires.

Soit (C_n) la trajectoire de celui des mouvements ainsi trouvés dans lequel le mobile est au point $A(x = 1,\ y = 0)$, à l'instant $t = 0$. On définit de même des trajectoires (C_{n-1}), (C_{n-2}), ...

Soient M_n, M_{n-1}, M_{n-2}, ... les positions, à l'instant t, des mobiles parcourant respectivement les trajectoires (C_{n-1}), (C_{n-2}), ...

a. Vers quelle position limite tend le point M_n quand, t étant constant, n augmente indéfiniment?

b. Démontrer que lorsque t varie, n restant constant, la droite M_nM_{n-2} touche son enveloppe au point situé sur la droite $M_{n-1}M_{n-3}$.

Peut-on généraliser?

Épreuve pratique.

2406. Intersection d'un cône et d'un cylindre. — On donne quatre points par leurs coordonnées exprimées en centimètres, et par rapport aux axes dirigés comme l'indique le croquis :

	x	y	z
A	— 7	0	2
B	— 11	0	6
C	0	11	6
D	3	8	0

Le *cylindre* a pour base la parabole de front passant aux points A et B : la tangente en A est horizontale : la tangente en B est verticale. Les génératrices sont parallèles à la droite BC.

Le *cône* a pour sommet le point C. La base est le cercle horizontal de centre D et de rayon 6^{cm}.

1° Construire l'intersection des deux surfaces.

Déterminer un point courant avec la tangente, les points et tangentes remarquables.

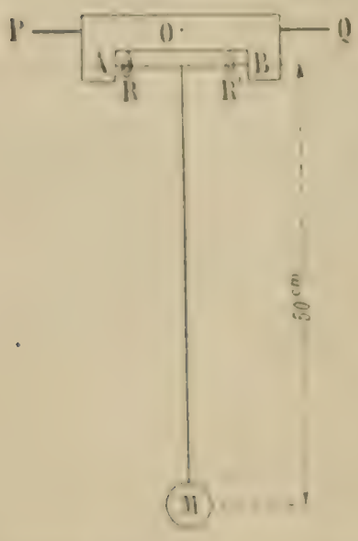
2° Représenter la surface du cylindre extérieure au cône, située en avant du plan de la base, et limitée aux deux génératrices qui sont tangentes à l'intersection.

Nota. — L'épure sera entourée d'un cadre de 28×44^{cm}. Chaque candidat écrira son nom sur la feuille d'épure. Il n'aura pas d'autre feuille à remettre.

Physique.

I. — Décrire quelques expériences caractéristiques mettant en évidence des caustiques et des lignes focales et indiquer brièvement la signification de ces expériences.

II. — **2407**. 1° Un pendule est constitué par une sphère de plomb M pesant 500^g, dont le centre est à 50^{cm} de l'axe d'oscillation AB, qui est d'abord placé horizontalement. Quelle est, calculée à $\frac{1}{500}$ près, la période des petites oscillations de ce pendule en un lieu où $g = 981$? Jusqu'à quelle amplitude la période reste-t-elle constante à $\frac{1}{500}$ près?



2° On incline le support AOB du pendule en le faisant tourner autour de l'axe O perpendiculaire au plan ABM. Comment varie la période d'oscillation?

3° Revenant à la position initiale, on relie le pendule au support par des ressorts R qui exercent des efforts proportionnels aux angles d'écart du pendule comptés à partir du plan vertical. Ceci fait, on fait tourner le support d'un angle droit autour d'un axe PQ parallèle à AB et l'on constate que, sous l'action des ressorts, la tige du pendule s'incline de 60° par rapport à la verticale. On demande la valeur du couple de torsion des ressorts.

On demande enfin quelles seront les périodes des petites oscillations du pendule : 1° quand on aura incliné davantage le support de manière que la position d'équilibre du pendule soit horizontale; 2° quand on reviendra à la position initiale où le plan ABM est vertical; 3° quand on aura fait faire un demi-tour au support, tournant autour de l'axe PQ, à partir de cette position initiale. Quelle relation doit-il exister entre ces trois périodes d'oscillation?

Groupe II.

Mathématiques.

I. — **2408**. Une courbe plane (C) a pour équation, en coordonnées polaires r et θ,

$$r = a(1 - \cos\theta),$$

a désignant une longueur donnée.

1° Calculer, en fonction de θ, l'angle α que fait la tangente à cette courbe avec l'axe polaire. Montrer qu'il existe trois tangentes à cette courbe parallèles à une direction donnée (D) : soient A, B, C, les points de contact de ces tangentes.

2° Démontrer que le centre de gravité du triangle ABC demeure fixe et que la surface de ce triangle reste constante lorsque la direction (D) varie.

3° La courbe (C) est la trajectoire d'un point matériel. Exprimer r et θ en fonction du temps t de manière que l'hodographe du mouvement, construit à partir du pôle des coordonnées, soit un arc du cercle

$$r = a \cos\theta$$

et que le mobile se trouve, pour $t = 0$, au point $\theta = \frac{\pi}{2}$ de la courbe (C).

4° Calculer, à 0,01 près, la valeur de t correspondant au passage du mobile au point $\theta = \frac{\pi}{3}$.

II. — **2409**. Deux cercles, de rayon R et R', se coupent sous l'angle α. L'aire S, commune aux deux cercles, est infiniment petite avec α lorsque, le centre de l'un des cercles variant, les deux cercles deviennent tangents extérieurement.

Calculer la partie principale de S en prenant α comme infiniment petit principal.

Physique.

I. — Décrire le montage expérimental employé pour l'observation d'un spectre pur, et indiquer les raisons de ce montage.

II. — **2410**. Un fort sifflet S_1 produisant un son de 2 000 périodes par seconde est placé en un point A, et on l'écoute en un point éloigné B auprès duquel un sifflet S_2 donnant la même note est réglé de manière que l'observateur entende les deux sons avec la même intensité.

On demande :

1° Quel phénomène de battements on observera si la source S_1 se rapproche ou s'éloigne de l'observateur avec une vitesse de 72^{km} à l'heure ;

2° Ce qu'il y aura de changé s'il souffle un vent de 20^m par seconde de A vers B ou de B vers A.

3° Étudier les mêmes questions dans le cas où, la source S_1 étant fixe, c'est l'observateur B qui se déplace à la vitesse indiquée en entraînant la source S_2 (vitesse du son : 340^m par seconde).

Chimie.

Propriétés physiques et chimiques de l'acide nitrique, en y comprenant l'action sur les corps organiques.

Sciences naturelles.

La feuille : forme, structure, adaptation au milieu ambiant.

QUESTIONS PROPOSÉES

Nous avons reçu de M. R. Harmégnies une note intéressante sur des propriétés connues de l'hyperbole équilatère et de la strophoïde dont nous faisons une série de questions proposées aux lecteurs de la *Revue* :

1°. — **2411**. Construire le point de Frégier relatif à un point M dans une hyperbole équilatère. Même question pour le point diamétralement opposé, M'.

2°. — **2412**. Les cercles ayant pour diamètres les cordes d'une hyperbole équilatère parallèle à une direction donnée, passent par deux points fixes de cette hyperbole et diamétralement opposés.

3°. — **2413**. Le lieu des points de contact des tangentes parallèles à une direction donnée aux cercles d'un faisceau linéaire est une hyperbole équilatère.

4°. — **2414**. La figure inverse d'une hyperbole équilatère par rapport à un de ses points est une strophoïde admettant ce point pour point double.

5°. — **2415**. Lieu des points d'où l'on voit sous des angles égaux deux segments AB et AC ayant une extrémité commune.

6°. — **2416**. Lieu des points de contact des tangentes menées par un point fixe aux coniques d'un faisceau homofocal.

R. HARMÉGNIES.

DEUXIÈME PARTIE

ANALYSE

2236. — *Étant donnée l'équation différentielle*

$$f(x)y'' + \frac{f'(x)}{2}y' + y + g(x) = 0,$$

montrer que par un changement de variable convenable on peut intégrer cette équation en la ramenant à une équation linéaire à coefficients constants avec second membre. Appliquer à l'équation

$$4xy'' + 2y' + y = 0.$$

Trouver les courbes intégrales et, en particulier, celle qui coupe l'axe des y au point d'ordonnée 1 et dont la tangente en ce point a pour coefficient angulaire $-\frac{1}{2}$. *Construire cette courbe lorsque x varie de* $-\infty$ *à* $+\infty$. ***Étudier l'aire comprise entre la courbe et l'axe des x.***

Prenons une nouvelle variable indépendante z, liée à x par la relation $z = \varphi(x)$; y devient fonction de z et nous avons

$$y'_x = y'_z \varphi'(x), \qquad y''_x = y''_z \varphi'^2(x) + y'_z \varphi''(x).$$

Remplaçons y'_x et y''_x par ces valeurs dans l'équation donnée; nous obtenons

$$f(x)\varphi'^2(x)y''_z + \left[f(x)\varphi''(x) + \frac{1}{2}f'(x)\varphi'(x)\right]y'_z + y + g(x) = 0.$$

Pour que cette équation soit à coefficients constants, il faut et il suffit que les coefficients de y''_z et y'_z soient des constantes, puisque celui de y est égal à 1. On doit donc avoir

$$(1) \qquad f(x)\varphi'^2(x) = A, \qquad f(x)\varphi''(x) + \frac{1}{2}f'(x)\varphi'(x) = B,$$

et il s'agit de montrer qu'on peut déterminer une fonction $\varphi(x)$ vérifiant ces deux équations pour des valeurs convenables de A et B.

De la première nous tirons

$$\varphi'(x) = \sqrt{A}\,f(x)^{-\frac{1}{2}}, \qquad \text{et} \qquad \varphi''(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{A}\,f(x)^{-\frac{3}{2}}f'(x),$$

et en remplaçant $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ par ces valeurs dans la seconde équation (1), le premier membre s'annule identiquement.

On en conclut que si l'on fait le changement de variable $z = \varphi(x)$, $\varphi(x)$ étant défini par la relation

$$\varphi'(x) = C\,f(x)^{-\frac{1}{2}},$$

C étant une constante arbitraire, l'équation donnée se transforme en la suivante :

$$C^2 y''_z + y + F(z) = 0,$$

F(z) désignant ce que devient $g(x)$ quand on y remplace x en fonction de z.

Application. — Considérons l'équation

$$4xy'' + 2y' + y = 0.$$

Ici $f(x)$ est égal à $4x$; nous aurons $\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (en prenant $C = 1$), et $z = \varphi(x) = \sqrt{x}$.

L'équation différentielle devient alors

$$y''_z + y = 0;$$

elle a pour intégrale générale $y = A\cos z + B\sin z$, et en remplaçant z en fonction de x,

$$y = A\cos\sqrt{x} + B\sin\sqrt{x}.$$

Pour que y prenne la valeur 1 pour $x = 0$, il faut qu'on ait $A = 1$; on a alors

$$y = \cos\sqrt{x} + B\sin\sqrt{x}$$

et

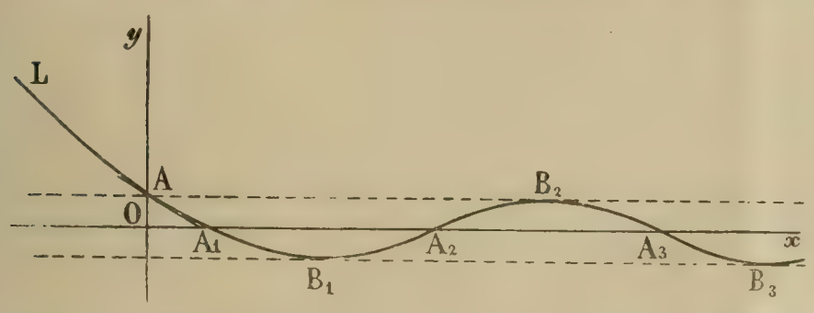
$$y' = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + B\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

Pour $x = 0$, $-\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ est égal à $-\frac{1}{2}$ et $\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ est infini; par suite, pour que y' ait la valeur $-\frac{1}{2}$ pour $x = 0$, il faut que B soit nul.

La courbe intégrale envisagée a donc pour équation $y = \cos\sqrt{x}$.

La fonction $\cos\sqrt{x}$ est définie et continue pour toutes les valeurs de x. En effet, pour x négatif, on peut écrire $\sqrt{x} = i\sqrt{-x}$, l'on a

$$y = \cos\sqrt{x} = \operatorname{ch}\sqrt{-x}.$$



Quand x croît de $-\infty$ à 0, $\sqrt{-x}$ décroît de $+\infty$ à 0, et $\operatorname{ch}\sqrt{-x}$ décroît de $+\infty$ à 1. A cette variation correspond la branche de courbe LA.

Pour avoir la tangente au point A, nous développons $\operatorname{ch}\sqrt{-x}$ en série entière, et nous avons

$$y = \operatorname{ch}\sqrt{-x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} - \ldots.$$

Ceci nous montre que la tangente a pour équation $Y = 1 - \frac{x}{2}$ et que la courbe est au-dessus de la tangente.

Quand x est positif, $\sqrt{x}$ varie dans le même sens que x, et des variations bien connues de $\cos\sqrt{x}$ nous déduisons la forme de la courbe; elle rencontre Ox aux points A_1, A_2, A_3, ... qui ont respectivement pour abscisses $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$, $\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2$, $\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2$, ... Aux points B_1, B_2, B_3, ... qui ont pour abscisses π^2, $(2\pi)^2$, $(4\pi)^2$, ... la tangente est parallèle à Ox.

Remarquons enfin que la courbe passe par le point A, et qu'elle y admet même tangente que la branche de courbe LA qui correspond aux valeurs négatives de x. On a, en effet, en développant $\cos\sqrt{x}$ suivant les puissances de $\sqrt{x}$,

$$y = \cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} - \ldots;$$

la tangente au point A a pour équation $Y = 1 - \frac{x}{2}$ et la courbe est au-dessus de la tangente.

Étudions enfin l'aire limitée par la courbe et l'axe des x. On est conduit à calculer les intégrales indéfinies

$$I = \int \operatorname{ch}\sqrt{-x}\,dx \qquad \text{et} \qquad J = \int \cos\sqrt{x}\,dx.$$

Pour la première, nous faisons le changement de variables

$$\sqrt{-x} = t, \qquad \text{ou} \qquad x = -t^2, \qquad dx = -2t\,dt,$$

et nous avons

$$I = -2\int t\operatorname{ch} t\,dt.$$

Intégrons par parties en posant $t = u$, $\operatorname{ch} t\,dt = dv$, $v = \operatorname{sh} t$, nous avons

$$\int t \operatorname{ch} t\,dt = t \operatorname{sh} t - \int \operatorname{sh} t\,dt = t \operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t,$$

et par suite

$$I = -2(t \operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t) = -2\left(\sqrt{-x} \operatorname{sh} \sqrt{-x} - \operatorname{ch} \sqrt{-x}\right).$$

Pour calculer J, nous poserons $\sqrt{x} = t$, $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$; alors

$$J = 2\int t \cos t\,dt = 2\left[t \sin t - \int \sin t\,dt\right] = 2(t \sin t + \cos t),$$

ou enfin

$$J = 2(\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}).$$

On en déduit, par exemple,

$$\text{aire } OAA_1 = 2\left|\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}\right|_0^{-1} = \pi - 2,$$

$$\text{aire } A_1B_1A_2 = 2\left|\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}\right|_{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}^{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2} = -4\pi,$$

$$\text{aire } A_2B_2A_3 = +8\pi,$$

et, d'une manière générale,

$$\text{aire } A_nB_nA_{n+1} = (-1)^n 4n\pi.$$

G. LACH, à Douai.

Bonnes solutions par MM. H. Farcigny, à Juvisy-sur Orge; Jolly, à Honfleur; M. Roux, au Creusot; L. Simon, à Fourmies.

2237. — *On considère la fonction*

$$y = \frac{(1+x)^2 - Lx}{x},$$

et on demande :

1° *D'établir une relation entre deux dérivées consécutives de cette fonction, y^n et y^{n-1}, et de calculer les trois premières dérivées, y', y'', y''';*

2° *De calculer y^n, en fonction de x;*

3° *D'étudier les variations de cette fonction, y, et de comparer la courbe qui la représente à la droite $y = x + 2$; puis, de donner l'aire de cette courbe, depuis $x = 1$, jusqu'à $x = e$.*

1. On peut écrire

$$xy = (1+x)^2 - Lx;$$

prenons les dérivées d'ordre n des deux membres en supposant $n \geqslant 3$. La dérivée d'ordre n de $(1+x)^2$ est nulle, celle de $-Lx$ est $(-1)^n \frac{(n-1)!}{x^n}$, et enfin celle de xy est, d'après la formule de Leibnitz, $xy^n + ny^{n-1}$. On a donc

$$xy^n + ny^{n-1} = (-1)^n \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

Nous pouvons écrire la suite des formules

$$xy = (1+x)^2 - Lx,$$

$$xy' + y = 2(1+x) - \frac{1}{x},$$

$$xy'' + 2y' = 2 + \frac{1}{x^2},$$

$$(1) \qquad xy''' + 3y'' = -\frac{2}{x^3},$$

$$xy^{\text{iv}} + 4y''' = +\frac{3!}{x^4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$xy^{(n)} + ny^{(n-1)} = \frac{(-1)^n (n-1)!}{x^n}.$$

Pour calculer y' nous multiplions les deux premières respectivement par 1 et $-x$, puis nous les ajoutons membre à membre, y disparaît et nous avons

$$(2) \qquad -x^2y' = (1+x)^2 - \mathrm{L}x - 2x(1+x) + 1 = -x^2 - \mathrm{L}x + 2$$

et

$$y' = \frac{x^2 + \mathrm{L}x - 2}{x^2}.$$

Pour avoir y'', nous ajoutons à l'équation (2) la troisième du système (1), multipliée par $\frac{x^2}{2}$, et nous obtenons

$$(3) \qquad \frac{x^3}{2}y'' = -x^2 - \mathrm{L}x + 2 + x^2 + \frac{1}{2} = -\mathrm{L}x + \frac{5}{2},$$

d'où

$$y'' = \frac{-2\mathrm{L}x + 5}{x^3}.$$

Nous aurons y''' en ajoutant à l'équation (3) la quatrième du système (1), multipliée par $-\frac{x^3}{3!}$; ceci nous donne

$$-\frac{x^4}{3!}y''' = -\mathrm{L}x + \frac{5}{2} + \frac{1}{3} = \frac{-6\mathrm{L}x + 17}{6},$$

et

$$y''' = \frac{6\mathrm{L}x - 17}{x^4}.$$

2. Pour calculer $y^{(n)}$ nous multiplions les $n+1$ équations (1) respectivement par 1, $-x$, $+\frac{x^2}{2!}$, $-\frac{x^3}{3!}, \ldots (-1)^n\frac{x^n}{n!}$, et nous ajoutons membre à membre. Nous obtenons ainsi

$$(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n!}y^{(n)} = -\mathrm{L}x + \frac{5}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n},$$

ou

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}[-\mathrm{L}x + 1 + \mathrm{S}_n],$$

en posant

$$\mathrm{S}_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

3. La fonction y est définie pour toutes les valeurs positives de x. Sa dérivée $y' = \frac{x^2 + \mathrm{L}x - 2}{x^2}$ a le signe de son numérateur

$$\varphi(x) = x^2 + \mathrm{L}x - 2.$$

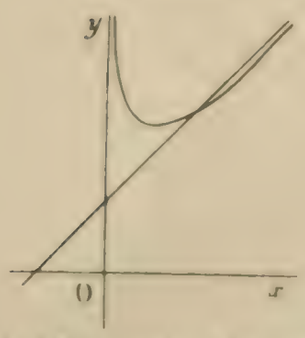
Comme $\varphi'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x}$ est toujours positif, la fonction $\varphi(x)$ est croissante; elle est négative pour $x = 1$, positive pour $x = 2$, donc elle admet une seule racine α comprise entre 1 et 2.

On voit facilement que la valeur de α à $\frac{1}{10}$ près est 1,3.

On en conclut que y' est négatif pour $x < \alpha$, et positif pour $x > \alpha$

x	0		α		$+\infty$
y'		$-$		$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	*min.*	$\nearrow$	$+\infty$

Pour $x=0$, le numérateur de y est infini positif, le dénominateur est nul, donc $y=+\infty$.



Pour $x=\alpha$, y prend une valeur positive, car $L\alpha=2-\alpha^2$, et

$$\frac{(1+\alpha)^2-L\alpha}{\alpha}=\frac{(1+\alpha)^2-2+\alpha^2}{\alpha}=\frac{2\alpha^2+2\alpha-1}{\alpha}=3,8\ldots$$

Enfin on peut écrire

$$y=x+2+\frac{1-Lx}{x};$$

quand x croît indéfiniment $\frac{1-Lx}{x}$ a pour limite zéro, par suite y augmente indéfiniment, et la branche de courbe correspondante est asymptote à la droite

$$Y=x+2.$$

De plus, on a

$$y-Y=\frac{1-Lx}{x}.$$

et ceci montre que, pour les valeurs de x plus petites que e, la courbe est au-dessus de l'asymptote, et pour les valeurs plus grandes, au-dessous. La courbe rencontre l'asymptote au point

$$x=e,\qquad y=e+2.$$

Remarquons enfin que la courbe admet un point d'inflexion qui a pour abscisse $e^{\frac{3}{2}}=12,18\ldots$.

L'aire demandée a pour valeur

$$S=\int_1^e y\,dx=\int_1^e\left(x+2+\frac{1}{x}-\frac{Lx}{x}\right)dx;$$

or, on a

$$\int\left(x+2+\frac{1}{x}-\frac{Lx}{x}\right)dx=\frac{x^2}{2}+2x+Lx-\frac{1}{2}(Lx)^2;$$

par suite,

$$S=\frac{e^2}{2}+2e+1-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}+2\right)$$

ou

$$S=\frac{e^2+4e-4}{2}=7,131\ldots$$

Henri JAPHET, collège Chaptal.

Bonnes solutions par MM Emile Dion; G. Lach, Mazet; M. Roux, Topin.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2241. — *Le lieu du point de concours de deux normales rectangulaires et le lieu du point de concours des normales aux extrémités de deux rayons vecteurs centraux et rectangulaires, pour une même ellipse, sont deux courbes fermées qui ont la même aire.*

Chacune d'elles a pour aire le double de l'aire de la podaire centrale de la développée de l'ellipse.

Soit AB la corde qui joint les pieds de deux normales rectangulaires. Appelons $P(\alpha, \beta)$ le pôle tangentiel de cette droite et $M(x, y)$ le pôle normal.

Les formules de Desboves nous donnent les nombres x et y en fonction des nombres α et β :

$$x=-\frac{c^2\alpha(\beta^2-b^2)}{a^2\beta^2+b^2\alpha^2},$$

$$y=\frac{c^2\beta(\alpha^2-a^2)}{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}.$$

D'autre part, le point (α, β) décrit le cercle orthoptique de l'ellipse,

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2,$$

et nous pouvons poser

$$\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}\cos\varphi, \qquad \beta = \sqrt{a^2 + b^2}\sin\varphi.$$

Les coordonnées x et y s'écrivent alors

$$x = \frac{c^2\cos\varphi}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi}{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi},$$

$$y = \frac{c^2\sin\varphi}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi}{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}.$$

La différentielle de l'aire, centrée au point O, est

$$dA = \frac{1}{2}(xdy - ydx) = \frac{x^2}{2}d\frac{y}{x};$$

or,

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi, \qquad d\frac{y}{x} = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi},$$

et

$$dA = \frac{c^2}{2(a^2+b^2)}\left(\frac{b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi}{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}\right)^2 d\varphi;$$

par suite,

$$A = \frac{4c^2}{2(a^2+b^2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi}{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}\right)^2 d\varphi.$$

Pour le second lieu, la droite AB, qui joint les extrémités de deux rayons rectangulaires, enveloppe un cercle concentrique à l'ellipse et de rayon $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$; son équation est

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0,$$

et son pôle a pour coordonnées

$$\alpha = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}\cos\varphi}{b}, \qquad \beta = \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a}\sin\varphi.$$

Les coordonnées du pôle normal correspondant sont données par les formules de Desboves et sont

$$x = \frac{c^2 b\cos\varphi}{a\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{a^2\cos^2\varphi - b^2\sin^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi},$$

$$y = \frac{c^2 a\sin\varphi}{b\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{a^2\cos^2\varphi - b^2\sin^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}.$$

La différentielle de l'aire de cette courbe, centrée au point O, est

$$dA' = \frac{1}{2}(xdy - ydx) = \frac{x^2}{2}d\frac{y}{x};$$

or

$$\frac{y}{x} = \frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}\varphi, \qquad d\frac{y}{x} = \frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

$$dA' = \frac{c^2}{2(a^2+b^2)}\left(\frac{a^2\cos^2\varphi - b^2\sin^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\right)^2 d\varphi;$$

par suite, l'aire A′ a pour expression

$$A' = \frac{4c^2}{2(a^2+b^2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(a^2\cos^2\varphi - b^2\sin^2\varphi)^2}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^2}d\varphi,$$

et il suffit de faire le changement de φ en $\frac{\pi}{2} - \varphi$ pour retrouver l'expression de A.

E. N. BARISIEN.

PHYSIQUE

2271. — *Un condensateur à lame d'air est formé de deux armatures planes parallèles d'un mètre carré de surface, distantes d'un centimètre. L'influence des bords est supposée négligeable. On établit entre les armatures une différence de potentiel de 3 000 volts.*

1° *Calculer la charge de chaque armature.*

2° *Calculer en grammes-poids la force qui s'exerce sur chacune d'elles.*

3° *Les armatures étant ainsi chargées et maintenues isolées, donc à charge constante, on les écarte de façon à porter leur distance à 10^{cm}. Quel est le travail qu'il a fallu dépenser et quelle est alors la différence de potentiel qui existe entre les armatures? Comparer ce travail à la variation d'énergie du condensateur.*

4° *Partant des mêmes conditions initiales, on fait de nouveau varier la distance de 1 à 10^{cm}, mais cette fois en maintenant constante la différence de potentiel (3 000 volts). Quel est dans ce cas le travail qu'il faut dépenser et quelle est la charge à la fin du déplacement? Comparer ce travail à la variation d'énergie du condensateur.*

5° *Les armatures étant distantes de 1^{cm}, portées à 3 000 volts et isolées, on remplace l'air par un diélectrique de pouvoir inducteur spécifique égal à 3. Que deviennent la différence de potentiel et les forces d'attraction?*

6° *On fait la même substitution, mais cette fois en maintenant invariable la différence de potentiel. Que deviennent alors les charges et les forces d'attraction? Un volt $= \frac{1}{300}$ d'unité électrostatique de différence de potentiel.*

(*École navale, concours de 1914.*)

1° La charge de chaque armature se calcule, en unités électrostatiques, par la formule $Q = \frac{S}{4\pi e} V$. Or 3 000 volts représentent 10 unités électrostatiques, donc

$$Q = \frac{10\,000}{4\pi \times 1} \times 10 = 7\,958 \text{ franklins} = \frac{7\,958}{3 \times 10^9} \text{ coulombs} = 2{,}653 \text{ microcoulombs.}$$

2° La force qui s'exerce sur chaque armature se calcule par la formule $f = 2\pi\mu^2 S$, où μ désigne la densité électrique. Or cette densité, en franklins par centimètre carré, est 0,7958, donc

$$f = 2\pi \times \overline{0{,}7958}^2 \times 10\,000 = 39\,790 \text{ dynes} = \frac{39\,790}{981} \text{ grammes-poids.}$$

$$f = 40^g{,}56.$$

3° Les armatures étant isolées, μ est constant ainsi que f. Le déplacement est de 9^{cm}, donc le travail est

$$w = 39\,790 \times 9 = 358\,110 \text{ ergs.}$$

ou bien

$$w = 0{,}04056 \times 0{,}09 = 0{,}00365 \text{ en kilogrammètres.}$$

La capacité du condensateur est devenue 10 fois plus petite; la charge n'ayant pas varié, la différence de potentiel est devenue 10 fois plus grande, c'est-à-dire 100 unités électrostatiques ou 30 000 volts.

L'énergie du condensateur est $\frac{1}{2}QV$; Q n'a pas changé, donc la variation d'énergie est $\frac{1}{2}Q\Delta V$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}7\,958 \times 90 = 358\,110 \text{ ergs.}$$

C'est précisément le travail dépensé dans le déplacement, résultat que l'on pouvait prévoir, puisque ce déplacement se faisait à charge constante.

4° Dans le second cas, la force n'est plus constante. On peut écrire

$$f = 2\pi\mu^2 S = 2\pi\frac{Q^2}{S} = \frac{SV^2}{8\pi e^2},$$

et le travail de cette force est

$$w' = \int_1^{10} f de = \frac{SV^2}{8\pi}\int_1^{10}\frac{de}{e^2} = \frac{SV^2}{8\pi}\left(-\frac{1}{e}\right)_1^{10} = \frac{9}{10}\frac{SV^2}{8\pi} = \frac{9}{10}39\,790 = 35\,811 \text{ ergs} = \frac{1}{10}w.$$

A la fin du déplacement, la capacité est devenue 10 fois plus petite, donc la charge aussi; cette charge finale est donc 795,8.

Le potentiel n'ayant pas changé, la variation d'énergie est $\frac{1}{2}V\Delta Q$, c'est-à-dire

$$-\frac{1}{2}V\times\frac{9}{10}Q = -\frac{1}{2}\times 10\times\frac{9}{10}\times 7\,958 = -35\,811 \text{ ergs}.$$

La variation d'énergie est négative; le travail dépensé et l'énergie perdue sont représentés par l'énergie restituée aux sources d'électricité qui maintiennent le potentiel constant.

5° Après l'introduction du diélectrique, la capacité se trouve multipliée par 5. Les charges restant les mêmes, la différence de potentiel est devenue 5 fois plus petite, c'est-à-dire égale à 600 volts.

Les forces d'attraction ont diminué dans le même rapport et sont devenues égales à $8^g,11$.

6° Quand la différence de potentiel est maintenue constante, les charges varient dans le même rapport que la capacité; elles deviennent donc 5 fois plus grandes.

D'autre part, la force d'attraction varie proportionnellement au carré de la charge et en raison inverse du pouvoir inducteur spécifique; elle devient donc finalement 5 fois plus grande.

André MALRAIT, lycée de Marseille.

SUJETS DE CONCOURS

ÉCOLE CENTRALE

Concours de 1920.

Géométrie analytique.

2417. — Les axes, Ox, Oy, étant rectangulaires, on considère la courbe C ayant pour équation en coordonnées polaires, d'origine O, d'axe polaire Ox,

$$\rho = a\sqrt{\sin 2\theta},$$

a étant une longueur donnée.

1° Tracer cette courbe, déterminer les tangentes parallèles aux axes Ox et Oy, et les tangentes parallèles aux bissectrices de ces axes.

2° On prend sur la courbe C un point variable M, défini par l'angle θ. Trouver l'équation cartésienne, par rapport aux axes Ox et Oy, de la perpendiculaire à OM menée par M, et les coordonnées, x et y, du point où cette perpendiculaire touche son enveloppe H. Donner l'équation de cette enveloppe en coordonnées cartésiennes, et son équation en coordonnées polaires. Tracer dans une même figure l'ensemble des courbes C et H.

N. B. — Les deux parties du problème sont indépendantes.

Mécanique.

2418. — I. Soient Ox et Oy deux axes de coordonnées rectangulaires, dont l'un, Oy, est vertical et a son sens positif contraire à celui de la pesanteur. Une barre rectiligne OM, homogène, indéformable, d'épaisseur négligeable, de longueur donnée l, et de poids donné P, est assujettie à tourner librement autour du point fixe O, origine des coordonnées, en restant dans le plan vertical xOy. Un point S de ce plan, de coordonnées positives données, α et β, attire l'extrémité M de la barre proportionnellement à la distance MS; l'attraction à l'unité de

distance a pour valeur $\frac{P}{2k}$, k étant une longueur donnée. On demande de calculer les coordonnées du point M pour chacune des positions d'équilibre de la barre OM.

II. — Soient Ox, Oy, Oz, trois axes de coordonnées rectangulaires, dont l'un, Oz, est vertical et a son sens positif contraire à celui de la pesanteur. La même barre que précédemment peut tourner librement, dans tout l'espace, autour de l'origine fixe O, et son extrémité M est attirée proportionnellement à la distance par trois points A, B, C, donnés respectivement sur Ox, Oy, Oz; pour chacun d'eux, l'attraction à l'unité de distance a pour valeur $\frac{P}{2k}$, k étant une longueur donnée ($\overline{OA} = a > 0$, $\overline{OB} = b > 0$, $\overline{OC} = c > 0$).

On demande de calculer les coordonnées du point M pour chacune des positions d'équilibre de la barre OM, et, pour chacune de ces positions, les composantes suivant les axes Ox, Oy, Oz, de la réaction R du point fixe O.

Trigonométrie, algèbre et analyse.

I. — **2419**. Calculer l'intégrale définie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{(3\sin^2 x + 4\sin x + 1)\sqrt{\sin x}}.$$

II. — **2420**. Dans un problème de physique, l'inconnue x est la plus petite racine de l'équation

$$g\left(t - \frac{x}{v}\right)^2 = 2x,$$

g, t et v étant des quantités positives données.

On demande de calculer cette racine en fonction des données, et de la développer en série ordonnée suivant les puissances entières, positives et croissantes de t. Calculer le terme général de cette série, et trouver la condition pour que cette série soit convergente.

En prenant $x_0 = \frac{1}{2}gt^2$ comme valeur approchée de x, trouver le signe de la différence $x - x_0$, et une limite supérieure de la valeur absolue de cette différence.

Calcul numérique.

Au moyen de la règle à calcul, calculer :

1° les nombres

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \qquad y = \sqrt{2 + x}, \qquad z = \sqrt{2 + y},$$

$$t = \frac{4\sqrt{2}}{x}, \qquad u = \frac{2t}{y}, \qquad v = \frac{2u}{z},$$

que l'on rencontre dans le calcul de π;

2° les angles A, B, C, et les côtés a et b d'un triangle, sachant que

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{22}{31}, \qquad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{21}{34}, \qquad c = 296,$$

$$A + B + C = 2 \text{ droits}, \qquad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

On vérifiera que

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{a + b - c}{a + b + c}.$$

Rassembler et souligner les résultats.

Épure.

2421 — Ni cadre, ni titres, ni flèches (sauf celle qui indique la direction des rayons lumineux). Aucun trait ne sera renforcé.

Les plans de projection existent et sont opaques (sol et mur).

La ligne de terre, $x\omega y$ (en noir), est le grand axe de la feuille; ω en est le centre.

$$\omega x = 25^{mm}, \qquad \omega z = 60^{mm}.$$

Dans le plan horizontal de cote 0 est un premier cercle de rayon 60^{mm}.

Dans le plan de cote 15^{mm} est un deuxième cercle de rayon 25^{mm}.

Dans le plan de cote 70^{mm} est un troisième cercle de rayon 45^{mm}.

Les centres de ces trois cercles sont sur la verticale (z, z').

Un hyperboloïde de révolution est défini par son cercle de gorge, qui est le deuxième cercle, et par un parallèle, qui est le premier cercle.

Cet hyperboloïde, limité aux plans de cotes 0 et 45^{mm}, est supposé plein et opaque.

Un ellipsoïde de révolution est défini par son équateur, qui est le troisième cercle, et par un parallèle, qui est le deuxième cercle; il est réduit à sa surface supposée opaque, et est limité aux plans de cotes 45^{mm} et 70^{mm}.

On demande les projections de cet ensemble.

On déterminera ensuite les ombres propres et portées, les rayons lumineux étant parallèles à la frontale (L, L'); tous les contours d'ombre existants, vus ou cachés, doivent être tracés.

Nota. — Le résultat seul à l'encre noire : lignes vues en traits pleins, lignes cachées en points ronds. Tout le reste à l'encre rouge.

Détermination d'un point de la courbe d'ombre portée sur l'hyperboloïde, et de la tangente (en rouge) en ce point.

On mettra des hachures distantes de 3^{mm} environ sur les ombres vues, au crayon, si l'on veut, mais avec beaucoup de soin; directions différentes pour surfaces différentes [pas de teintes de lavis, pas de liserés ou amorces].

Physique.

I. — **2422.** On veut vérifier, à l'aide du calorimètre à glace de Bunsen, la valeur de la chaleur spécifique d'un liquide, trouvée, par une autre méthode, égale à 0,64. A cet effet, on introduit 2^g du liquide dans une ampoule de verre dont la masse est également de 2^g, et qu'on scelle sans perte de matière: ayant porté cette ampoule à la température de 60 degrés, on la laisse tomber dans le moufle du calorimètre supposé prêt pour la mesure.

1° Rappeler la méthode de mesure des quantités de chaleur à l'aide du calorimètre de Bunsen.

2° Décrire sommairement cet appareil (avec figure).

3° Indiquer les opérations qui ont été nécessaires pour mettre l'appareil en état de fonctionnement.

4° Sachant que la section circulaire du tube cylindrique calibré du calorimètre a un diamètre de 1^{mm}, calculer le déplacement que doit subir le ménisque du mercure dans ce tube, quand on laisse tomber dans le moufle l'ampoule à 60 degrés; quelle correction doit-on apporter à la mesure expérimentale du déplacement, effectuée en vue de la vérification du résultat du calcul?

Densité de la glace à 0° : 0,917; densité de l'eau à 0° : 1,000; chaleur latente de fusion de la glace : 79,7 calories; chaleur spécifique du verre : 0,200.

II. — **2423.** Un système optique centré est constitué par deux lentilles L et L', identiques, d'épaisseur négligeable, plan-convexes, de même longueur focale égale à 5^{cm}. Les faces planes des deux lentilles se font vis-à-vis; elles sont parallèles et distantes l'une de l'autre de 5^{cm}.

1° Trouver les foyers et les plans principaux du système optique constitué par les deux lentilles; quelle est sa convergence?

2° Une droite AB, perpendiculaire à l'axe du système, est placée sur cet axe, à 10^{cm} à gauche de la première lentille, L. Trouver la position et la grandeur de l'image A_1B_1 fournie par les rayons issus de AB, et qui ont traversé directement tout le système optique; tracer la marche *réelle* d'un faisceau de rayons issu du point A de l'objet.

3° Trouver les positions et les grandeurs de toutes les images réelles de l'objet AB, formées par les rayons qui, issus de AB, et ayant traversé la première lentille, L, subissent un certain nombre de réflexions sur les deux faces planes en regard, avant de traverser la deuxième lentille, L'. Ces images réelles, qu'on appellera $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$, ..., $\alpha_n\beta_n$, ..., sont à distance finie, à droite de la lentille L' dans la figure. On ne tiendra compte, ni dans cette question, ni dans la suivante des réflexions possibles sur les faces sphériques.

4° Les faces planes sont semi-argentées de telle manière qu'un faisceau lumineux quelconque X tombant sur l'une de ces faces planes fournisse un faisceau réfléchi et un faisceau réfracté ayant tous deux une intensité égale à la moitié de celle du faisceau X considéré. En admettant que les faces planes des lentilles peuvent être considérées comme étant de dimensions infinies par rapport à la section du faisceau incident issu de AB, exprimer par des nombres les valeurs relatives des quantités de lumière formant chaque image $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$, etc., en prenant comme unité celle qui forme l'image A_1B_1. Comment se transforme la loi numérique précédente si l'on tient compte des dimensions finies des lentilles par rapport au faisceau incident issu de AB et si l'on suppose que celui-ci couvre toute la surface de la première lentille, L? Expliquer pourquoi, dans le cas habituel où les faces planes ne sont pas semi-argentées, les images $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$, etc., sont pratiquement invisibles.

N. B. — Les considérations tirées de la marche des rayons aideront à la solution de ces diverses questions, et les calculs seront courts si les formules sont bien choisies.

Chimie.

I. — Parmi les composés du soufre qui sont dans le programme, nous considérerons : l'acide sulfhydrique, l'acide hyposulfureux, l'anhydride sulfureux, l'anhydride sulfurique, l'acide sulfurique. On préparera chacun de ces corps à partir du soufre, soit directement, soit par l'intermédiaire des composés convenables. On ne donnera pour chacun des corps qu'*une seule* préparation, choisie s'il est possible parmi celles qui sont réellement employées au laboratoire ou dans l'industrie, et sans insister sur les appareils mis en œuvre.

II. — **2424.** *1re opération :* Une solution arsénieuse (acide arsénieux ou arsénite), contenant 1g d'arsenic, est acidulée par l'acide chlorhydrique, puis traitée par un excès d'acide sulfhydrique. Le précipité obtenu pèse p_1 grammes. **Expliquez l'opération et calculez p_1.**

2e opération : Une solution arsénieuse contenant 1g d'arsenic, acidulée par l'acide sulfurique, est électrolysée. L'électrolyse dégage à la cathode un certain composé gazeux de l'arsenic contenant tout l'arsenic de la solution. On fait arriver ce composé gazeux dans une solution d'iode sur laquelle il réagit, et il disparaît ainsi p_2 grammes d'iode. **Expliquez l'opération et calculez p_2.**

3e opération : La solution arsenicale ainsi obtenue, supposée débarrassée de l'iode en excès et du composé de l'iode qui a pu se former, est traitée par la mixture magnésienne $Cl^2Mg, ClAzH^4, AzH^3$. Un précipité se forme. Après calcination à 900° il pèse p_3 grammes. **Expliquez l'opération et calculez p_3.**

N. B. — On n'entend pas que vous donniez des détails sur les appareils et les expériences réalisées, mais **seulement sur la théorie et les formules des expériences.**

Chaque candidat reçoit un tableau des poids atomiques.

QUESTIONS PROPOSÉES

2425. — Pour faire l'analyse d'un sel de baryum correspondant à un acide du soufre, on fait d'abord l'essai d'une eau de chlore avec une liqueur contenant $\frac{1}{40}$ de molécule d'anhydride arsénieux As^2O^3 par litre. Ayant pris 10^{cm^3} de cette liqueur arsénieuse colorée avec une goutte d'indigo, on trouve qu'il faut verser $3^{cm^3}\frac{1}{3}$ **d'eau de chlore pour décolorer l'indigo.**

On prend d'autre part un litre de la même eau de chlore et on y verse la dissolution d'une certaine quantité du sel de baryum. Il se produit un précipité pesant $3^g,5$ de sulfate de baryum. On additionne de baryte la liqueur séparée de ce premier précipité, ce qui détermine un second précipité de nature identique et pesant $10^g,5$.

Enfin on répète sur la nouvelle liqueur l'essai fait avec l'eau de chlore primitive et on trouve qu'il en faut verser $11^{cm^3},1$ dans 10^{cm^3} de liqueur arsénieuse pour décolorer l'indigo ajouté à celle-ci.

Déterminer la formule du sel de baryum.

$H = 1$, $O = 16$, $Cl = 35,5$, $As = 75$, $Ba = 137$.

CH. R.

2426. — Une tige mince et légère AOA' de longueur 2l (environ 2 mètres) porte à ses extrémités des boules A et A' de même masse *m*. Elle est suspendue horizontalement à un long fil de torsion vertical attaché en son milieu O. Légèrement écartée de sa position d'équilibre, elle exécute de part et d'autre de cette position des oscillations simples dont la durée est de 7 minutes.

Sur la circonférence horizontale de rayon OA, on dispose ensuite deux grosses boules de plomb diamétralement opposées, C et C' ; les distances AC et A'C', comptées entre les centres des boules, sont égales à 21^{cm}, et on peut confondre les arcs et les cordes. Les boules A et A' se rapprochent des boules C et C' et la tige oscille autour d'une nouvelle position d'équilibre BB' telle que les distances BC et B'C' ne soient plus que de 20^{cm}.

Calculer la durée des nouvelles oscillations.

CH. R.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

Coulommiers. — Imprimerie PAUL BRODARD.

30e Année. Août 1920. N° 11.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE

Concours de 1914.

Groupe I.

2258. — *On donne entre les deux nombres complexes z et Z la relation*

$$z^2 + Z^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

dont on propose de faire l'étude. Dans ce but, on pose

$$\begin{cases} z = x + iy, \\ Z = X + iY, \end{cases} \tag{2}$$

les variables x, y, X, Y étant essentiellement réelles. On considère dans un plan (p) deux axes rectangulaires ox, oy et on représente z par le point m dont les coordonnées sont x et y; de même, dans un autre plan (P), on considère deux axes rectangulaires OX, OY et on représente Z par le point M de coordonnées X, Y. La relation (1) peut alors être regardée comme établissant une correspondance entre m et M : si dans cette relation (1) on remplace z et Z par les expressions (2) et si l'on égale à zéro séparément la partie réelle et le coefficient de i, on obtient deux équations réelles entre x, y, X, Y, qui définissent aussi cette correspondance.

1° *Le point m étant donné, combien y a-t-il de positions pour le point M? Le résultat obtenu comporte-t-il des exceptions? Soit M_1 l'un des points M qui correspondent à un point donné m; si un point m' tend vers m, l'un des points M' qui correspondent à m' tend vers M_1; on exprimera ce fait en disant que la correspondance entre m et M est continue.*

2° *Le point m décrivant une courbe (c), les points correspondants M décrivent des courbes dont l'ensemble sera désigné par (C); on demande de construire (C) lorsque (c) est une droite parallèle à l'un des axes. On désignera par (A) les courbes (C) qui correspondent aux droites $x = a$ et par (B) les courbes (C) qui correspondent aux droites $y = b$ et l'on étudiera les formes des courbes (A) et (B) suivant les diverses valeurs des constantes réelles a et b; on vérifiera que la continuité définie au 1° a bien lieu.*

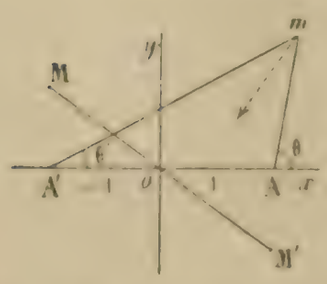
3° *Démontrer que les courbes (A) et (B) se coupent à angle droit en l'un quelconque de leurs points d'intersection.*

4° *Étant donnés un point m et l'un des points correspondants M, aux diverses courbes (c) passant par m correspondent des courbes (C) passant par M. Étant donnés les coordonnées de m et le coefficient angulaire de la tangente à une courbe (c), calculer le coefficient angulaire de la tangente à la courbe (C) correspondante; montrer que l'angle de deux courbes (C) est égal à l'angle des courbes correspondantes (c). Existe-t-il des positions très particulières du point m pour lesquelles cette égalité des angles n'a pas lieu et que se produit-il alors?*

5° On donne dans le plan (p) un rectangle efgh dont les côtés sont parallèles aux axes et l'on désigne par E *celui des points correspondants à e dont l'ordonnée* Y *est positive. On considère un point m coïncidant d'abord avec e et décrivant ensuite d'une manière continue le contour du rectangle efgh; quel est le chemin continu décrit dans le plan* (P) *par le point correspondant* M, *supposé coïncidant d'abord avec* E? *On étudiera les cas suivants : α) les côtés du rectangle ont pour équations* $x=\frac{1}{2}$, $x=2$; $y=1$, $y=2$; *β) le côté* $y=2$ *est remplacé par* $y=-2$; *γ) de plus, le côté* $x=\frac{1}{2}$ *est remplacé par* $x=-3$. *Le point e sera dans tous les cas le sommet du rectangle dont l'abscisse et l'ordonnée sont les plus grandes. Peut-on, de l'étude de ces cas particuliers, déduire une règle générale permettant de reconnaître dans quels cas le contour qui correspond au contour du rectangle donné efgh est un contour ouvert ou fermé? On supposera que les côtés du rectangle donné ne passent pas par les points exceptionnels signalés à la fin du 4°.*

6° Peut-il arriver que, la courbe (c) étant une conique, la courbe correspondante (C) *soit aussi une conique? Indiquer des cas assez généraux où il en est ainsi, sans s'astreindre à démontrer rigoureusement* ***que l'on obtient tous les cas possibles.***

1° Tantôt nous supposerons les deux plans (*p*) et (P) distincts, tantôt nous les supposerons confondus. Cela ne peut présenter aucun inconvénient.



La relation donnée nous permet de calculer Z de plusieurs façons quand z est donné. Elle peut d'abord s'écrire $Z^2=1-z^2$, et montre que Z s'obtient par l'extraction d'une racine carrée d'imaginaire. Le nombre Z a donc, pour chaque valeur de z, deux valeurs égales et de signes contraires : il y a deux points M, M et M', symétriques par rapport au point O, qui correspondent à chaque point m du plan (*p*).

Remplaçons maintenant dans la relation donnée z par $x+iy$ et Z par $X+iY$, annulons la partie réelle et la partie imaginaire séparément; nous aurons

$$X^2-Y^2+x^2-y^2-1=0,$$

$$XY+xy=0;$$

ces deux équations définissent la transformation. Supposons le point m donné, c'est-à-dire les deux nombres réels x et y donnés; alors les deux équations représentent deux hyperboles équilatères ayant pour centre commun l'origine des coordonnées; les cordes communes qui passent en ce point ont pour équation quadratique

$$xy(X^2-Y^2)-(x^2-y^2-1)XY=0;$$

c'est une équation du second degré en $\frac{Y}{X}$, qui admet une racine positive, m, et une racine négative, m'; une seule des droites $Y=mX$, $Y=m'X$ est donc dans l'angle des axes où se trouve l'hyperbole $XY=-xy$; elle rencontre cette hyperbole en deux points réels, symétriques par rapport au point o, et cela nous montre encore qu'il y a deux points M qui correspondent à chaque point m.

Enfin, écrivons Z^2 ainsi :

$$Z^2=-(z^2-1)=(-1)(z-1)(z+1);$$

le nombre $z-1$ est représenté par le vecteur Am; le nombre $z+1$, par le vecteur $A'm$; les deux

points A et A′ sont les deux points de ox qui représentent les nombres $+1$ et -1. Posons alors $AM = r$, $(Ax, Am) = \theta$, et, de même, $A'm = r'$, $(A'x, A'm) = \theta'$; nous aurons

$$z - 1 = r(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad z + 1 = r'(\cos\theta' + i\sin\theta'),$$

et

$$Z^2 = rr'[\cos(\theta + \theta' + \pi) + i\sin(\theta + \theta' + \pi)].$$

Le nombre Z a donc deux valeurs qui sont données par la formule

$$Z = \sqrt{rr'}\left[\cos\left(\frac{\theta + \theta' + \pi}{2} + k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta + \theta' + \pi}{2} + k\pi\right)\right],$$

dans laquelle k prend les deux valeurs 0 et 1. Pour construire ces deux points, nous remarquons que la bissectrice intérieure de l'angle AmA', parcourue de ox vers le point m, fait avec ox l'angle $\frac{\theta + \theta'}{2}$; il suffit donc de faire tourner cette direction d'un angle droit autour du point o et de porter sur la droite ainsi obtenue de part et d'autre du point o, deux longueurs oM et oM' égales à $\sqrt{rr'}$.

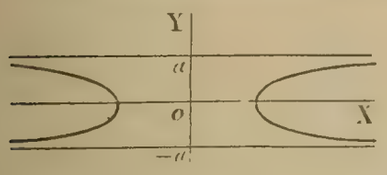
Ceci montre que la droite MM′ traverse les angles des axes dont aucun ne contient le point m, résultat évident d'ailleurs par la seconde méthode de détermination, qui nous a fait voir que les points M et M′ sont sur l'hyperbole équilatère $XY = -xy$, dont aucune branche n'est évidemment dans l'angle des axes qui contient le point (x, y).

Ce dernier mode de calcul de Z met bien encore en relief la continuité de la transformation : il est clair que si r, r', θ et θ' varient d'une manière continue, le nombre Z varie aussi d'une manière continue. Les deux relations réelles entre X, Y, x et y, mettent aussi ce fait en relief d'une façon claire.

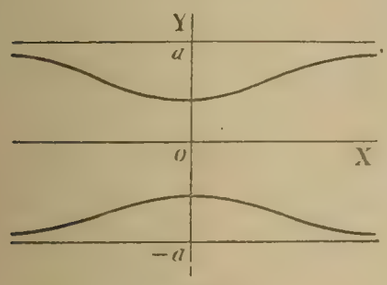
2° Quand le point m décrit une courbe (c) d'équation $f(x, y) = 0$, le point M décrit une courbe correspondante (C) dont l'équation s'obtient en éliminant x et y entre l'équation $f(x, y) = 0$ et les deux équations de transformation.

Prenons par exemple, pour (c), la droite $x = a$; les deux équations qui relient les coordonnées des points M et m s'écrivent

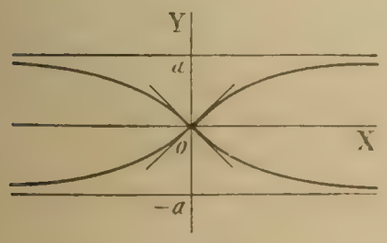
$$X^2 - Y^2 + a^2 - 1 - y^2 = 0,$$
$$XY + ay = 0;$$



$|a| < 1.$



$|a| > 1.$



$|a| = 1.$

il n'y a plus qu'à éliminer y entre elles pour avoir la courbe (A) qui correspond à la droite $x = a$. Cette courbe a pour équation

$$A \equiv X^2Y^2 - a^2(X^2 - Y^2) - a^2(a^2 - 1) = 0.$$

Nous voyons qu'elle est du quatrième degré, qu'elle a deux asymptotes parallèles à oX, $Y = \pm a$, qu'elle rencontre oX, si $|a|$ est plus petit que 1, et oY si $|a|$ est plus grand que 1. Il y a donc deux types de courbes A représentées par les figures ci-contre et une courbe intermédiaire, qui correspond au cas de $|a| = 1$; celle-ci a un point double à l'origine et les tangentes en ce point sont les bissectrices de l'angle des axes. Il est permis d'ailleurs de supposer a positif, puisque a^2 intervient seul.

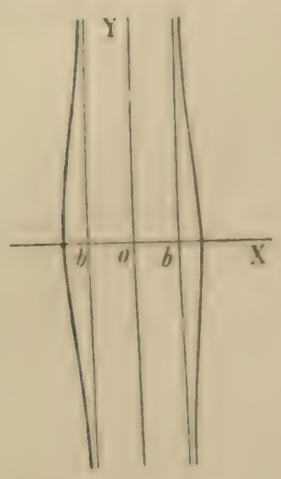
Prenons maintenant pour ligne (c) la droite $y = b$; les équations de transformation deviennent

$$X^2 - Y^2 + x^2 - 1 - b^2 = 0,$$
$$XY + bx = 0;$$

il n'y a plus qu'à éliminer x entre ces deux équations pour avoir la courbe (B) qui correspond à la droite $y = b$. Ce calcul donne

$$B \equiv X^2Y^2 + b^2(X^2 - Y^2) - b^2(1 + b^2) = 0.$$

Comme la courbe (A), cette courbe est du quatrième ordre et est symétrique par rapport aux deux axes : elle a cette fois deux asymptotes parallèles à oY, les droites $X = \pm b$; elle a deux sommets réels situés sur oX, ayant pour abscisses $\pm\sqrt{1+b^2}$, et situés au delà des deux asymptotes. Toutes ces courbes (B), quand b varie, ont des formes semblables, indiquées par la figure ci-dessous.



3° Pour vérifier que ces deux systèmes de lignes sont orthogonales, il suffit d'écrire qu'en un point commun (X, Y), les tangentes sont rectangulaires. Ceci donne

$$f'_X g'_X + f'_Y g'_Y = 0,$$

$$(XY^2 - a^2X)(XY^2 + b^2X) + (X^2Y + a^2Y)(X^2Y - b^2Y) = 0,$$

$$X^2(Y^2 - a^2)(Y^2 + b^2) + Y^2(X^2 + a^2)(X^2 - b^2) = 0;$$

finalement ceci s'écrit

$$X^2Y^2(X^2 + Y^2) - a^2b^2(X^2 + Y^2) = 0.$$

Enlevons le facteur $X^2 + Y^2$, il reste

$$X^2Y^2 - a^2b^2 = 0,$$

relation qui est vérifiée, puisque le point (X, Y), qui correspond au point a, b est sur l'hyperbole équilatère $XY = -ab$.

D'ailleurs la relation que nous venons de trouver dérive très simplement des équations A et B : il suffit de diviser la première par a^2, la seconde, par b^2, et de les ajouter ; nous trouvons ainsi

$$X^2Y^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) - a^2 - b^2 = 0,$$

ce qui donne, après multiplication par a^2b^2 et division par $a^2 + b^2$,

$$X^2Y^2 - a^2b^2 = 0.$$

4° Différentions la relation donnée ; nous aurons

$$ZdZ + zdz = 0,$$

ou

$$(X + iY)(dX + idY) + (x + iy)(dx + idy) = 0.$$

Cette équation se décompose en deux :

$$XdX - YdY + xdx - ydy = 0,$$

$$XdY + YdX + xdy + ydx = 0,$$

qui proviennent tout aussi bien de la différentiation des deux équations de transformation. Nous déduisons de là, par division,

$$\frac{XdY + YdX}{XdX - YdY} = \frac{xdy + ydx}{xdx - ydy}.$$

Le coefficient angulaire de la courbe (c) est $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} u$; celui de la courbe correspondante (C) $\frac{dY}{dX} = \operatorname{tg} U$. Posons alors $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} a$, $\frac{Y}{X} = \operatorname{tg} A$; nous aurons

$$\frac{\operatorname{tg} U - \operatorname{tg} A}{1 - \operatorname{tg} U \operatorname{tg} A} = \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} u \operatorname{tg} a},$$

et ceci nous donne

$$\operatorname{tg}(U - A) = \operatorname{tg}(u + a),$$

$$U - A = u + a + k\pi,$$

$$U - u = \text{Cte}.$$

Ceci montre bien que l'angle de deux courbes (C) qui passent au point (X, Y) est égal à l'angle de deux courbes (c) qui passent au point (x, y).

La propriété de deux courbes A et B d'être orthogonales dérive de là.

Pour calculer le coefficient angulaire de la courbe (C), ainsi qu'il est demandé, il suffit de tirer tg U de l'équation précédente.

Pour voir s'il y a des points exceptionnels, il suffit de revenir à l'équation initiale

$$\frac{XdY + YdX}{XdX - YdY} = \frac{xdy + ydx}{xdx - ydy};$$

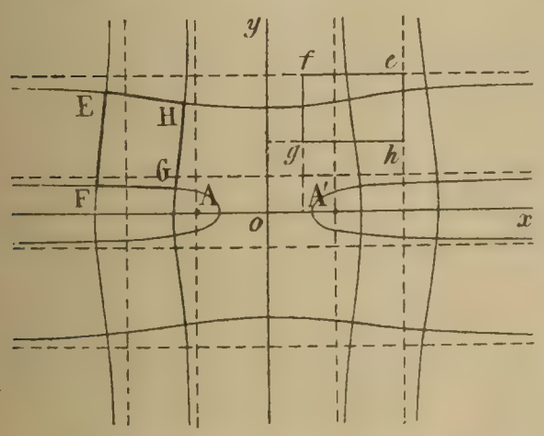
on voit de suite qu'elle n'a plus de sens quand X et Y sont nuls, ou quand x et y sont nuls.

Bornons-nous à étudier le cas où X et Y sont nuls; ceci est suffisant, parce que la transformation est réversible. D'après les formules de transformation, pour que X et Y soient nuls, il faut et il suffit que $x = \pm 1$, $y = 0$; c'est-à-dire que le point m vienne en l'un des deux points critiques, A et A'. Lorsque m tend vers A, θ' tend vers 0 et θ représente à la limite l'angle que la courbe (c) (qui passe au point A) fait avec ox; l'angle correspondant de OM, qui est, à la limite, l'angle de la tangente à la courbe (C) avec ox, est donné par $\omega = \frac{\theta + \pi}{2}$ ou $\omega = \frac{\theta + \pi}{2} + \pi$; ses variations sont les moitiés des variations de θ : nous avons $d\omega = \frac{d\theta}{2}$; par conséquent, l'angle des deux tangentes à deux courbes (C) est la moitié de l'angle des tangentes aux courbes (c) correspondantes. Même chose pour le point A'.

5° Quand le point m parcourt un contour fermé, tel que les deux points A et A' restent en dehors, la somme algébrique des variations de θ et de θ' est nulle; la somme des variations de $\omega = \frac{\theta + \theta' + \pi}{2}$ ou $\frac{\theta + \theta' + \pi}{2} + \pi$ est aussi nulle; le point M revient finalement au point de départ, il décrit un contour fermé.

Si le contour décrit par le point m est fermé et enveloppe un seul des points A ou A', l'angle ω augmente de π (nous supposons le contour parcouru dans le sens direct) et le point M arrive finalement à la position M', symétrique de M par rapport au point o. Le contour décrit par le point M n'est pas fermé.

Il est aisé de poursuivre ces observations si le contour décrit par le point m entoure une fois chacun des points A et A', ω augmente de 2π, et le contour décrit par le point M est fermé. Et ainsi de suite.



Figurons alors le rectangle $efgh$ dont les côtés ont pour abscisses $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$, et, pour ordonnées,

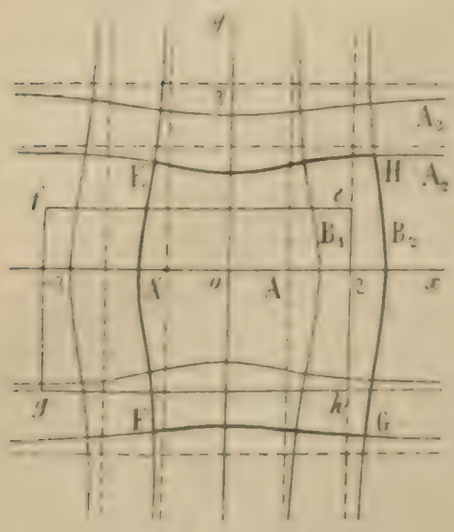
$$y = 1, \qquad y = 2.$$

Traçons aussi les deux courbes A et les deux courbes B qui correspondent à ces droites, et prenons pour point E le point de rencontre des deux courbes A_2, B_2, qui est dans le second angle des axes. Quand le point m parcourt le côté ef, le point M tourne autour de o dans le sens direct et décrit l'arc EF de la courbe B_2.

Il est facile d'achever et de voir que le point M parcourt le quadrilatère curviligne EFGH, quand le point m parcourt le rectangle $efgh$.

Dans le second cas, le rectangle $efgh$ entoure le point A, et le contour EFGHE' est ouvert et se termine au point E', symétrique de E par rapport au point O.

Dans le troisième cas, le contour est fermé de nouveau. Voici la figure relative à ce cas :



6° D'après les formules de transformation, il est évident que si le point m décrit l'hyperbole équilatère

$$x^2 - y^2 = k,$$

le point M décrit l'hyperbole équilatère

$$X^2 - Y^2 = 1 - k;$$

que, de même, quand le point m décrit l'hyperbole équilatère $xy = k$, le point M décrit l'hyperbole équilatère $XY = -k$.

Voilà deux cas déjà où à une conique (c) correspond une conique (C). Il en est de même encore quand le point m décrit une hyperbole équilatère quelconque ayant son centre au point O; car, une pareille hyperbole a pour équation

$$x^2 - y^2 + \lambda xy = \mu,$$

et admet pour transformée $\qquad X^2 - Y^2 - 1 + \lambda XY = -\mu.$

Il existe encore un cas intéressant que nous devons signaler : c'est le cas où le point m décrit une ellipse ayant pour foyers les points A et A'; la bissectrice intérieure des rayons Am et A'm est alors la normale à cette ellipse; le rayon oM, qui lui est perpendiculaire, est porté par le diamètre conjugué du rayon om, et, comme le carré de la longueur de ce demi-diamètre conjugué est égal à rr', nous voyons que le point M décrit la même ellipse que le point m; le point M est une extrémité du diamètre conjugué de om.

C. R., zone des Armées, 22 février 1915.

Bonnes solutions : MM. L. Simon, à Fourmies; A. Malrait, élève au lycée de Marseille.
Assez bonne solution : M. J. Delage, lycée Carnot.

2259. — *Dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, *construire la courbe représentée paramétriquement par les équations*

$$(1) \qquad x^2 = 1 + a\cos t, \qquad y^2 = 1 + a\sin t,$$

où a désigne une quantité donnée et t une variable.

Déterminer les points de contact de la courbe précédente avec les tangentes parallèles aux axes de coordonnées et avec les tangentes issues de l'origine; indiquer les lieux géométriques de ces points quand a varie.

Trouver les trajectoires orthogonales des courbes (1) *lorsque a varie.*

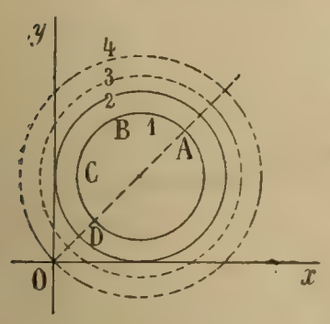
Les fonctions $\qquad x^2 = 1 + a\cos t, \qquad y^2 = 1 + a\sin t$

sont périodiques et ont pour période commune 2π; il suffit donc de faire varier t dans un intervalle d'étendue 2π. Or, si nous changeons t en $\frac{\pi}{2} - t$, x^2 et y^2 s'échangent l'un dans l'autre; la courbe est symétrique par rapport aux deux bissectrices de l'angle des axes; comme elle est aussi symétrique par rapport aux deux axes, il suffira de construire une moitié de la portion qui est dans le premier angle des axes. Cette moitié s'obtient en faisant varier t de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{5\pi}{4}$; car alors $\frac{\pi}{2} - t$ varie en sens inverse de $\frac{\pi}{4}$ à $-\frac{3\pi}{4}$ et les deux valeurs associées de t décrivent ainsi un intervalle continu d'étendue 2π, l'intervalle $\left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$.

Dans ces conditions, les valeurs acceptables pour x^2 et y^2 sont les valeurs positives. Posons alors $x^2 = X$, $y^2 = Y$ et voyons le lieu décrit par le point (X, Y) associé au point (x, y); ce lieu est le cercle

$$X = 1 + a\cos t, \qquad Y = 1 + a\sin t, \qquad (X-1)^2 + (Y-1)^2 = a^2;$$

c'est un cercle ayant pour centre le point (1,1), et pour rayon a. Les seuls points de ce cercle qui sont à garder sont ceux qui ont des coordonnées positives, c'est-à-dire qui sont situés dans le premier angle des axes.



Plusieurs cas sont à distinguer suivant que a est plus petit que 1, égal à 1, compris entre 1 et $\sqrt{2}$, égal à $\sqrt{2}$ ou plus grand que $\sqrt{2}$.

Quand a est plus petit que 1, le cercle tout entier est dans le premier angle des axes, tous ses points ont leurs coordonnées positives et sont bons Quand t varie de $\frac{\pi}{4}$ $\frac{5\pi}{4}$, le point du cercle parcourt la demi-circonférenc (ABCD tout entière, et le point (x, y) parcourt la moitié d'un ovale placé d'une façon semblable. La courbe se compose de quatre ovales placés comme l'indique la figure 1. Les points A′, B′, C′, D′ correspondent aux points A, B, C, D.

Quand a est égal à 1, le cercle auxiliaire est tangent aux axes de coordonnées, tous ses points sont encore bons; mais c'est un cas intermédiaire, et la courbe se décompose en deux ellipses comme le montre facilement l'équation

$$(x^2-1)^2 + (y^2-1)^2 - 1 = 0,$$

qui peut s'écrire

$$x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 1 = 0;$$

car si nous ajoutons et si nous retranchons $2x^2y^2$, nous obtenons

$$(x^2 + y^2 - 1)^2 - 2x^2y^2 = 0,$$

qui se décompose en

$$x^2 + y^2 + xy\sqrt{2} - 1 = 0$$

et

$$x^2 + y^2 - xy\sqrt{2} - 1 = 0.$$

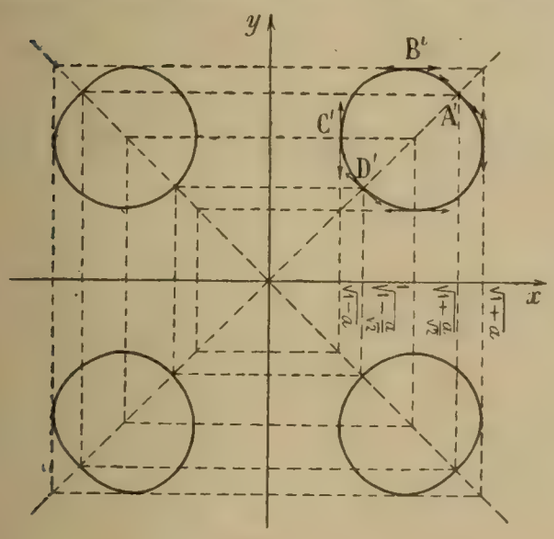


Fig. 1.

Ces équations représentent deux ellipses symétriques par rapport aux deux bissectrices (fig. 2).

Quand a est compris entre 1 et $\sqrt{2}$, le cercle auxiliaire coupe les deux axes. De la demi-circonférence analogue à ABCD, un arc doit être enlevé, celui qui passe à gauche de Oy; les deux arcs restants sont bons. Le premier part du point situé sur la première bissectrice et va jusqu'à Oy; le point correspondant décrit l'arc A′B′H′ (fig. 3), qui devra être complété par symétrie. Le second arc utile, qui se termine au point D, donne l'arc K′D′, qui est le huitième d'un ovale, se complétant par symétrie. La courbe totale ici se compose de deux courbes fermées, intérieures l'une à l'autre.

Quand a atteint la valeur $\sqrt{2}$, le cercle auxiliaire passe à l'origine; l'ovale intérieur devient nul et disparaît; il ne reste plus que la courbe extérieure, qui conserve d'ailleurs ses sinuosités (fig. 4).

Quand a est plus grand que $\sqrt{2}$, le cercle ne passe plus à l'origine, même algébriquement; mais la forme demeure la même et ne change plus (fig. 5).

En prenant les dérivées de x^2 et de y^2, il est facile de vérifier que les tangentes aux points situés sur les bissectrices sont perpendiculaires à ces bissectrices, que les tangentes aux points situés sur les droites $x = \pm 1$ sont horizontales et que les tangentes aux points situés sur les droites $y = \pm 1$

sont parallèles à Oy. La discussion directe de chacune des fonctions x et y pourrait d'ailleurs se faire sans difficulté; mais il est plus commode de se servir du cercle auxiliaire, qui montre nettement les

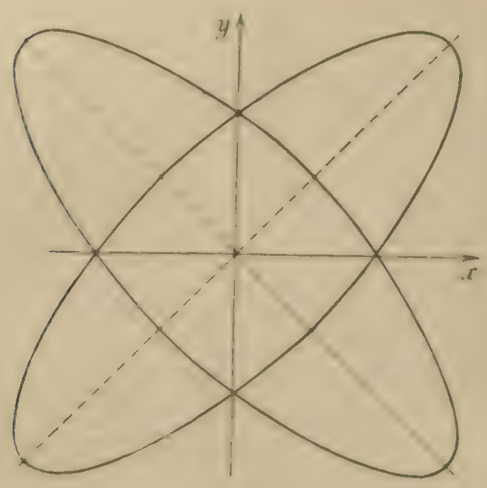


Fig. 2.

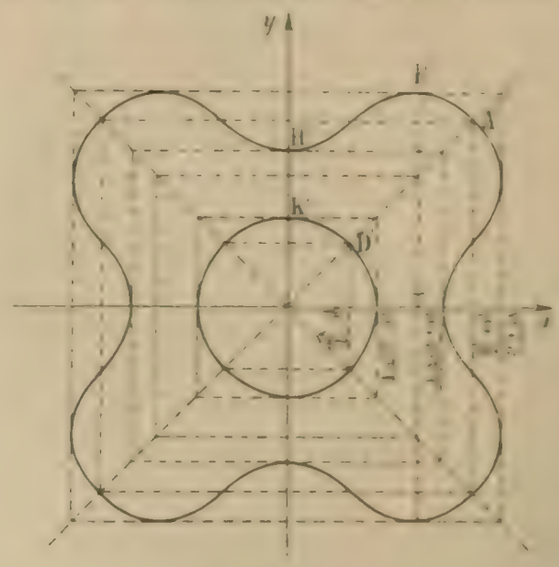


Fig. 3.

intervalles utiles et qui donne le sens des variations de X et de Y, et, par suite, de x et de y, puisque ces deux nombres sont les déterminations positives de $\sqrt{X}$ et $\sqrt{Y}$.

Les lieux géométriques des points où les tangentes sont parallèles aux axes sont les axes eux-mêmes et les droites $x = \pm 1$, $y = \pm 1$.

Pour avoir le lieu des points où les tangentes vont passer à l'origine, il faut écrire que $\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$,

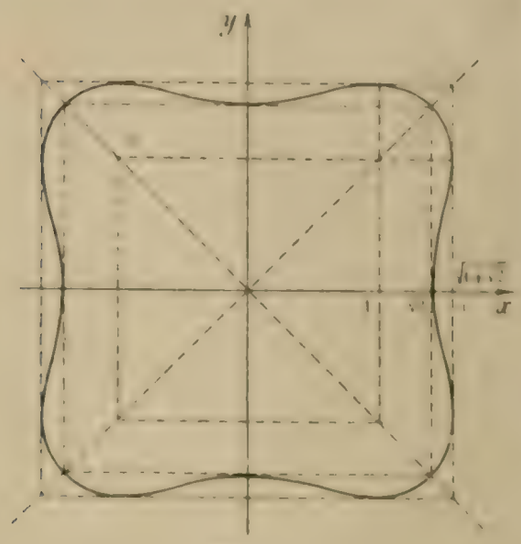


Fig. 4.

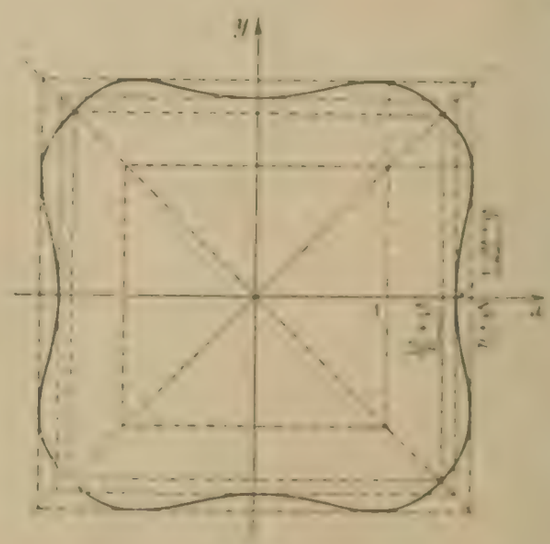


Fig. 5.

ou $xy' - yx' = 0$. Ceci se remplace par $D\frac{y}{x} = 0$; or $D\left(\frac{y}{x}\right)^2$ est égal à $2\frac{y}{x}\,D\frac{y}{x}$, et, en écartant le cas où $\frac{y}{x}$ est nul, c'est-à-dire l'axe des x, il reste $D\frac{y}{x} = 0$. D'autre part, nous avons

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{1 + a\sin t}{1 + a\cos t},$$

$$D\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{a\cos t(1 + a\cos t) + a\sin t(1 + a\sin t)}{(1 + a\cos t)^2};$$

le numérateur, annulé, donne

$$a + \cos t + \sin t = 0,$$
$$a = -\sin t - \cos t,$$

et les coordonnées des points du lieu sont

$$x^2 = 1 - \cos^2 t - \cos t \sin t = \sin t (\sin t - \cos t),$$
$$y^2 = 1 - \sin^2 t - \sin t \cos t = \cos t (\cos t - \sin t);$$

nous en déduisons $\frac{\sin t}{x^2} = \frac{\cos t}{-y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^4 + y^4}}$, et nous aurons l'équation du lieu en portant ces valeurs de $\sin t$ et $\cos t$ dans l'une des deux équations, la première, par exemple. Ce calcul donne

$$x^2 = x^2 \frac{(x^2 + y^2)}{x^4 + y^4},$$

ou

$$x^4 + y^4 - x^2 - y^2 = 0.$$

Cette courbe est l'homothétique de l'une des courbes du système, de celle qui correspond à la valeur $a = \sqrt{2}$, obtenue en faisant passer le cercle auxiliaire à l'origine (fig. 4).

Restent à trouver les trajectoires orthogonales de toutes ces courbes. Leur équation cartésienne est

$$(x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 - a^2 = 0,$$

et leur équation différentielle commune

$$x(x^2 - 1)\,dx + y(y^2 - 1)\,dy = 0;$$

remplaçons-y y' par $-\frac{1}{y'}$, nous aurons l'équation différentielle des trajectoires orthogonales,

$$x(x^2 - 1)y' - y(y^2 - 1) = 0,$$

qui s'écrit

$$\frac{dx}{x(x^2 - 1)} = \frac{dy}{y(y^2 - 1)};$$

nous pouvons écrire aussi

$$\frac{x\,dx}{x^2(x^2 - 1)} = \frac{y\,dy}{y^2(y^2 - 1)},$$

ou

$$\frac{du}{u(u - 1)} = \frac{dv}{v(v - 1)},$$

en posant

$$u = x^2, \qquad v = y^2.$$

Le premier membre s'écrit

$$\frac{du}{u - 1} - \frac{du}{u},$$

et son intégrale est $L\left|\frac{u - 1}{u}\right|$; nous avons donc

$$L\left|\frac{u - 1}{u}\right| = L\left|C\frac{v - 1}{v}\right|;$$

finalement,

$$\frac{x^2 - 1}{x^2} = C\frac{y^2 - 1}{y^2}.$$

Telle est l'équation générale des trajectoires orthogonales.

L. SIMON, à Fourmies.

SUJETS DE CONCOURS

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Concours de 1920.

Mathématiques (1re composition).

I. — **2427**. 1° Calculer la valeur $m = \varphi(x_0)$ qu'il faut attribuer à la constante m pour que la dérivée de la fonction

$$f(x) = \left(2 - \frac{mx}{\sqrt{x^2 + 5}}\right) e^{\frac{x}{2}}$$

s'annule pour $x = x_0$. Construire la courbe qui représente la fonction $\varphi(x)$.

2° Quelle est, suivant les diverses valeurs de m, la forme de la courbe qui représente la fonction $f(x)$?

II. — **2428**. On considère la suite des nombres $S_1 = 1, S_2, S_3, \ldots S_n, \ldots$ définie par la formule de récurrence

$$2S_{n+1} = S_n + \sqrt{S_n^2 + a_n}$$

où a_n est le terme général d'une série donnée, à termes positifs,

$$(A) \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n + \ldots.$$

1° Démontrer l'inégalité

$$S_{n+1} < S_n + \frac{a_n}{4};$$

en conclure que S_n tend vers une limite pour n infini, si la série (A) est convergente.

2° La série (A) est-elle, réciproquement, convergente si S_n tend vers une limite pour n infini?

(*Durée* : 4 *h.*)

Mathématiques (2e composition).

2429. — On considère la transformation géométrique suivante : Étant donnée une origine O, on dira qu'un point M′ est homologue d'un point M, si M et M′ sont sur une même droite passant par l'origine et si leurs rayons vecteurs $\rho = \overline{OM}$, $\rho' = \overline{OM'}$ satisfont à la relation $\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{a}$, où a est une longueur donnée. On observera qu'un point M a deux homologues M′, la définition précédente laissant arbitraire le sens positif sur la droite OM. Le lieu des homologues des points d'une ligne L ou d'une surface S s'appellera la ligne homologue de L ou la surface homologue de S.

1° Quelle est la ligne homologue d'un cercle passant à l'origine? La construire dans le cas où le rayon de ce cercle est $\frac{a}{4}$.

2° Soit C′ la courbe ainsi tracée et C le cercle donné de rayon $\frac{a}{4}$. Chaque point M′ de C′ est homologue d'un seul point M de C. Calculer l'aire balayée par le segment de droite MM′, lorsque M décrit entièrement la courbe C′.

3° Démontrer que la tangente MT en M à une courbe plane L est rencontrée par la tangente en M′, homologue de M, à la courbe homologue L′, en un point qui ne dépend pas de la longueur a. Comment peut-on déterminer ce point sur la droite MT?

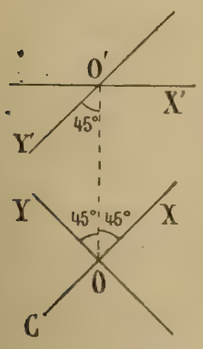
Comment se généralise cette propriété lorsque la courbe L est une courbe gauche?

4° En s'appuyant sur le résultat précédent, on montrera, sans calcul, qu'une propriété analogue a lieu pour les plans tangents à une surface S et à la surface homologue S′; et qu'il en résulte que la normale en M′ à S′ reste tangente à une courbe plane E, lorsqu'on donne à a différentes valeurs, en laissant fixes la surface S et le point M qui a M′ pour homologue. Quelle est la courbe E?

5° Quelle est la surface engendrée par E lorsque, M restant fixe sur une courbe donnée L, la surface S varie en passant constamment par cette courbe?

(*Durée* : 4 *h.*)

Épure.



2430. — Un cylindre de révolution, de 5^{cm} de rayon, a pour axe la droite horizontale dont les projections sont X et X'. Un hyperboloïde de révolution réglé a pour axe la droite (Y, Y') rencontrant la droite (X, X') au point (O, O'). Une de ses génératrices est la verticale projetée horizontalement au point C de X, à 5^{cm} à gauche de la droite OO'.

On demande de représenter par ses projections le solide commun au cylindre et à l'hyperboloïde.

Pour la mise en place, on se conformera aux indications du croquis : OO' est dirigé suivant le grand axe de la feuille; le point O, à 6^{cm} au-dessous du centre; le point O' à 11^{cm} au-dessus.

(*Durée* : 4 *h.*)

Calcul.

Résoudre l'équation $2{,}6593 \cos x + 9{,}7612 \sin x = 5{,}0347$.
Exprimer le résultat en secondes d'heure ($2\pi = 400$ grades $= 360^\circ = 24$ heures).
(Tables de log. à 5 décimales.)

(*Durée* : 1 *h.*)

Physique.

I. — Exposer les propriétés d'une lentille simple épaisse envisagée comme un système optique centré dont les milieux extrêmes sont identiques. Centre optique. Points nodaux. Points principaux. Aberrations sphériques et chromatiques.

II. — **2431.** Un serpentin, immergé dans un calorimètre, communique avec une étuve maintenue à une température constante $T = 60^\circ$. La température initiale θ_0 du calorimètre étant chaque fois 15°, on fait successivement les cinq expériences suivantes (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*).

Le calorimètre est d'abord préservé contre le rayonnement et ne reçoit de chaleur par conductibilité que de l'étuve seulement.

a) De ce fait, le serpentin n'étant parcouru par aucun fluide, le calorimètre s'échauffe d'un degré dans le temps $\tau = 2$ heures.

b) Dans le serpentin on fait circuler, avec un débit constant de $m = 2^{kg}$ à l'heure, un courant d'eau sortant de l'étuve à T°, puis du calorimètre à la température variable θ de celui-ci. L'échauffement de 1° est alors obtenu dans le temps $\tau' = 5$ minutes.

c) On fait circuler dans le serpentin un courant d'hydrogène avec un débit constant de $V = 600^l$ à l'heure (mesurés à 15° et à la pression de 760^{mm} de mercure).

d) Le dispositif préservant le calorimètre contre le rayonnement étant supprimé, et la température de la salle d'expérience étant $t = 15^\circ$, le même courant d'hydrogène finit par élever le calorimètre à la température d'équilibre $\theta_1 = 19^\circ$.

e) On fait la même expérience en supprimant le courant d'hydrogène.

On demande de calculer :

1° La capacité calorifique M du calorimètre;

2° Le temps x nécessaire pour échauffer le calorimètre de 1° dans l'expérience (*c*);

3° La température finale d'équilibre θ_2 du calorimètre dans l'expérience (*e*).

Pour les quantités de chaleur rayonnées par le calorimètre vers la salle et reçues par lui de l'étuve, on admettra qu'elles sont proportionnelles aux excès de température correspondants.

En ce qui concerne l'hydrogène, on admettra que sa masse est de $0^g{,}09$ par litre dans les conditions normales, sa chaleur spécifique 3,4, son coefficient de dilatation $\frac{1}{273}$.

(*Durée* : 3 *h.*)

Chimie.

I. Oxyde de carbone : préparation, propriétés, composition.

II. — **2432.** Déterminer la composition centésimale d'un mélange gazeux d'acide chlorhydrique, acide bromhydrique, acide sulfhydrique et azote, en s'appuyant sur les faits expérimentaux suivants :

a) On maintient 100^{cm^3} du mélange en présence de fer chauffé au rouge jusqu'à ce qu'on n'observe plus de variation de volume. Le résidu occupe un volume de 80^{cm^3}.

b) Ce résidu de 80^{cm^3}, introduit dans un eudiomètre à mercure avec une petite quantité d'acide sulfurique, est soumis à des étincelles électriques jusqu'à ce que le volume devienne invariable. Le nouveau résidu gazeux occupe un volume de 12^{cm^3}; il est incombustible.

c) Le fer altéré par la première opération est traité par de l'eau. La solution ainsi obtenue est filtrée, puis additionnée d'un peu d'acide azotique et d'un excès d'azotate d'argent. Il se forme un précipité qui pèse 0g,285.

Volume moléculaire des gaz : 22l,32.

Poids atomiques : H = 1 ; Cl = 35,5 ; Br = 80 ; S = 32 ; Az = 14 ; O = 16 ; Fe = 56 ; Ag = 108.

N. B. — Tous les volumes gazeux sont supposés mesurés dans les conditions normales de température et de pression.

(*Durée* : 3 *h.*)

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE CENTRALE

Concours définitif de 1914.

2274. — *Étant donnés deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox *et* Oy, *construire le lieu du point* M *dont les coordonnées, par rapport à ces axes, sont données par les formules*

$$x = \frac{t^2 + 3t - 2}{2(t^2 - 3t + 2)}, \qquad y = \frac{t^2 - t + 2}{t^2 + t - 2},$$

où t *est une variable arbitraire. Construction des points et tangentes remarquables et des asymptotes. Faire la figure en prenant à volonté l'unité de longueur, indiquer par des flèches le sens dans lequel la courbe est parcourue par le point* M, *lorsque* t *croît.*

x s'annule pour $t = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$ et devient infini pour $t = 1$ et $t = 2$; y ne s'annule pas et devient infini pour $t = 1$ et $t = -2$; les dérivées sont

$$x' = -\frac{t(3t-4)}{(t-1)^2(t-2)^2},$$

qui change de signe en s'annulant pour $t = 0$ et $t = \frac{4}{3}$, et

$$y' = \frac{2t(t-4)}{(t-1)^2(t+2)^2},$$

qui change de signe en s'annulant pour $t = 0$ et $t = 4$. Le coefficient angulaire de la tangente en un point est donné par la formule

$$m = \frac{y'}{x'} = -\frac{2(t-4)(t-2)^2}{(3t-4)(t+2)^2}.$$

La dérivée

$$m' = -\frac{64(t-1)(t-2)(t-3)}{(3t-4)^2(t+2)^3}$$

change de signe pour $t = 1$, $t = \pm 2$, valeurs pour lesquelles le point M s'éloigne à l'infini, et pour $t = 3$, qui correspond à un point d'inflexion à distance finie, le point $x = 4$, $y = \frac{4}{5}$, le coefficient angulaire de la tangente étant $m = \frac{2}{125}$.

Les variations de x et y sont indiquées dans le tableau ci-dessous :

t	x'	x	y'	y
$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1
		décr.		croît
$-\frac{3+\sqrt{17}}{2}$		0		$\frac{1+\sqrt{17}}{2}$
	$-$	décr.	$+$	croît
-2		$-\frac{1}{6}$	$\frac{+\infty}{-\infty}$	$\frac{+\infty}{-\infty}$
		décr.	$+$	croît
0	0	$m=-\frac{1}{2}$	0	$-1\,(max.)$
		croît		déc.
$\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$	$+$	0	$-$	$\frac{1-\sqrt{17}}{2}$
				déc.
1	$\frac{+\infty}{-\infty}$	$\frac{+\infty}{-\infty}$	$\frac{-\infty}{+\infty}$	$\frac{-\infty}{+\infty}$
	$+$	croît		déc.
$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{17}{2}\,(max.)$	$-$	$\frac{11}{5}$
	$-$	déc.		déc.
2	$\frac{-\infty}{+\infty}$	$\frac{-\infty}{+\infty}$		1
		déc.		déc.
4	$-$	$\frac{13}{6}$	0	$\frac{7}{9}\,(min.)$
		décr.	$+$	croît
$+\infty$		$\frac{1}{2}$		1

Le point M s'éloigne à l'infini :

1° pour $t=-2$; la courbe est asymptote à la droite $x=-\frac{1}{6}$;

2° pour $t=2$; la courbe est asymptote à la droite $y=1$;

3° pour $t=1$; x et y devenant infinis, prenons le rapport

$$\frac{y}{x}=\frac{2(t-2)(t^2-t+2)}{(t+2)(t^2+3t-2)},$$

dont la limite pour $t=1$ est $c=-\frac{2}{3}$, puis la différence

$$y-cx=\frac{t^2-t+2}{(t-1)(t+2)}+\frac{1}{3}\frac{t^2+3t-2}{(t-1)(t-2)}=\frac{4}{3}\frac{t^2+4}{(t-2)(t+2)},$$

dont la limite est $d=-\frac{20}{9}$; la courbe est asymptote à la droite $y+\frac{2}{3}x+\frac{20}{9}=0$ et la différence

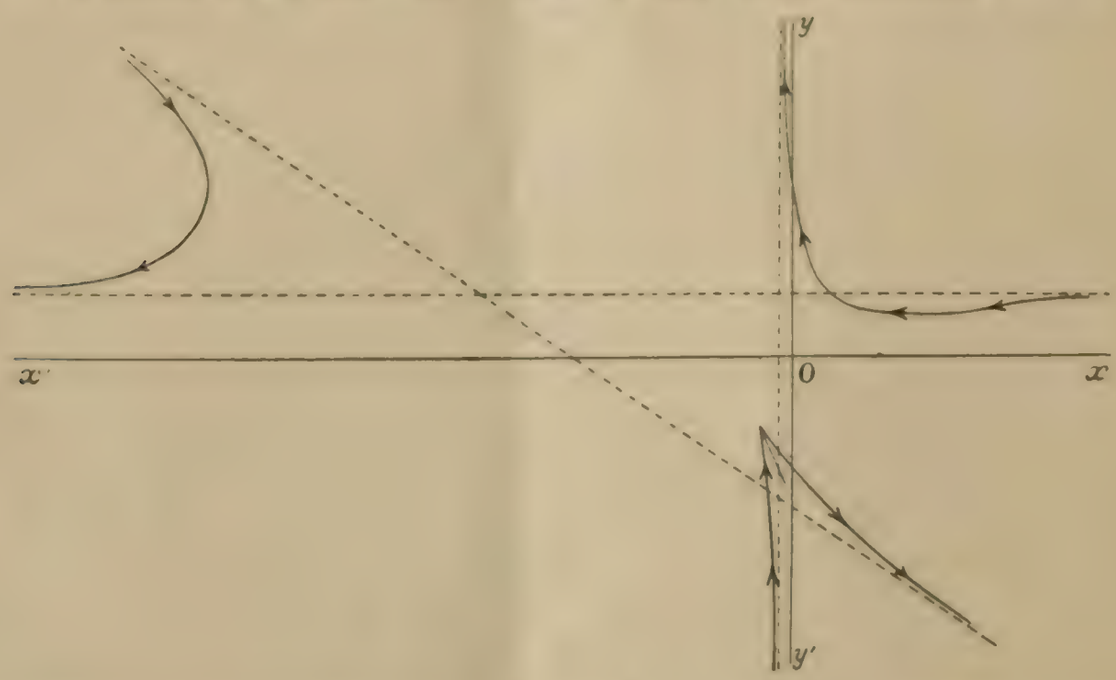
$$\delta=y-cx-d=\frac{4}{3}\frac{t^2+4}{t^2-4}+\frac{20}{9}=\frac{32}{9}\frac{(t-1)(t+1)}{t^2-4}$$

s'annule pour $t=1$, en passant du positif au négatif. La courbe est donc au-dessus de l'asymptote pour les valeurs de t un peu inférieures à 1 et au-dessous pour les valeurs de t un peu supérieures à 1.

z s'annule encore pour $t=-1$; la courbe traverse son asymptote au point

$$x=-\frac{1}{3}, \qquad y=-2.$$

Pour $t=\frac{4}{3}$, la tangente est parallèle à Oy (maximum de x); pour $t=4$, la tangente est parallèle à Ox (minimum de y). Enfin, pour $t=0$, x passe par un minimum, y par un maximum,



la courbe présente un point de rebroussement : $x=-\frac{1}{2}$, $y=-1$. La tangente en ce point a pour coefficient angulaire -2; il y a lieu d'étudier la disposition de la courbe par rapport à la tangente. Il suffit pour cela d'étudier le signe de l'expression

$$y+1+2\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{2t^2}{(t-1)(t+2)}+\frac{2t^2}{(t-1)(t-2)}=\frac{4t^3}{(t-1)(t-2)(t+2)}.$$

Pour $t=0$, cette expression passe du négatif au positif; la courbe, d'abord au-dessous de sa tangente, passe au-dessus et on a un point de rebroussement de première espèce.

P. L.

2275. — *On donne trois axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, Oz *et on considère la courbe* (G) *lieu d'un point* M *dont les coordonnées, par rapport à ces axes, sont données par les formules*

$$x=a\cos\theta, \qquad y=a\sin\theta, \qquad z=\frac{a\theta}{2},$$

θ *étant, en radians, un angle arbitrairement variable et* a *une longueur positive donnée à volonté. On prendra seulement l'arc* AB *de* (G) *obtenu en faisant croître* θ *de* 0 *à* π.

Le point M *est considéré comme un point matériel, supposé non pesant, assujetti à rester sur* (G) *et qui est soumis à l'action d'une force dont les composantes suivant* Ox, Oy, Oz *sont données, en fonction des coordonnées de* M, *par les formules* $X=y$, $Y=x$, $Z=-a$ (a *est la même longueur que plus haut*).

1° *Dans l'hypothèse où il n'y a pas de frottement de* M *sur* (G), *trouver sur l'arc* AB *de* (G) *les positions d'équilibre de* M *et, pour chacune d'elles, reconnaître si l'équilibre est stable ou instable.*

2° *Dans l'hypothèse où il y a un frottement de* M *sur* (G), *le coefficient de frottement étant donné égal à* $\frac{1}{3}$, *trouver les portions de l'arc* AB *sur lesquelles le point* M *est en équilibre.*

Nota. — Ces deux dernières questions peuvent être traitées séparément dans un ordre quelconque. Faire une figure pour chacune d'elles.

Calculons la composante tangentielle de la force qui agit sur le point M :

$$F_T = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}.$$

Or,
$$X = y = a\sin\theta, \qquad Y = x = a\cos\theta, \qquad Z = -a,$$
$$\frac{dx}{ds} = \frac{-2\sin\theta}{\sqrt{5}}, \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{2\cos\theta}{\sqrt{5}}, \qquad \frac{dz}{ds} = \frac{1}{\sqrt{5}};$$

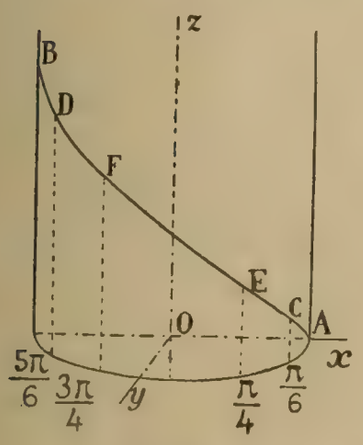
donc
$$F_T = \frac{a(2\cos 2\theta - 1)}{\sqrt{5}}.$$

1° Il n'y a pas frottement de M sur (G); la condition d'équilibre est $F_T = 0$ et, par conséquent, $\cos 2\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, d'où $\theta = \frac{\pi}{6}$ et $\theta = \frac{5\pi}{6}$, puisque θ ne varie qu'entre 0 et π.

Pour $\theta = \frac{\pi}{6}$, F_T s'annule en passant du positif au négatif; donc la position d'équilibre est stable; c'est le contraire pour $\theta = \frac{5\pi}{6}$ et la position d'équilibre est instable.

2° Dans le cas où il y a frottement, il faut pour qu'il y ait équilibre que le rapport de la composante tangentielle de la force à la composante normale soit inférieur ou au plus égal au coefficient de frottement.

Or, $F_N = \sqrt{F^2 - F_T^2}$. On doit donc avoir



$$F_T^2 \leqslant \frac{1}{9}(F^2 - F_T^2),$$

ou

$$10F_T^2 \leqslant F^2,$$

c'est-à-dire

$$(2\cos 2\theta - 1)^2 \leqslant 1;$$

inégalité qui revient à

$$4\cos 2\theta(1 - \cos 2\theta) \geqslant 0$$

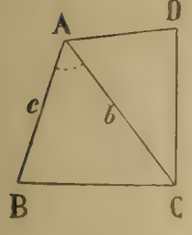
ou enfin $\cos 2\theta \geqslant 0$, 2θ variant entre 0 et 2π, il faudra prendre

$$0 \leqslant 2\theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4},$$
$$\frac{3\pi}{2} \leqslant 2\theta \leqslant 2\pi, \qquad \frac{3\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

La courbe G est une hélice circulaire tracée sur un cylindre de révolution de rayon a; son pas est πa. Les points C et D sont les positions d'équilibre quand il n'y a pas de frottement; dans le cas du frottement, il y a équilibre sur la portion de courbe AE contenant le point C et sur la portion FB, contenant le point D.

P. L.

2276. — *Soit* ABC *un triangle dans lequel on désigne les côtés* AB *et* AC *par* c *et* b *et l'angle* BAC *par* A; *on mène par* C, *dans le plan du triangle et du même côté que* A *par rapport à* BC, *une droite* CD *perpendiculaire à* BC *et de longueur égale à* BC, *puis on tire la droite* AD.



1° *Évaluer* AD *en fonction des côtés* b *et* c *et de l'angle* A, *et étudier la variation de cette longueur* AD *quand l'angle* A *varie de* 0 *à* π, *les longueurs des côtés* b *et* c *restant constantes.*

2° *Connaissant les longueurs des côtés* b *et* c, *déterminer l'angle* A *de façon que la longueur* AD *soit égale à une longueur donnée* m. *Indiquer dans quels cas ce problème est possible et combien il a de solutions.*

3° *En supposant* $b = c$, *déterminer l'angle* A *de façon que le rapport* $\frac{\overline{AC}^2 + \overline{AD}^2}{\overline{CD}^2}$ *soit égal à un nombre donné* k. *Indiquer dans quels cas ce problème est possible et combien il a de solutions.*

1° On a dans le triangle ADC, en remarquant que $\widehat{ACD} = \frac{\pi}{2} - C$,

$$AD^2 = a^2 + b^2 - 2ab \sin C;$$

d'autre part,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$\sin C = \frac{c}{a} \sin A.$$

On en déduit

$$\overline{AD}^2 = 2b^2 + c^2 - 2bc(\cos A + \sin A) = 2b^2 + c^2 - 2bc\sqrt{2} \sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right).$$

A variant de 0 à π, $A + \frac{\pi}{4}$ variera de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{5\pi}{4}$ et $\overline{AD}^2$ variera en sens contraire de $\sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right)$, comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	$A + \frac{\pi}{4}$	$\sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right)$	AD^2
0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$2b^2 + c^2 - 2bc$
		croît	décroît
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1	$2b^2 + c^2 - 2bc\sqrt{2}$ (*min.*)
		décroît	croît
π	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$2b^2 + c^2 + 2bc$.

2° De ce tableau, il résulte immédiatement que :

si $m^2 \leq 2b^2 + c^2 - 2bc\sqrt{2}$, il n'existe pas de valeur de l'angle A (entre 0 et π) telle que $AD = m$;

si $2b^2 + c^2 - 2bc\sqrt{2} \leq m^2 < 2b^2 + c^2 - 2bc$, il existe deux pareilles valeurs $\left(\text{l'une entre } 0 \text{ et } \frac{\pi}{4} \text{ et l'autre entre } \frac{\pi}{4} \text{ et } \frac{\pi}{2}\right)$;

si $2b^2 + c^2 - 2bc \leq m^2 \leq 2b^2 + c^2 + 2bc$, il existe une seule valeur de A telle que $AD = m$ $\left(\text{comprise entre } \frac{\pi}{2} \text{ et } \pi\right)$;

si $2b^2 + c^2 + 2bc < m^2$, pas de valeur de A.

Pour calculer l'angle A, il suffira de résoudre l'équation

$$m^2 = 2b^2 + c^2 - 2bc\sqrt{2} \sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right),$$

d'où

$$\sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2b^2 + c^2 - m^2}{2bc\sqrt{2}}.$$

La discussion de ce résultat donnerait les mêmes conclusions. Si l'on préfère procéder autrement, on remplacera $\sin A$ et $\cos A$ par leurs expressions en fonction de $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = t$, et on sera ramené à l'équation

$$(2b^2 + c^2 + 2bc - m^2)t^2 - 4bct + (2b^2 + c^2 - 2bc - m^2) = 0,$$

dont la discussion se fera par les procédés ordinaires.

3° Supposons maintenant $b = c$. En écrivant que $\frac{\overline{AC}^2 + \overline{AD}^2}{\overline{CD}^2}$ est égal à k, on obtient l'équation

$$\frac{2 - \cos A - \sin A}{1 - \cos A} = k,$$

ou encore

$$\frac{1 - \sin A}{1 - \cos A} = k - 1.$$

Or, $1 - \sin A = \left(\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}\right)^2$, $1 - \cos A = 2\sin^2\frac{A}{2}$; cette équation peut s'écrire

$$\left(\operatorname{cotg}\frac{A}{2} - 1\right)^2 = 2(k-1);$$

elle n'admet de racines que pour $k > 1$, savoir

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2} = 1 \pm \sqrt{2(k-1)}.$$

La plus grande racine est toujours positive et convient; la plus petite ne conviendra que si

$$\sqrt{2(k-1)} < 1, \qquad \text{d'où} \qquad k < \frac{3}{2}.$$

Donc, pour $k < 1$, 0 solution; pour $1 < k < \frac{3}{2}$, deux solutions et enfin pour $\frac{3}{2} < k$, une solution, celle qui correspond à la plus grande valeur de $\operatorname{cotg}\frac{A}{2}$.

P. L.

2277. — *Calculer au moyen de la règle à calcul :*

1° *Les onze premiers termes*

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{11}$$

de la série qui a pour terme général

$$u_n = \frac{\sqrt{26\,300}}{(20n + 295)\sqrt{20n + 32}};$$

2° *Les plus petits angles positifs ayant respectivement pour tangentes les onze premiers termes*

$$t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_{11}$$

de la série qui a pour terme général

$$t_n = \sqrt{\frac{20n + 22}{263}}.$$

1° Après simplification de u_n, qui devient

$$u_n = \frac{\sqrt{263}}{(4n + 59)\sqrt{5n + 8}},$$

$$u_1 = \frac{\sqrt{263}}{63\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{2,63}}{6,3\sqrt{13}} = \frac{0,450}{6,3} = 0,0715,$$

$$u_2 = \frac{\sqrt{263}}{67\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{2,63}}{6,7\sqrt{18}} = \frac{0,382}{6,7} = 0,0570,$$

$$u_3 = \frac{\sqrt{263}}{71\sqrt{23}} = \frac{\sqrt{2,63}}{7,1\sqrt{23}} = \frac{0,338}{7,1} = 0,0476,$$

$$u_4 = \frac{\sqrt{263}}{75\sqrt{28}} = \frac{\sqrt{2,63}}{7,5\sqrt{28}} = \frac{0,307}{7,5} = 0,0408,$$

$$u_5 = \frac{\sqrt{263}}{79\sqrt{33}} = \frac{\sqrt{2,63}}{7,9\sqrt{33}} = \frac{0,282}{7,9} = 0,0357,$$

$$u_6 = \frac{\sqrt{263}}{83\sqrt{38}} = \frac{\sqrt{2,63}}{8,3\sqrt{38}} = \frac{0,263}{8,3} = 0,0317,$$

$$u_7 = \frac{\sqrt{263}}{87\sqrt{43}} = \frac{\sqrt{2,63}}{8,7\sqrt{43}} = \frac{0,247}{8,7} = 0,0284,$$

$$u_8 = \frac{\sqrt{263}}{91\sqrt{48}} = \frac{\sqrt{2,63}}{9,1\sqrt{48}} = \frac{0,234}{9,1} = 0,0257,$$

$$u_9 = \frac{\sqrt{263}}{95\sqrt{53}} = \frac{\sqrt{2,63}}{9,5\sqrt{53}} = \frac{0,223}{9,5} = 0,0234,$$

$$u_{10} = \frac{\sqrt{263}}{99\sqrt{58}} = \frac{\sqrt{2,63}}{9,9\sqrt{58}} = \frac{0,213}{9,9} = 0,0215,$$

$$u_{11} = \frac{\sqrt{263}}{103\sqrt{63}} = \frac{\sqrt{2,63}}{10,3\sqrt{63}} = \frac{0,204}{10,3} = 0,0198.$$

2° Posons $\operatorname{tg} x = t$; les résultats sont les suivants :

$t_1 = \sqrt{\frac{4,2}{26,3}} = 0,399,$ $x_1 = 21°45'$;

$t_2 = \sqrt{\frac{6,2}{26,3}} = 0,485,$ $x_2 = 25°50'$;

$t_3 = \sqrt{\frac{8,2}{26,3}} = 0,558,$ $x_3 = 29°10'$;

$t_4 = \sqrt{\frac{10,2}{26,3}} = 0,622,$ $x_4 = 31°55'$;

$t_5 = \sqrt{\frac{12,2}{26,3}} = 0,680,$ $x_5 = 34°15'$;

$t_6 = \sqrt{\frac{14,2}{26,3}} = 0,734,$ $x_6 = 36°15'$;

$t_7 = \sqrt{\frac{16,2}{26,3}} = 0,784,$ $x_7 = 38°5'$;

$t_8 = \sqrt{\frac{18,2}{26,3}} = 0,831,$ $x_8 = 39°40'$;

$t_9 = \sqrt{\frac{20,2}{26,3}} = 0,875,$ $x_9 = 41°10'$;

$t_{10} = \sqrt{\frac{22,2}{26,3}} = 0,918,$ $x_{10} = 42°30'$;

$t_{11} = \sqrt{\frac{24,2}{26,3}} = 0,959,$ $x_{11} = 43°50'$.

P. L.

2279. — *Un rayon monochromatique pénètre dans une sphère homogène transparente et, après avoir subi p réflexions, il émerge dans la direction* R.

1° *Calculer la déviation* Δ *du rayon* R.

2° *Montrer que cette déviation passe par un minimum ou un maximum;*

3° *Calculer le cosinus de l'angle d'incidence correspondant;*

4° *Calculer* Δ *correspondant pour* $p = 1$ *et* $n = \frac{4}{3}$;

5° *Montrer que* Δ *passe par un minimum si* n *est plus grand que l'unité.*

1° Désignons par i l'angle d'incidence, par r l'angle de réfraction. A l'entrée et à la sortie, le rayon considéré tourne de $i - r$; à chaque réflexion, il tourne de $\pi - 2r$. Donc on a

$$\Delta = 2(i - r) + p(\pi - 2r) = p\pi + 2i - 2(p + 1)r.$$

2° Prenons la dérivée par rapport à i :

$$\frac{d\Delta}{di} = 2 - 2(p + 1)\frac{dr}{di}.$$

Or on a

$$\sin i = n \sin r, \qquad \text{d'où} \qquad \cos i = n \cos r \frac{dr}{di}.$$

Remplaçons $\frac{dr}{di}$ par sa valeur :

$$\frac{d\Delta}{di} = 2 - 2(p + 1)\frac{\cos i}{n \cos r}.$$

Il y a un maximum ou un minimum si cette dérivée peut s'annuler, c'est-à-dire si l'on peut avoir $\frac{\cos i}{n \cos r} = \frac{1}{p + 1}$, ou bien, en remplaçant $\cos i$ et $\cos r$ en fonction de $\sin i$,

$$\sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}} = \frac{1}{p + 1}, \qquad n^2 - \sin^2 i = (p + 1)^2(1 - \sin^2 i),$$

$$\sin^2 i(p^2 + 2p) = (p + 1)^2 - n^2, \qquad \sin^2 i = \frac{(p + 1)^2 - n^2}{(p + 1)^2 - 1},$$

solution réelle si l'on a $n > 1$ et $n < p + 1$.

3° Supposons la solution réelle :

$$\cos^2 i = 1 - \sin^2 i = \frac{n^2 - 1}{(p+1)^2 - 1}.$$

4° Pour $p = 1$, l'expression générale de Δ devient

$$\Delta = \pi + 2i - 4r$$

et la valeur de i annulant la dérivée est donnée par

$$\cos^2 i = \frac{n^2 - 1}{3} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 1}{3} = \frac{16 - 9}{27} = \frac{7}{27}, \qquad \cos i = 0{,}509.$$

5° Pour $p = 1$, on a

$$\frac{d\Delta}{di} = 2 - 4\sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}}.$$

Pour $i = 0$, $\frac{d\Delta}{di} = 2 - \frac{4}{n}$, expression négative si l'on a $n < 2$; dans ce cas, la déviation commence par décroître.

Pour $i = \frac{\pi}{2}$, $\frac{d\Delta}{di} = 2$, valeur positive, donc la déviation finit par augmenter. Elle est donc passée par un minimum.

2280. — *a) Un volume gazeux* V *de l'un des oxydes de l'azote, que nous désignerons par* A, *est traité par une spirale de fer rendue incandescente par un courant électrique. Le fer absorbe l'oxygène et subit une augmentation de masse de* $1^g,6$. *L'azote restant occupe le volume* V'.

b) On prend de nouveau un volume V *du composé* A, *et on le fait arriver dans du peroxyde d'azote liquide, refroidi, incolore dans ces conditions. Le peroxyde d'azote absorbe* A *en formant un autre oxyde de l'azote, et le liquide devient bleu. L'augmentation de masse du liquide est de* 3^g.

c) Dans ce liquide, maintenu encore à basse température, on fait arriver un volume V'' *d'oxygène jusqu'à cessation d'absorption. La nouvelle augmentation de masse est de* $1^g,6$ *et le liquide est redevenu incolore comme au début.*

On demande :

1° *Quel est le composé qui a été désigné par* A ;

2° *Quels sont, à* 0° *et* 76^{cm}, *les valeurs de* V, V', V'';

3° *Quel est le composé formé dans l'opération b; quelles sont ses propriétés;*

4° *Quel est le composé formé dans l'opération c. Que savez-vous sur sa densité de vapeur à différentes températures et à différentes pressions?*

1° D'après le résultat de l'opération *a*, le volume V du composé considéré contient $1^g,6$ d'oxygène, c'est-à-dire $\frac{1}{10}$ d'atome.

D'après le résultat de l'opération *b*, ce même volume V représente une masse totale de 3^g et contient, par conséquent, une masse d'azote égale à $3 - 1{,}6 = 1{,}4$, c'est-à-dire $\frac{1}{10}$ d'atome.

La formule du composé est donc AzO; c'est le bioxyde d'azote, caractérisé d'ailleurs par la réaction *b*, où il s'unit au peroxyde d'azote pour former de l'anhydride azoteux bleu.

2° Le bioxyde d'azote employé représente $\frac{1}{10}$ de molécule, donc $V = 2^l,24$.

Il contient la moitié de son volume d'azote, donc $V' = 1^l,12$.

Le volume V'' d'oxygène représente $1^g,6$, c'est-à-dire $\frac{1}{10}$ d'atome, donc $V'' = 1^l,12$. D'ailleurs,

puisque cet oxygène a eu pour effet de transformer finalement le bioxyde d'azote primitif en peroxyde AzO^2, il représente bien un nombre d'atomes égal au nombre des molécules du bioxyde.

3° Le bioxyde et le peroxyde s'unissent dans les proportions $AzO + AzO^2$ pour former l'anhydride azoteux Az^2O^3; on a donc produit $\frac{1}{10}$ de molécule de ce corps.

4° Les propriétés de l'anhydride azoteux et celles du peroxyde sont décrites dans les cours.

SUJETS DE CONCOURS

ÉCOLE NAVALE

Concours de 1916.

Algèbre, analyse et trigonométrie.

I. — **2433**. 1° Étudier les variations de la fonction

$$f(x) = \frac{x(x+2)}{x+1} - 2L(1+x);$$

L désigne le logarithme népérien. Trouver sa partie principale (ou valeur principale), l'infiniment petit principal étant x. Limite de $(x+1)f(x)$ quand x tend vers -1.

2° Déterminer l'intégrale de l'équation différentielle

$$x^3\frac{dy}{dx} - y f(x) = 0,$$

qui prend, pour $x = 0$, la valeur un. Dans cette équation, $f(x)$ désigne la fonction précédente.

II. — **2434**. Démontrer que l'expression

$$\frac{\cos 2x}{\cos(x-a)\cos(x-b)},$$

x étant une variable, a et b deux constantes données, peut, en général, se mettre sous la forme

$$A\,\mathrm{tg}(x-a) + B\,\mathrm{tg}(x-b) + C,$$

A, B, C étant de nouvelles constantes. Calculer ces dernières constantes. Que devient l'égalité obtenue, lorsque, x et a restant fixes, b tend vers la limite a?

Géométrie analytique.

2435. — On considère deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy. On prend également Ox pour axe polaire, le sens positif des angles étant tel que l'angle de Oy avec Ox soit égal à $+\frac{\pi}{2}$.

1° r et θ désignant les coordonnées polaires, construire la courbe C qui a pour équation

$$r = \frac{\cos 2\theta}{4\cos\theta - 2\sqrt{2}\sin\theta}.$$

2° Dans l'équation précédente, on change r en $\frac{1}{r}$. La courbe C se transforme en une hyperbole H. Construire cette hyperbole.

3° On considère un cercle Γ ayant pour centre un point variable de la courbe H et passant par le point de coordonnées cartésiennes $x = 0$, $y = \sqrt{2}$. Trouver l'enveloppe E de ces cercles.

Distinguer sur l'enveloppe les points qui correspondent à un cercle Γ dont le centre est soit sur l'une, soit sur l'autre des deux branches de l'hyperbole.

4° On effectue sur le cercle Γ et son enveloppe E la transformation qui consiste à remplacer r par $\frac{1}{r}$. Le centre du cercle Γ devient un point de C. Déduire de là une définition géométrique de la courbe C.

Nota. — Les considérations géométriques sont admises, mais ne dispensent pas d'une solution analytique.

Mécanique.

I. — **2436**. Une sphère homogène de poids P, est placée sur un triangle équilatéral invariable ABC formé par trois tiges rigides, de manière que les côtés de ce triangle soient tangents à la sphère. Le rayon de la sphère est égal au rayon du cercle circonscrit au triangle.

1° Le triangle étant maintenu horizontal, calculer les réactions aux points de contact de la sphère et des côtés.

2° Le côté BC restant horizontal, on fait tourner le plan du triangle autour de BC pour l'amener dans une position où ce plan fait l'angle α avec le plan horizontal. Pour quelles valeurs de α la sphère abandonne-t-elle le triangle?

On admettra que les frottements sont négligeables et que, par conséquent, les réactions sont normales à la sphère.

II. — **2437**. Un point matériel pesant de masse m se meut dans un milieu qui oppose une résistance représentée à chaque instant t par un vecteur porté par la tangente à la trajectoire, de sens contraire à celui du vecteur vitesse et dont la grandeur est égale à kmV, V désignant la grandeur de la vitesse et k un coefficient positif constant.

A l'instant zéro, le mobile est lancé d'un point O avec une vitesse de grandeur V_0 faisant l'angle α avec un plan horizontal.

1° Déterminer la position M du mobile à l'instant t. Construire la trajectoire et son asymptote D. Peut-on choisir les valeurs de V_0 et de α de façon que la projection orthogonale du point M sur une verticale se déplace d'un mouvement uniforme?

2° La tangente en M à la trajectoire rencontre la droite D au point T. Montrer que la grandeur V de la vitesse au point M est égale à $k \times$ MT.

3° On suppose que le point matériel soit lancé verticalement vers le haut et que V_0 soit égal à $\frac{g}{k}$. g désignant l'accélération due à la pesanteur. Calculer le rapport du travail de la résistance du milieu à celui de la pesanteur lorsque le mobile va du point O au point le plus élevé de sa trajectoire.

Calcul.

On donne

$$a = 75^\circ\, 35'\, 40'', \qquad b = 51^\circ\, 10'\, 30'', \qquad C = 34^\circ\, 15'\, 10''.$$

Déterminer les angles A, B, c, e, compris entre 0 et 180°, par les formules

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\cdot\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}, \qquad \operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\cdot\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \operatorname{tg}\frac{a-b}{2}\cdot\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}, \qquad \operatorname{tg}\frac{e}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\sin C}{1+\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\cos}.$$

Vérification : on doit avoir $A + B + C = 180^\circ + e$.

Épure.

Un prisme droit hexagonal régulier repose par sa base inférieure sur le plan horizontal. Deux de ses faces sont de front. Le côté de la base est de 3^{cm}. Une sphère a son centre en un point de l'axe du prisme à 10^{cm} au-dessus du plan horizontal; son rayon est de 5^{cm}. Un solide homogène est constitué par la réunion de la sphère et de la portion du prisme située au-dessous de la sphère et limitée au plan horizontal.

Un point lumineux S est situé dans le plan de front de l'axe du prisme à 15^{cm} au-dessus du plan horizontal; sa projection horizontale est à 10^{cm} à gauche de celle du centre de la sphère.

Représenter le solide, son ombre propre et son ombre portée sur le plan horizontal (le plan vertical étant supposé enlevé), c'est-à-dire la région lieu des points tant du solide que du plan horizontal tels que le segment

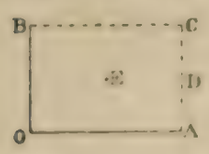
de droite qui va d'un de ces points au point S a quelque point commun avec le solide, autre que le point lui-même.

La ligne de terre est au milieu de la feuille, parallèle au petit côté; l'axe du prisme est au milieu de la feuille; sa projection horizontale est à 8cm en avant du plan vertical.

Des hachures seront tracées dans la partie visible de l'ombre propre et de l'ombre portée.

Physique.

2438. — Deux aimants longs et minces OA et OB sont placés à angle droit et liés rigidement de façon à former un seul corps solide. Les pôles nord sont aux extrémités A et B; les deux pôles sud en O. Les moments magnétiques sont M et M'; les longueurs a et b.



1° L'ensemble des deux aimants est mobile en tous sens dans un plan horizontal, par exemple en flottant sur un liquide. Quelle est sa position d'équilibre, quand il est soumis à la seule action d'un champ magnétique uniforme, horizontal, d'intensité H? A quel effort mécanique est soumis cet ensemble si on le fait tourner d'un angle α autour d'un axe vertical, à partir de sa position d'équilibre ?

2° L'ensemble des aimants est rendu mobile, dans un plan vertical, autour d'un axe horizontal normal à son plan, passant par E, centre du rectangle OABC. On le soumet à l'action d'un champ magnétique uniforme, horizontal, situé dans le plan OABC, d'intensité H.

Quelle surcharge faut-il placer en D, milieu de AC, pour que, sous l'action des forces magnétiques et des poids des aimants et de la surcharge, l'ensemble se place de façon que OA soit horizontal?

Faire le calcul numérique avec les valeurs suivantes :

$$M = 18\,000 \text{ C. G. S.}, \qquad a = 40^{cm}, \qquad \text{poids de OA : } 300^g,$$
$$M = 9\,000 \quad — \qquad b = 20^{cm}, \qquad \text{poids de OB : } 150^g,$$
$$H = 50 \text{ gauss}, \qquad g = 981 \text{ C. G. S.}$$

Concours de 1917.

Algèbre, analyse et trigonométrie.

2439. — 1° Étude de la fonction $y = x - \operatorname{tg} x$; courbe représentative de la fonction. Montrer que cette courbe se reproduit par des translations dont on déterminera la direction et les amplitudes; que les valeurs positives de x qui annulent cette fonction, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, sont telles que

$$\pi < x_1 < \frac{3\pi}{2}, \qquad 2\pi < x_2 < \frac{5\pi}{2}, \ldots, \qquad n\pi < x_n < \frac{2n+1}{2}\pi \ldots,$$

et que la différence $\frac{(2n+1)\pi}{2} - x_n$ tend vers zéro quand n devient infini.

2° Étude de la fonction $y = x + \operatorname{cotg} x$, courbe représentative de la fonction; propriétés analogues pour les valeurs de x qui annulent cette fonction.

3° Étude de la fonction $y = \frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x + \cos x}$; courbe représentative de la fonction.

4° Posant $u = x\sin x + \cos x$, $v = \sin x - x\cos x$, calculer les intégrales

$$I_1 = \int \frac{x^2\,dx}{u^2}, \qquad I_2 = \int \frac{x^2\,dx}{v^2}, \qquad I_3 = \int \frac{x^2\,dx}{(u+v)^2}.$$

Il résulte des calculs du numéro précédent que $I_1 = \frac{v}{u} + \text{constante}$, mais on obtiendra aussi I_1, ainsi que I_2 et I_3, en faisant le changement de variable $\theta = x - \operatorname{arc\,tg} x$, et en calculant pour cela $d\theta$ et les lignes trigonométriques de θ en fonction de dx, x et des lignes trigonométriques de x.

Géométrie analytique.

2440. — On considère une parabole P ayant l'axe des x pour axe et l'axe des y pour tangente au sommet. L'abscisse de son foyer est égale à 0,25. On donne aussi une droite D passant par O et située dans le plan xOy.

1° Un point M décrit la parabole. La normale à cette courbe au point M coupe D en un point I. Soit A le symétrique de M par rapport au point I. Déterminer le lieu géométrique du point A quand M décrit P. Construire ce lieu dans le cas particulier où le coefficient angulaire de D est égal à 2. On pourra pour cette construction s'aider de la considération de sécantes parallèles à D.

2° On substitue au point A le point B tel que le rapport $\frac{BM}{BI}$ soit égal à un nombre donné λ, positif ou négatif. Déterminer M de façon que le point B soit sur l'axe de la parabole. On suppose D quelconque.

3° On suppose maintenant que la droite D, tout en continuant à passer par O, n'est plus dans le plan xOy, et on substitue à la normale MI le plan normal en M à la parabole. On appelle encore I le point de rencontre de D avec ce plan, et A le symétrique de M par rapport à I. Déterminer le lieu du point A. Étudier le cas particulier où la droite D est située dans le plan mené par l'axe de la parabole perpendiculaire au plan xOy, et fait en outre avec Ox un angle de 45°.

Mécanique.

I. — **2441.** Un contour polygonal plan, invariable, pesant et homogène, ABCDEF, est formé par cinq côtés consécutifs d'un hexagone régulier.

1° On suspend ce contour à un clou horizontal par le sommet E. Calculer la tangente de l'angle que fait, dans la position d'équilibre, la diagonale EB avec la verticale.

2° Un fil est attaché au point A; en tirant sur ce fil, on amène la diagonale EB à être verticale et le fil à être horizontal. Calculer, dans la nouvelle position d'équilibre, le rapport de la tension du fil au poids du contour.

3° Résoudre les mêmes questions lorsque le contour est suspendu par le sommet D en remplaçant la diagonale EB par la diagonale DA.

II. — **2442.** Un fil élastique, dont la longueur naturelle est l, est fixé en un point A par une extrémité et vient passer à travers un petit anneau horizontal fixe B de dimensions négligeables. La distance AB est égale à l. A l'autre extrémité du fil est attaché un point matériel pesant M. La masse du fil est négligeable et l'intensité de la force exercée sur le point matériel par la tension du fil est égale à $k \times BM$, k désignant un coefficient numérique positif constant. Lorsque le système est en équilibre, le point M occupe une position O telle que $BO = 2l$.

1° Démontrer que, quelle que soit la position du point M, la résultante des forces qui agissent sur lui passe par un point fixe.

2° On place M en un point M_0 et on l'abandonne sans vitesse initiale. Étudier le mouvement de M dans les deux hypothèses suivantes : M_0 est sur la droite BO au-dessous de O, et $BM_0 = 3l$, ou bien M_0 est dans le plan horizontal de O.

3° On lance M d'un point M_0 du plan ABO avec une vitesse initiale normale à ce plan et de grandeur v_0. Étudier le mouvement.

Le nombre v_0 restant fixe, où doit être placé M_0 pour que la trajectoire de M soit un cercle?

Calcul.

On donne $a = 12\,850{,}73$, $b = 17\,082{,}84$, $c = 19\,303{,}47$.

Calculer les nombres

$$p = \frac{a+b+c}{2}, \qquad r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}, \qquad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \qquad R = \frac{abc}{4S}.$$

Calculer les angles A, B, C compris entre 0° et 180° donnés par les formules

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}, \qquad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}, \qquad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}.$$

Calculer les nombres

$$h = \frac{2p \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}, \qquad k = \frac{2p \sin\frac{A}{2} \sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}, \qquad l = \frac{2p \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}},$$

$$r_1 = \frac{a \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}, \qquad r_2 = \frac{b \cos\frac{C}{2} \cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}, \qquad r_3 = \frac{c \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

Épure.

Un corps solide est formé d'un cylindre circulaire droit plein, à la partie supérieure duquel est creusée une cavité en forme de demi-sphère.

L'axe du cylindre fait avec le plan horizontal un angle de 45°; et sa projection horizontale fait avec la ligne de terre un angle de 30°. Quand un mobile parcourt l'axe de bas en haut, ses projections se déplacent de gauche à droite, et sa projection horizontale se rapproche de la ligne de terre. La trace horizontale de l'axe est à 5cm au-dessus du bord inférieur de la feuille, et à 8cm à droite du bord gauche. Le diamètre du cylindre est de 8cm.

Le centre de la sphère est sur l'axe du cylindre; il a une cote de 10cm. Le diamètre de la sphère est de 8cm.

Un plan de bout passe par le point le plus élevé du solide et par le point de l'axe du cylindre dont la cote est de 9cm.

Représenter la portion du solide située au-dessous de ce plan de bout et au-dessus du plan horizontal de projection.

Ligne de terre parallèle au petit côté de la feuille et au milieu.

Physique.

2443. — Un cylindre vertical de 20cm de diamètre intérieur est rempli de vapeur d'eau saturante à la température de 110° centigrades au-dessous d'un piston mobile sans frottement qui sépare la vapeur de l'air ambiant.

1° Sachant que la pression atmosphérique du moment est de 74cm,5 de mercure et que la pression maximum de la vapeur d'eau à 110° est de 107cm,5 de mercure, on demande quel doit être le poids du piston pour que celui-ci se maintienne en équilibre.

2° La face inférieure du piston se trouvant initialement à 50cm au-dessus du fond, on demande quel est le poids de la vapeur contenue dans le cylindre, la densité de la vapeur d'eau par rapport à l'air étant égale à 0,63.

3° Au moyen d'une légère surcharge, on fait descendre lentement le piston jusqu'à condensation complète de la vapeur. Quelle quantité de chaleur faut-il extraire à travers les parois du cylindre pendant cette opération pour que la température se maintienne constante à 110°?

4° L'eau de condensation étant rassemblée dans un petit récipient, séparé du cylindre par un robinet, on ferme celui-ci et on soulève le piston de manière à le ramener à sa position primitive en faisant le vide au-dessous de lui. Calculer en joules le travail qu'on doit dépenser pendant cette seconde opération.

5° Le piston étant maintenu fixe, on ouvre le robinet pour permettre à l'eau recueillie de se vaporiser de nouveau dans le cylindre vide. Quelle quantité de chaleur faudra-t-il fournir jusqu'à vaporisation complète à 110° et retour du système à l'état initial?

6° Donner une définition correcte de la chaleur latente de vaporisation.

Densité du mercure : 13,6. Intensité de la pesanteur : $g = 981$. Poids du litre d'air normal $a = 1^g,293$. Coefficient de dilatation des gaz : $\alpha = 0,00367$. Chaleur latente de vaporisation de l'eau à 110° : $\lambda = 532$ calories g. d. Équivalent mécanique de la calorie : $J = 4,18$ joules par calorie g. d.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

Coulommiers — Imp. Paul BRODARD.

30e Année. Septembre 1920. N° 12.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Concours de 1914.

Algèbre et Trigonométrie.

2250. — *Combien de termes doit-on prendre dans la série qui a pour terme général* $u_n = \frac{1}{n^3}$, *si l'on veut calculer la valeur de la série à un dix-millième près?*

Soient S la somme de la série et S_n la somme des n premiers termes; nous avons

$$S - S_n = \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \frac{1}{(n+3)^3} + \ldots.$$

Pour évaluer une borne supérieure du second membre, considérons la courbe $y = \frac{1}{x^3}$, et prenons sur cette courbe les points A_0, A_1, A_2, ... ayant respectivement pour abscisses n, $n+1$, $n+2$, ... et désignons par B_0, B_1, B_2, ... les projections des points A_0, A_1, A_2, ... sur Ox. Puis, menons par les points A_1, A_2, ... des parallèles à Ox dans le sens négatif et limitées à l'ordonnée immédiatement précédente. Nous formons ainsi une suite de rectangles dont les aires ont précisément pour valeurs les termes $\frac{1}{(n+1)^3}$, $\frac{1}{(n+2)^3}$, ... de $S - S_n$.

Or la somme de ces rectangles est inférieure à l'aire limitée par la courbe, l'axe des x et l'ordonnée A_0B_0, aire qui est égale à $\int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$; on a donc

$$S - S_n < \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^3}.$$

L'intégrale indéfinie $\int \frac{dx}{x^3}$ est égale à $-\frac{1}{2x^2}$; par suite l'intégrale définie est égale à $\frac{1}{2n^2}$, et l'on a

$$S - S_n < \frac{1}{2n^2}.$$

Pour que $S - S_n$ soit inférieure à $\frac{1}{10^4}$, il suffit que $\frac{1}{2n^2}$ soit plus petit que $\frac{1}{10^4}$, ou que n^2 soit plus grand que 5 000, ou n supérieur à $\sqrt{5\,000}$ ou à 71.

On doit donc prendre 71 termes dans la série pour calculer sa somme à $\frac{1}{10^4}$ près.

AUGUSTE FORISSIER.

2251. — *Calculer l'intégrale définie* (1) $f(z)=\int_0^\pi \frac{dx}{1+z\cos^2 x}$, *$z$ étant un nombre supérieur à* -1.

2° *Développer suivant les puissances croissantes de z l'expression trouvée pour $f(z)$.*

3° *Vérifier qu'on obtient bien le même résultat en partant du développement de* $\frac{1}{1+z\cos^2 x}$ *et intégrant les termes du développement, la variable x variant de 0 à π, comme l'indique la formule* (1).

1. Posons $\operatorname{tg} x = t$, $x = \operatorname{arc\,tg} t$; nous avons $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$ et $dx = \frac{dt}{1+t^2}$; par suite,

$$\int \frac{dx}{1+z\cos^2 x} = \int \frac{dt}{1+z+t^2}.$$

Pour déterminer les limites de la seconde intégrale, nous remarquons que lorsque x croît de 0 à π, t est discontinue pour $x=\frac{\pi}{2}$; pour cette raison, nous décomposons l'intervalle de variation de x $(0,\pi)$ en deux intervalles $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ et $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Quand x croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, t croît d'une manière continue de 0 à $+\infty$, et nous pouvons écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+z\cos^2 x} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+z+t^2};$$

quand x croît de $\frac{\pi}{2}$ à π, t croît de $-\infty$ à 0, et nous avons

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{1+z\cos^2 x} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{1+z+t^2}.$$

En ajoutant ces deux égalités, nous avons

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+z\cos^2 x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+z+t^2}.$$

Comme $1+z$ est positif, on a

$$\int \frac{dt}{1+z+t^2} = \frac{1}{\sqrt{1+z}} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\sqrt{1+z}}$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+z+t^2} = \frac{1}{\sqrt{1+z}} \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\sqrt{1+z}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1+z}}.$$

Donc

$$f(z) = \frac{\pi}{\sqrt{1+z}}.$$

2. Si z est compris entre -1 et $+1$, on peut développer $\frac{1}{\sqrt{1+z}}$, ou $(1+z)^{-\frac{1}{2}}$, par la formule du binome, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1+z}} = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{1.2}z^2 + \ldots + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}z^n + \ldots,$$

ou

$$f(z) = \pi\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{1.3}{2.4}z^2 + \ldots + (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}z^n + \ldots\right).$$

3. En supposant toujours $|z| < 1$, on a

$$(1) \qquad \frac{1}{1+z\cos^2 x} = 1 - z\cos^2 x + z^2\cos^4 x - \ldots + (-1)^n z^n \cos^{2n} x + \ldots$$

et en intégrant de 0 à π (voir la remarque finale),

$$(2)\quad \int_0^\pi \frac{dx}{1+z\cos^2 x} = \pi - z\int_0^\pi \cos^2 x\,dx + z^2\int_0^\pi \cos^4 x\,dx - \ldots + (-1)^n z^n \int_0^\pi \cos^{2n} x\,dx + \ldots.$$

Pour établir que ce développement est identique au précédent, il suffit de montrer que l'on a

$$\int_0^\pi \cos^{2n} x\,dx = \pi.\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}.$$

Posons

$$I_n = \int \cos^{2n} x dx = \int \cos^{2n-1} x\, d\sin x,$$

et intégrons par parties, en posant $u = \cos^{2n-1} x$, $v = \sin x$; nous avons

$$I_n = \cos^{2n-1} x \sin x - \int \sin x (2n-1)\cos^{2n-2} x(-\sin x)\,dx$$

ou

$$I_n = \cos^{2n-1} x \sin x + (2n-1)\int \sin^2 x \cos^{2n-2} x\,dx.$$

Or

$$\int \sin^2 x \cos^{2n-2} x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^{2n-2} x\,dx = I_{n-1} - I_n;$$

l'égalité précédente devient alors

$$I_n = \cos^{2n-1} x \sin x + (2n-1)(I_{n-1} - I_n),$$

ou

$$2nI_n = \cos^{2n-1} x \sin x + (2n-1) I_{n-1}.$$

Désignons maintenant par J_n l'intégrale définie $\int_0^\pi \cos^{2n} x dx$; nous pouvons écrire

$$2nJ_n = \left| \cos^{2n-1} x \sin x \right|_0^\pi + (2n-1) J_{n-1},$$

ou comme $\cos^{2n-1} x \sin x$ s'annule pour $x = 0$ et pour $x = \pi$,

$$2n J_n = (2n-1) J_{n-1}.$$

Remplaçons successivement n par $n-1$, $n-2$, ..., 2, 1, nous obtenons

$$\begin{aligned}
(2n-2) J_{n-1} &= (2n-3) J_{n-2},\\
(2n-4) J_{n-2} &= (2n-5) J_{n-3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
4J_2 &= 3J_1,\\
2J_1 &= J_0,
\end{aligned}$$

et en multipliant membre à membre,

$$2.4.6\ldots 2n\, J_n = 1.3.5\ldots(2n-1) J_0.$$

Or $J_0 = \int_0^\pi dx = \pi$, donc

$$J_n = \pi\,.\,\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n};$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. — On ne peut déduire l'égalité (2) de l'égalité (1) que si la série qui figure au deuxième membre de (1) est *uniformément convergente* dans l'intervalle $(0, \pi)$, c'est-à-dire si, étant donné arbitrairement un nombre positif ε, il lui correspond un nombre positif p tel que pour toutes les valeurs entières de n supérieures à p, et *pour toutes les valeurs de x comprises dans l'intervalle* $(0, \pi)$, on ait

$$|R_n| < \varepsilon,$$

R_n désignant le reste de la série.

Il est aisé de voir que cela a lieu. Nous avons en effet

$$R_n = (-1)^n\{z^n \cos^{2n} x - z^{n+1}\cos^{2n+2} x + z^{n+2}\cos^{2n+4} x - \ldots\};$$

désignons par ρ la valeur absolue de z, $(\rho < 1)$, nous aurons *pour toute valeur de* x

$$|R_n| < \rho^n + \rho^{n+1} + \rho^{n+2} + \ldots$$

ou

$$|R_n| < \frac{\rho^n}{1-\rho}.$$

Cherchons à déterminer n de façon que $\frac{\rho^n}{1-\rho} < \varepsilon$; on peut écrire cette inégalité $\left(\frac{1}{\rho}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon(1-\rho)}$, ou, en posant $\frac{1}{\rho} = 1 + h$, $(1+h)^n > \frac{1}{\varepsilon(1-\rho)}$. Cette inégalité sera vérifiée, si l'on prend n satisfaisant à

$$1 + nh > \frac{1}{\varepsilon(1-\rho)}, \qquad \text{ou} \qquad n > \frac{1}{h}\left[\frac{1}{\varepsilon(1-\rho)} - 1\right].$$

On voit ainsi que la série considérée est uniformément convergente dans n'importe quel intervalle.

L. SIMON, à Fourmies.

Bonne solution par M. Auguste Forissier.

2252. — *Étudier la variation de la fonction* $y = x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x}\right)$.

Cette fonction est continue pour toutes les valeurs de x, excepté pour $x = 0$. La dérivée peut s'écrire

$$y' = (2x - 1)e^{\frac{1}{x}} - (2x + 1).$$

Pour étudier son signe, nous la mettons sous la forme

$$y' = (2x - 1)\varphi(x),$$

en posant $\varphi(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{2x+1}{2x-1}$, et nous allons étudier le signe de $\varphi(x)$.

Si $\frac{2x+1}{2x-1}$ est négatif, c'est-à-dire si x est compris entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$, $\varphi(x)$ est positif. Si, au contraire, $\frac{2x+1}{2x-1}$ est positif, c'est-à-dire si x est extérieur à l'intervalle $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$, $\varphi(x)$ a même signe que la fonction

$$u = \frac{1}{x} - 1.\frac{2x+1}{2x-1}.$$

Étudions les variations de cette fonction pour les valeurs de x extérieures à l'intervalle $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$. La dérivée est $u' = \frac{1}{x^2(4x^2-1)}$; elle est positive; par suite, la fonction u est croissante,

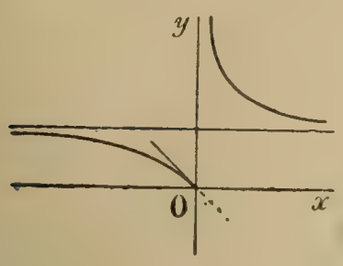
x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\frac{1}{2}$		$+\infty$
u	0	$\nearrow$	∞		∞	$\nearrow$	0

et comme elle est nulle pour $x = \pm\infty$, on voit qu'elle est positive dans le premier intervalle, $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ et négative dans le second $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

On en conclut que $\varphi(x)$ est positive pour les valeurs de x comprises entre $-\infty$ et $+\frac{1}{2}$, et négative pour les valeurs de x supérieures à $\frac{1}{2}$. Par suite, y' est toujours négative, et la fonction y est décroissante :

x	$-\infty$		$-\varepsilon$		$+\varepsilon$		$+\infty$
y	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

Déterminons maintenant les valeurs limites de y. Remplaçons $e^{\frac{1}{x}}$ par son développement en série $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3!x^3}+\ldots$; y prend la forme



$$y=\frac{1}{2}+\frac{1}{3!x}+\ldots,$$

et ceci montre que, pour $x=\pm\infty$, y a pour limite $\frac{1}{2}$.

D'autre part, on peut écrire

$$y=x^2e^{\frac{1}{x}}-x^2-x;$$

pour $x=-\varepsilon$, $e^{\frac{1}{x}}$ a pour limite zéro; il en est de même de y. On voit de plus que $\frac{y}{x}$ a pour limite -1; donc la tangente à l'origine a pour équation

$$Y=-x,$$

et comme on a

$$y-Y=x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right),$$

on voit que $y-Y$ est négatif pour $x=-\varepsilon$; par suite, la courbe est au-dessous de sa tangente.

Enfin, pour $x=+\varepsilon$, $x^2e^{\frac{1}{x}}$ est infini positif, car on peut l'écrire $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}$, et l'exponentielle l'emporte sur le nombre.

Il est alors facile de tracer la courbe.

ANDRÉ MALRAIT.

[Bonnes solutions par MM. Auguste FORISSIER et L. SIMON, à Fourmies.]

Géométrie analytique et Mécanique.

2253. — I. *Sur la spirale logarithmique* C *définie par l'équation* $r=ae^{m\theta}$, *en coordonnées polaires, on considère les deux points* M_0 *et* M *définis respectivement par les angles polaires* θ_0 *et* θ.

1° *Déterminer la position du centre de gravité* G *de l'arc* M_0M.

2° *Déterminer la position limite du point* G *quand le point* M_0 *tend vers le pôle* O.

II. *Dans ce cas où le point* M_0 *coïncide avec le pôle* O *de la spirale, on suppose que l'angle polaire* θ *du point* M *augmente avec la vitesse d'un radian par seconde.*

1° *Étudier la courbe* Γ, *lieu du point* G.

2° *Déterminer en grandeur et direction la vitesse* V *et l'accélération* A *du point* G, *correspondant à un angle donné* θ.

III. *Au lieu d'un arc de spirale, on considère une courbe quelconque* C. *L'extrémité* M *de l'arc* $M_0M=l$ *de cette courbe est supposée parcourir la courbe* C *suivant une loi qui est déterminée en fonction du temps. Étant donné le centre de gravité* G *de l'arc* M_0M, *l'extrémité* M *de l'arc, la tangente* MT *au point* M, *la longueur* l *de l'arc* M_0M, *les deux premières dérivées* l' *et* l'' *de* l *par rapport au temps, déterminer, en grandeur et direction, au moyen de ces données :*

1° *La vitesse* V *du point* G;

2° *L'accélération* A *du même point.*

IV. *Dans le cas particulier où la ligne* C *est formée de deux segments rectilignes* M_0O *et* OM :

1° *Déterminer le centre de gravité* G *de la ligne* M_0OM;

2° Trouver le lieu Γ du point G quand le segment OM prend toutes les longueurs possibles et pivote en outre autour du point O dans un plan donné.

N. B. — On tiendra compte des considérations géométriques.

I. Nous supposons $a > 0$, $m > 0$, $\theta > \theta_0$.

1° Les coordonnées rectilignes du point G sont

$$\alpha = \frac{\int_{\theta_0}^{\theta} x\,ds}{s}, \qquad \beta = \frac{\int_{\theta_0}^{\theta} y\,ds}{s},$$

x, y désignant les coordonnées rectilignes d'un point quelconque de l'arc M_0M et s la longueur de cet arc.

Or, on a

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 = a^2(m^2+1)e^{2m\theta}d\theta^2,$$

$$ds = a\sqrt{m^2+1}\,e^{m\theta}d\theta, \qquad s = \frac{a\sqrt{m^2+1}}{m}(e^{m\theta} - e^{m\theta_0}).$$

D'autre part,

$$\int x\,ds = \int r\cos\theta\,ds = a^2\sqrt{m^2+1}\int e^{2m\theta}\cos\theta\,d\theta,$$

$$\int y\,ds = \int r\sin\theta\,ds = a^2\sqrt{m^2+1}\int e^{2m\theta}\sin\theta\,d\theta.$$

Posons

$$A = \int e^{2m\theta}\cos\theta\,d\theta, \qquad B = \int e^{2m\theta}\sin\theta\,d\theta;$$

nous en tirons

$$A + iB = \int e^{(2m-i)\theta}d\theta = \frac{e^{(2m-i)\theta}}{2m-i} = \frac{2m+i}{4m^2+1}(\cos\theta + i\sin\theta)e^{2m\theta},$$

d'où nous déduisons

$$A = \frac{2m\cos\theta + \sin\theta}{4m^2+1}e^{2m\theta}, \qquad B = \frac{2m\sin\theta - \cos\theta}{4m^2+1}e^{2m\theta}.$$

En rassemblant ces résultats nous obtenons en définitive

$$\alpha = \frac{ma\{e^{2m\theta}(2m\cos\theta + \sin\theta) - e^{2m\theta_0}(2m\cos\theta_0 + \sin\theta_0)\}}{(4m^2+1)(e^{m\theta} - e^{m\theta_0})},$$

$$\beta = \frac{ma\{e^{2m\theta}(2m\sin\theta - \cos\theta) - e^{2m\theta_0}(2m\sin\theta_0 - \cos\theta_0)\}}{(4m^2+1)(e^{m\theta} - e^{m\theta_0})}.$$

2° Quand le point M_0 tend vers le pôle O, θ_0 tend vers $-\infty$, par suite $e^{m\theta_0}$ a pour limite zéro, et la position limite du point G a pour coordonnées rectilignes

$$\alpha = \frac{ma}{4m^2+1}(2m\cos\theta + \sin\theta)e^{m\theta}, \qquad \beta = \frac{ma}{4m^2+1}(2m\sin\theta - \cos\theta)e^{m\theta}.$$

On peut aussi calculer les coordonnées polaires de ce point. Désignons par φ l'angle aigu dont la tangente est égale à $\frac{1}{2m}$, nous avons

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2m}, \qquad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{4m^2+1}}, \qquad \cos\varphi = \frac{2m}{\sqrt{4m^2+1}},$$

et par suite

$$\alpha = \frac{a}{2}\cos\varphi\, e^{m\theta}\cos(\theta - \varphi), \qquad \beta = \frac{a}{2}\cos\varphi\, e^{m\theta}\sin(\theta - \varphi).$$

Les coordonnées polaires ω, ρ du point G sont alors en évidence, ce sont

$$\rho = \frac{a}{2}\cos\varphi\, e^{m\theta}, \qquad \omega = \theta - \varphi,$$

et de ces formules nous déduisons une construction très simple du point G. Faisons tourner le rayon vecteur OM de l'angle φ dans le sens négatif, et projetons le point M en P sur le rayon vecteur obtenu; le point G est le milieu de OP.

On a

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{PM}{OP} = \frac{1}{2m}; \qquad \text{on en déduit} \qquad \frac{PM}{GP} = \frac{1}{m},$$

et par suite, en désignant par ψ l'angle PGM, on a $\operatorname{tg}\psi = \frac{1}{m}$.

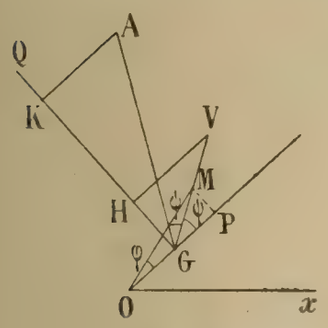
II. Prenons comme origine du temps l'instant où θ est nul, nous avons $\theta = t$, et les coordonnées polaires du point G sont, en fonction du temps,

$$\rho = \frac{a}{2}\cos\varphi\, e^{mt}, \qquad \omega = t - \varphi.$$

1° Pour avoir le lieu du point G, nous éliminons t entre ces deux équations, et nous obtenons

$$\rho = \frac{a}{2}\cos\varphi\, e^{m(\omega+\varphi)}, \qquad \text{ou} \qquad \rho = \frac{a}{2}\cos\varphi\, e^{m\varphi} e^{m\omega}.$$

Cette équation représente une spirale logarithmique homothétique de la spirale donnée.



2° Les composantes de la vitesse V suivant GP et la perpendiculaire GQ sont

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{a}{2}\cos\varphi\, m e^{mt} = m\rho, \qquad \rho\frac{d\omega}{dt} = \rho.$$

Prenons sur GQ la longueur $GH = \rho = OG$, et par le point H menons une parallèle à OG qui rencontre GM au point V; GV est le vecteur vitesse, car on a $GH = \rho$ et $HV = GH \cot\psi = m\rho$.

On en conclut que $GV = m.GM$.

Les composantes de l'accélération A suivant les mêmes directions sont

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = (m^2-1)\rho, \qquad \rho\frac{d^2\omega}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\omega}{dt} = 2m\rho;$$

le quotient de la seconde par la première est égal à $\dfrac{\frac{2}{m}}{1-\frac{1}{m^2}}$, ou $\operatorname{tg}2\psi$. On en conclut que le vecteur accélération GA fait l'angle ψ avec GV, et pour le construire, il suffit de prendre sur GQ la longueur $GK = 2m\rho = 2HV$, et de mener par le point K une parallèle à OG, qui détermine le point A.

III. Supposons que la courbe C soit rapportée à trois axes quelconques, et soient x, y, z les coordonnées du point M, qui sont des fonctions de t. Les coordonnées α, β, γ du point G sont définies par les formules

$$l\alpha = \int_{t_0}^{t} x l' dt, \qquad l\beta = \int_{t_0}^{t} y l' dt, \qquad l\gamma = \int_{t_0}^{t} z l' dt.$$

1° Dérivons la première par rapport à t, nous avons

$$l\alpha' + l'\alpha = xl', \qquad \text{ou} \qquad \alpha' = \frac{l'}{l}(x-\alpha);$$

nous avons de même

$$\beta' = \frac{l'}{l}(y-\beta), \qquad \gamma' = \frac{l'}{l}(z-\gamma).$$

Or α', β', γ' sont les projections du vecteur V, et $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$ sont les projections du vecteur GM; on en conclut que le vecteur GV est porté sur la droite GM et que l'on a

$$GV = \frac{l'}{l}\overline{GM}.$$

Ceci peut s'établir géométriquement. En effet, soient M la position du mobile à l'instant t, G le centre de gravité de l'arc M_0M et soit M′ la position du mobile à l'instant $t+\Delta t$. Nous allons déterminer le centre de gravité G′ de l'arc M_0M'. Pour cela, nous composons le poids de l'arc M_0M, appliqué en G, avec le poids de l'arc MM′, appliqué au centre de gravité I de cet arc; le point d'application de la résultante, G′, est sur la droite GI et l'on a

$$\frac{\overline{G'G}}{\overline{G'I}} = -\frac{\text{arc } MM'}{\text{arc } M_0M} = -\frac{\Delta l}{l} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\overline{GG'}}{\overline{G'I}} = \frac{\Delta l}{l}$$

ou encore

$$\frac{\overline{GG'}}{\overline{GI}} = \frac{\Delta l}{l+\Delta l}, \qquad \overline{GG'} = \frac{\Delta l}{l+\Delta l}\overline{GI}.$$

Divisons les deux membres par Δt, nous avons

$$\frac{\overline{GG'}}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta l}{\Delta t}}{l+\Delta l}.\overline{GI}.$$

Quand Δt tend vers 0, Δl a pour limite zéro, $\frac{\Delta l}{\Delta t}$ a pour limite l' et $\overline{GI}$ a pour limite $\overline{GM}$. D'autre part $\frac{\overline{GG'}}{\Delta t}$ a pour limite le vecteur vitesse GV; on voit donc que GV est porté sur GM et que l'on a

$$\overline{GV} = \frac{l'}{l}\overline{GM}.$$

2° Dérivons par rapport à t la formule obtenue plus haut

$$\alpha' = \frac{l'}{l}(x-\alpha);$$

nous avons

$$\alpha'' = \frac{l'}{l}(x'-\alpha') + (x-\alpha).\frac{ll''-l'^2}{l^2},$$

ou, en remplaçant α' par $\frac{l'}{l}(x-\alpha)$,

$$\alpha'' = \frac{l'}{l}x' + \frac{ll''-2l'^2}{l^2}(x-\alpha).$$

On a de même

$$\beta'' = \frac{l'}{l}y' + \frac{ll''-2l'^2}{l^2}(y-\beta), \qquad y'' = \frac{l'}{l}z' + \frac{ll''-2l'^2}{l^2}(z-\gamma).$$

Or α'', β'', γ'' sont les projections de l'accélération A du point G, x', y', z' sont les projections du vecteur vitesse MU du point M (ce vecteur étant porté sur la tangente MT et ayant pour valeur algébrique l'), $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$ sont les projections du vecteur GM.

On en conclut que le vecteur GA est la somme géométrique de deux vecteurs : l'un porté sur MT, ayant pour valeur algébrique $\frac{l'}{l}\overline{MU}$, l'autre sur GM, ayant pour valeur algébrique $\frac{ll''-2l'^2}{l^2}\overline{GM}$.

IV. 1° Soit H le milieu de OM_0 et I le milieu de OM; le centre de gravité G de la ligne M_0OM est situé sur la droite HI, et l'on a

$$\frac{\overline{GH}}{\overline{GI}} = -\frac{OM}{OM_0} = -\frac{OI}{OH}.$$

2° Prenons pour origine le point O, pour axe des z la droite OM_0, pour axes Ox et Oy deux droites rectangulaires quelconques situées dans le plan que décrit OM. Posons $OM_0 = 2a$, $OM = 2r$, et soit θ l'angle que fait OM avec Ox; a est fixe, r et θ sont variables.

Les coordonnées du point H sont 0, 0, a; celles du point I, $r\cos\theta$, $r\sin\theta$, 0; par suite celles du point G sont

$$x=\frac{r^2\cos\theta}{r+a},\qquad y=\frac{r^2\sin\theta}{r+a},\qquad z=\frac{a^2}{r+a}.$$

On aura le lieu du point G en éliminant r et θ entre ces trois équations.

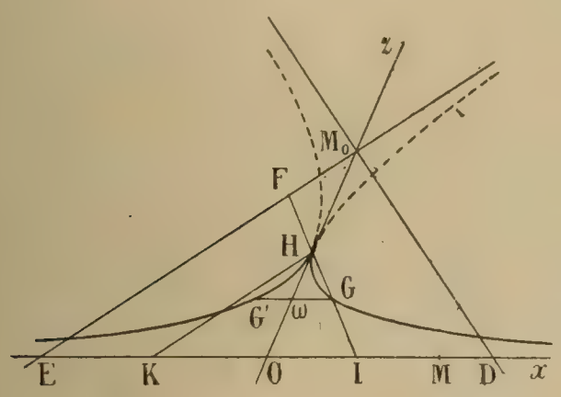
De la troisième on tire r en fonction de z et on porte la valeur obtenue dans la relation

$$x^2+y^2=\frac{r^4}{(r+a)^2},$$

déduite des deux premières. On obtient ainsi pour équation du lieu

$$(x^2+y^2)z^2-(z-a)^4=0.$$

Cette équation représente une surface du quatrième degré. Le lieu Γ se compose seulement de la portion de cette surface comprise entre les plans $z=0$ et $z=a$.



Tout plan parallèle au plan des xy, $z=h$, coupe la surface suivant un cercle ayant son centre sur Oz et son rayon égal à $\frac{(a-h)^2}{h}$.

D'autre part, le plan des zx rencontre cette surface suivant deux hyperboles,

$$x^2z^2-(z-a)^4=0,$$

ou

$$[xz+(z-a)^2][xz-(z-a)^2]=0,$$

ou encore

$$[z(x+z-2a)+a^2][z(x-z+2a)-a^2]=0.$$

Elles sont toutes les deux tangentes à Oz au point H et sont asymptotes à Ox. En outre, la première est asymptote à la droite M_0D, la seconde à la droite M_0E $(OD=OE=OM_0=2a)$. Nous avons figuré en trait plein les arcs de ces hyperboles qui sont compris entre les plans $z=0$ et $z=a$.

Soit ω un point quelconque du segment OH; par ce point menons une parallèle à Ox qui rencontre les hyperboles en G et G′ $(\omega G=\omega G')$. On peut considérer la surface comme engendrée par le cercle de centre ω, de rayon ωG et dont le plan est parallèle au plan des xy, quand le point ω se déplace de O en H.

Ceci peut s'établir géométriquement. Considérons une position quelconque de la ligne brisée M_0OM, et soit G un point du lieu, tel que l'on ait

$$(1)\qquad \frac{GH}{GI}=\frac{OI}{OH},$$

et soit (P) le plan que décrit la droite OM.

Menons Gω parallèle à OM, ω étant sur OM_0. Nous avons

$$\frac{GH}{GI}=\frac{\omega H}{\omega O},\qquad \text{et}\qquad \frac{OI}{OH}=\frac{\omega G}{\omega H};$$

nous en tirons

$$\frac{\omega H}{\omega O}=\frac{\omega G}{\omega H},\qquad \text{et}\qquad \omega G=\frac{\overline{\omega H}^2}{O\omega}.$$

Donc la longueur ωG ne dépend que de la longueur Oω. Par suite la surface Γ, lieu du point G, est coupée par un plan quelconque parallèle à (P) suivant un cercle ayant son centre sur OM_0.

Cherchons maintenant le lieu du point G quand la droite OM reste fixe, le point M se déplaçant sur cette droite. Prenons le point F, intersection de HI et de M_0E, et menons HK parallèle à M_0E; K est le milieu de OE, et l'on a $OK=KE=OH$.

De la relation (1) on tire $\frac{HI}{GI} = \frac{OI + OH}{OH} = \frac{IK}{OH}$; on a aussi $\frac{HI}{HF} = \frac{IK}{KE}$.

Donc $GI = HF$, et le lieu du point G est une hyperbole qui a pour asymptotes OM et M_0E et qui passe au point H; comme H est le milieu de OM_0, OM_0 est tangente en H à cette hyperbole.

Nous retrouvons ainsi les résultats obtenus analytiquement.

Calcul.

2255. — *On donne l'équation* $f(x) = x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1 = 0$.

1° *Constater qu'une de ses racines x est comprise entre* $+1$ *et* $+1,5$.

2° *La méthode d'approximation de Newton est-elle applicable à la recherche de cette racine?*

3° *Former l'équation qui donne* $y = 1,5 - x$.

4° *Calculer la valeur y_1 qu'elle donne pour y quand on néglige les termes de degré supérieur au premier dans cette équation en y.*

5° *Évaluer les termes négligés dans ce calcul et déduire de cette évaluation une nouvelle valeur y_2 plus approchée de y que y_1, en tenant compte des termes de degré supérieur au premier.*

(*Règle à calcul ou calcul arithmétique à volonté.*)

1. On a $f(1) = -4$, $f(1,5) = 0,0625$; par suite, l'équation admet un nombre impair de racines réelles comprises entre 1 et 1,5. Mais, comme le polynome $f(x)$ admet deux variations, l'équation ne peut avoir plus de deux racines positives. On en conclut qu'elle admet une seule racine réelle comprise entre 1 et 1,5.

2. On a

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 12x - 4 = 4(x^3 + 3x^2 - 3x - 1),$$
$$f''(x) = 4(3x^2 + 6x - 3) = 12(x^2 + 2x - 1).$$

Comme $f''(x)$ est positif pour toutes les valeurs de x comprises entre 1 et 1,5, on peut appliquer la méthode de Newton à la limite 1,5 qui rend $f(x)$ de même signe que $f''(x)$. On obtient la valeur plus approchée que 1,5 et dans le même sens, c'est-à-dire par excès,

$$1,5 - \frac{f(1,5)}{f'(1,5)} = 1,5 - \frac{0,0625}{18,5}.$$

3. L'équation transformée est $f(1,5 - y) = 0$, ou

$$f(1,5) - yf'(1,5) + \frac{y^2}{2!}f''(1,5) - \frac{y^3}{3!}f'''(1,5) + \frac{y^4}{4!}f^{iv}(1,5) = 0.$$

Nous avons déja calculé $f(1,5)$, $f'(1,5)$; nous obtenons facilement $f''(1,5) = 51$, $f'''(1,5) = 60$, $f^{iv}(1,5) = 24$, et, par suite, l'équation en y devient

$$(1) \qquad 0,0625 - 18,5y + 25,5y^2 - 10y^3 + y^4 = 0.$$

4. En négligeant les termes de degré supérieur au premier, il nous reste l'équation

$$0,0625 - 18,5y = 0,$$

qui a pour racine

$$y_1 = \frac{0,0625}{18,5} = 0,00337837\ldots.$$

Cette valeur est précisément égale à la correction que donne la méthode de Newton.

5. De l'équation (1) on tire

$$y = \frac{0{,}0625 + y^2(y^2 - 10y + 25{,}5)}{18{,}5}.$$

Remplaçons dans le second membre y par la valeur 0,003 qui diffère de y_1 d'une quantité inférieure à 0,0004, nous obtenons la nouvelle valeur y_2 de y :

$$y_2 = \frac{0{,}0625 + 0{,}00022923081}{18{,}5} = 0{,}00339076....$$

Remarque. — Pour démontrer que y_2 est plus approchée que y_1 et pour déterminer l'approximation, on peut remarquer d'abord que la racine de l'équation (1) qui est voisine de y_1 est comprise entre 0,003 et 0,004. De plus, en posant

$$\varphi(y) = y^2(y^2 - 10y + 25{,}5),$$

on voit aisément que $\varphi(y)$ croît quand y croît de 0,003 à 0,004; par suite, si nous désignons par y_0 la valeur exacte de la racine, nous avons

$$\varphi(0{,}003) < \varphi(y_0) < \varphi(0{,}004),$$

et comme on a

$$y_0 = \frac{0{,}0625 + \varphi(y_0)}{18{,}5},$$

on en conclut

$$\frac{0{,}0625 + \varphi(0{,}003)}{18{,}5} < y_0 < \frac{0{,}0625 + \varphi(0{,}004)}{18{,}5},$$

ou

$$0{,}00339076 < y_0 < 0{,}003400398;$$

Ceci montre que y_2 est plus approchée que y_1 et que l'erreur est moindre que $\frac{1}{10^5}$.

Solutions satisfaisantes par MM. Dumaine et Mazet.

SUJETS DE CONCOURS

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES

Cours préparatoires.

Concours de 1920.

Mathématiques.

I. — **2444.** On considère la courbe (cardioïde) définie en coordonnées polaires par l'équation

$$r = 1 + \cos\theta.$$

Soit M un point de cette courbe, D la droite symétrique du rayon vecteur OM par rapport à la tangente en M, H le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur cette droite.

1° Déterminer et construire la courbe C lieu du point H.

2° Donner les équations en coordonnées polaires des courbes lieux des milieux des cordes de O passant par l'origine (la discussion de ces courbes n'est pas demandée).

3° On considère l'aire limitée par un arc de la courbe $\rho = f(\omega)$ et les rayons vecteurs d'angles polaires ω_1 et ω_2. Représenter la valeur de cette aire par une intégrale définie.

Appliquer la formule obtenue à la courbe C étudiée au 1°. On donnera la valeur numérique de l'intégrale

obtenue lorsque l'arc considéré comprend toute la courbe et l'on indiquera d'une manière précise la signification géométrique de cette quantité.

II. — **2445**. On considère le déterminant R_n d'ordre n ayant tous les éléments de la diagonale principale nuls et les autres égaux à 1, et le déterminant D_n déduit du précédent en remplaçant par 1 le premier élément de la diagonale principale.

1° Exprimer D_n et R_n en fonction de D_{n-1} et R_{n-1}.

2° Déduire des formules précédentes l'expression générale de D_n et R_n.

Mécanique.

I. — **2446**. Une voiture initialement à l'arrêt est mise en marche en ligne droite sur une route plane d'un mouvement uniformément accéléré. Au bout du temps T elle a atteint sa vitesse de régime, qu'elle conserve ensuite.

Les roues roulent sans glissement pendant tout le mouvement.

1° Déterminer pour une des roues, à un instant t (inférieur, égal ou supérieur à T) la vitesse, l'accélération tangentielle et l'accélération normale du point M de la roue, qui était en contact avec le sol à l'instant initial.

2° Indiquer la forme générale de l'hodographe du mouvement du point M; si cet hodographe présente un point anguleux en donner la raison.

N. B. — On pourra prendre comme paramètre auxiliaire l'angle que fait la normale à la route avec la droite qui joint le centre de la roue au point M dont on étudie le mouvement.

II. — **2447**. Une coupe a une paroi intérieure hémisphérique. Le grand cercle rebord de la coupe est d'épaisseur négligeable et la coupe est tenue de manière que le plan de ce rebord soit fixe et horizontal.

On place dans la coupe une aiguille à tricoter, homogène, pesante, dont l'épaisseur est négligeable vis-à-vis de sa longueur.

L'aiguille peut : soit porter par ses deux extrémités sur la paroi interne, soit porter par une extrémité sur la paroi et s'appuyer d'autre part sur le rebord (les extrémités de l'aiguille sont assimilables à des points).

1° Déterminer les positions d'équilibre de l'aiguille en supposant que le rebord et la paroi sont parfaitement lisses. Discuter.

2° Le rebord restant parfaitement lisse, on suppose qu'il y a frottement au contact de l'aiguille et de la paroi interne. Soit $f = \operatorname{tg} i$ le coefficient de frottement. On ne considère que des positions d'équilibre telles que la réaction de la paroi fasse un angle juste égal à i avec la normale au point ou aux points de contact.

Déterminer quelle doit être la valeur de f pour que l'aiguille puisse tenir en équilibre dans les conditions susdites en étant inclinée d'un angle donné sur le plan horizontal.

On examinera les divers cas possibles.

N. B. — On suppose que l'aiguille n'adhère pas à la coupe, c'est-à-dire que les deux corps se séparent sans le moindre effort tendant à les écarter l'un de l'autre.

Calcul.

On considère la fonction

$$f(x) = x \cos x + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

1° Calculer sa valeur pour les valeurs de x suivantes :

$$\frac{\pi}{20}, \quad \frac{2\pi}{20}, \quad \frac{3\pi}{20}, \qquad \pi = 3{,}1415926535\ldots.$$

2° Pour $x = \frac{\pi}{10}$, calculer la valeur de

$$f\left(x + \frac{\pi}{20\,000}\right) - f(x).$$

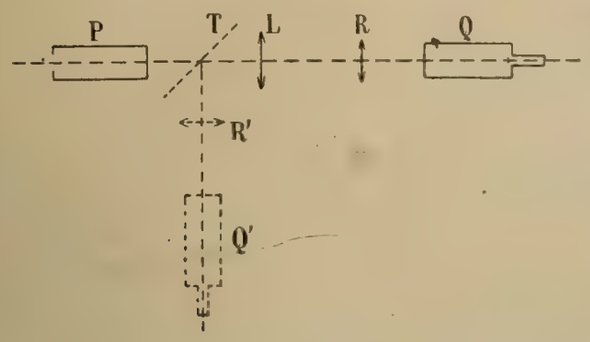
Tous les résultats doivent être donnés avec 4 décimales exactes à partir de la première décimale non nulle. (Si le calcul direct ne donne pas l'approximation voulue, on cherchera à transformer les expressions à calculer.)

Physique.

I. — **2448**. 1° Devant l'œil supposé réduit à son cristallin de convergence c et à une distance a en avant de celui-ci, on place un verre de lorgnon L d'une convergence de x dioptries. Au travers de cette lentille L et

suivant son axe on regarde un point fixe A situé à la distance p de L. On fait alors glisser la lentille L parallèlement à son plan d'une petite longueur e. On demande les déplacements apparents linéaire et angulaire de l'image du point A vue par l'œil resté immobile. Discuter le sens du déplacement.

2° On se propose de déterminer la convergence x de la lentille L. A cet effet on utilise un collimateur P et une lunette astronomique Q, centrés sur le même axe comme l'indique la figure. Dans le plan focal du collimateur est disposé un micromètre au $k^{\text{ième}}$ de millimètre. La lunette possède un réticule formé de deux fils parallèles écartés de l^{mm} et la lunette est réglée pour la vision à l'infini.



Entre P et Q, et sur le même axe, on introduit la lentille L. On demande comment il faut placer une lentille auxiliaire R entre le collimateur et la lunette pour rétablir la vision nette du micromètre sans modifier le tirage de la lunette.

Ce résultat ayant été obtenu, on constate que n divisions du micromètre s'insèrent entre les deux fils du réticule de la lunette. Déduire de ce résultat la convergence x de la lentille L, les convergences ou distances focales du collimateur, de l'objectif de la lunette et de la lentille auxiliaire R étant supposées connues.

Examinant d'abord le cas où les deux lentilles L et R sont convergentes, on discutera ensuite les cas où l'une des deux lentilles ou toutes les deux seraient divergentes.

3° Quel serait, dans l'expérience précédente, l'effet de l'immersion de la lentille L dans une petite cuve à faces parallèles renfermant un liquide d'indice N', la lentille étant faite d'un verre d'indice N ? La cuve et ses parois sont supposées infiniment minces.

4° On fait tourner la lunette Q de 90° par rapport à sa position primitive de manière à la placer en Q'. En outre, on dispose entre P et L une lame transparente T à faces parallèles de manière à voir dans la lunette l'image du micromètre provenant du faisceau lumineux réfléchi sur la face avant de L. Comme précédemment, on rétablit la netteté de l'image du micromètre dans la lunette au moyen d'une lentille auxiliaire placée en R'.

Montrer comment l'expérience permet de déterminer le rayon de courbure de la face avant de la lentille L sur laquelle s'est produite la réflexion. Discuter.

Application numérique pour la question 2° :

$$l = 5^{\text{mm}}, \qquad k = 5, \qquad n = 10.$$

Distance focale du collimateur : 10^{cm}.

Distance focale de l'objectif de la lunette : 25^{cm}.

Convergence de la lentille R : 10 dioptries.

II. — Définition et mesure de l'intensité de la pesanteur en un point du champ terrestre. — Résultats obtenus.

Chimie.

I. — Action de l'azote sur les corps simples.

II. — **2449**. On soumet à l'action de l'effluve électrique de l'oxygène contenu dans un récipient de $2^{\text{l}},232$ maintenu à 0° sous la pression de 760^{mm}. Après le passage du courant, la pression est devenue égale à 722^{mm}.

La totalité du gaz est dirigée à travers un absorbeur contenant un excès d'iodure de potassium en solution légèrement acidulée. Le liquide ainsi traité est épuisé jusqu'à décoloration complète par plusieurs additions de sulfure de carbone. Les différentes portions de sulfure de carbone sont réunies et évaporées à basse température : il reste un résidu solide A.

Le corps A est chauffé dans un ballon B de 1^{l} contenant 20^{mg} d'hydrogène. La température est maintenue constante à 500° pendant un temps suffisant pour que la réaction atteigne sa limite, puis le ballon est refroidi brusquement, de manière à le ramener à la température ordinaire sans modifier l'état chimique atteint à 500°.

On ouvre le ballon sur la cuve à eau, et on titre, au moyen d'une solution d'hyposulfite contenant $\frac{1}{10}$ de molécule par litre, le liquide qui a dissous les produits solubles contenus dans le ballon. Il faut employer $47^{\text{cm}^3},7$ de liqueur titrée d'hyposulfite.

On demande :

1° le rendement en ozone dû au passage de l'effluve;

2° la nature et le poids du solide A ;

3° la composition en poids et la nature des gaz contenus dans le ballon B à 500° ;

4° la pression totale des gaz à 500° ;

5° la concentration, en molécules par litre, de chacun des gaz à 500° ;

6° le degré de dissociation de l'acide iodhydrique à 500°.

On admettra que tous les produits gazeux se comportent comme des gaz parfaits. Le coefficient de dilatation des gaz sera pris égal à $\frac{1}{273}$. Le volume de 32g d'oxygène à 0° et 760mm est 22l,32.

Poids atomiques : $H = 1$, $O = 16$, $I = 127$.

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2240. — *On donne deux axes rectangulaires Ox et Oy, un point A sur Ox d'abscisse a ($a > 0$) et une droite (D) passant par le point A et ayant pour pente m.*

1° *Former l'équation de la conique (S) qui a pour foyer le point O, pour directrice correspondante la droite (D) et pour excentricité le nombre k, donné positif.*

2° *On fait varier m, les coniques (S) forment un faisceau. Montrer que par tout point du plan passent deux coniques de ce faisceau. Condition pour qu'elles soient réelles. Condition pour que les directrices (D) correspondantes soient perpendiculaires.*

3° *Montrer que les deux asymptotes de chaque conique (S) passent chacune par un point fixe.*

4° *Une conique (S) rencontre Ox en M et N. Un cercle quelconque passant par M et N rencontre (S) en deux points P et Q. Déterminer le cercle de façon que la droite PQ passe par le point O, et trouver le lieu du centre de ce cercle quand m varie.*

5° *Dans les mêmes conditions trouver le lieu des points P et Q. Construire ce lieu en coordonnées polaires.*

1. Soit M (x, y) un point quelconque de la conique (S), et soit MH la distance de ce point à la droite (D); on doit avoir

$$\frac{MO}{MH} = k, \qquad \text{ou} \qquad \overline{MO}^2 = k^2 \cdot \overline{MH}^2.$$

Or
$$\overline{MO}^2 = x^2 + y^2, \qquad \overline{MH}^2 = \frac{[y - m(x-a)]^2}{1+m^2};$$

par suite, l'équation de la conique est

$$x^2 + y^2 = k^2 \cdot \frac{[y - m(x-a)]^2}{1+m^2},$$

ou

$$(1) \qquad (x^2 + y^2)(1+m^2) - k^2[y - m(x-a)]^2 = 0.$$

2. Écrivons que cette conique passe par un point quelconque $P(x_0, y_0)$ du plan, nous obtenons l'équation

$$(x_0^2 + y_0^2)(1+m^2) - k^2[y_0 - m(x_0 - a)]^2 = 0,$$

ou, en ordonnant par rapport à m,

$$(2) \qquad m^2[x_0^2 + y_0^2 - k^2(x_0 - a)^2] + 2mk^2(x_0 - a)y_0 + x_0^2 + y_0^2 - k^2y_0^2 = 0.$$

Cette équation est du deuxième degré par rapport à m; à chaque racine de cette équation correspond une conique (S), passant par le point P.

Pour que ces coniques soient réelles, il faut que les racines de l'équation en m soient réelles : ceci nous donne la condition

$$k^4(x_0 - a)^2y_0^2 - [x_0^2 + y_0^2 - k^2(x_0 - a)^2][x_0^2 + y_0^2 - k^2y_0^2] > 0,$$

ou, en simplifiant et en divisant par $x_0^2 + y_0^2$,

$$k^2[(x_0 - a)^2 + y_0^2] - (x_0^2 + y_0^2) > 0,$$

ou (3) $$(k^2-1)(x_0^2+y_0^2)-2ak^2x_0+a^2k^2>0.$$

Cette inégalité exprime que le point P doit être dans la région positive de la courbe définie par l'équation

$$(k^2-1)(x^2+y^2)-2ak^2x+a^2k^2=0.$$

Supposons d'abord $k^2-1\neq 0$. Cette équation peut s'écrire

$$(k^2-1)\left[\left(x-\frac{ak^2}{k^2-1}\right)^2+y^2-\frac{a^2k^2}{(k^2-1)^2}\right]=0.$$

Elle représente un cercle (C) qui a pour centre le point $\left(\frac{ak^2}{k^2-1}, 0\right)$ et pour rayon $\frac{ak}{|k^2-1|}$.

La région positive de ce cercle est la région extérieure si $k^2-1>0$, c'est-à-dire si les coniques (S) sont des hyperboles, et la région intérieure si $k^2-1<0$, c'est-à-dire si les coniques (S) sont des ellipses.

En conséquence, pour que les deux coniques (S) qui passent par le point P soient réelles, il faut et il suffit que le point P soit à l'extérieur du cercle (C) si $k>1$, et à l'intérieur si $k<1$.

On peut d'ailleurs remarquer que le cercle (C) est l'enveloppe des coniques (S) quand m varie, puisque l'équation du cercle (C) s'obtient en écrivant que l'équation de la conique (S) a une racine double en m.

Si $k=1$, c'est-à-dire si les coniques (S) sont des paraboles, l'inégalité (3) se réduit à

$$-2x_0+a>0;$$

elle exprime que le point P est, par rapport à la droite $x=\frac{a}{2}$, du même côté que l'origine.

Pour que les directrices des coniques (S) qui passent au point P soient rectangulaires, il faut que les racines de l'équation (2) aient un produit égal à -1; nous obtenons ainsi

$$\frac{x_0^2+y_0^2-k^2y_0^2}{x_0^2+y_0^2-k^2(x_0-a)^2}=-1,$$

et par suite, le lieu du point P a pour équation

$$(x^2+y^2)(k^2-2)-2ak^2x+a^2k^2=0.$$

Si $k\neq\sqrt{2}$, cette équation représente un cercle qui a pour centre le point $\left(\frac{ak^2}{k^2-2}, 0\right)$ et pour rayon $\frac{ak\sqrt{2}}{|k^2-2|}$. Si $k=\sqrt{2}$, elle représente une droite perpendiculaire à Ox et passant par le milieu de OA.

3. Les directions asymptotiques de la conique (S) sont définies par l'équation

$$(x^2+y^2)(1+m^2)-k^2(y-mx)^2=0;$$

en y remplaçant x par 1 et y par t, nous obtenons l'équation

$$t^2(1+m^2-k^2)+2k^2mt+1+m^2-k^2m^2=0$$

qui admet pour racines les pentes des asymptotes. Or ces racines sont rationnelles par rapport à m, car la quantité sous le radical est $(k^2-1)(1+m^2)^2$; elles ne sont réelles que si $k>1$, ce qui était à prévoir, et elles ont pour valeurs

$$\frac{-k^2m\pm(1+m^2)\sqrt{k^2-1}}{1+m^2-k^2} \quad \text{ou} \quad \frac{-m(h^2+1)\pm h(1+m^2)}{m^2-h^2},$$

en posant $h^2=k^2-1$.

Prenons par exemple le signe $+$; on peut écrire

$$\frac{-m(h^2+1)+h(1+m^2)}{m^2-h^2}=\frac{mh(m-h)-m+h}{m^2-h^2}=\frac{mh-1}{m+h};$$

l'autre racine s'en déduit en changeant h en $-h$.

Comme l'asymptote d'une hyperbole est le diamètre conjugué de sa propre direction, l'équation de l'asymptote qui a pour pente

$$\frac{mh-1}{m+h} \qquad \text{est} \qquad f'_x + \frac{mh-1}{m+h} f'_y = 0,$$

$f(x, y)$ désignant le premier membre de l'équation (1).

Cette équation peut s'écrire, en posant $P \equiv y - m(x-a)$,

$$x(1+m^2) + k^2 mP + \frac{mh-1}{m+h}[y(1+m^2) - k^2 P] = 0,$$

ou

$$(1+m^2)[x(m+h) + y(mh-1)] + k^2 P(1+m^2) = 0,$$

ou, en divisant par m^2+1,

$$hx(1-mh) + h(m+h)y + ma(1+h^2) = 0.$$

Comme cette équation renferme le paramètre m au premier degré, l'asymptote passe par un point fixe, et pour avoir les coordonnées de ce point, nous égalons à zéro le coefficient de m et le terme indépendant : ceci nous donne

$$-h^2x + hy + a(1+h^2) = 0, \qquad hx + h^2y = 0.$$

Nous en tirons $x = a$, $y = -\frac{a}{h}$; ce sont les coordonnées du point fixe.

Comme la deuxième asymptote se déduit de la première en changeant h en $-h$, elle passe par le point fixe $x = a$, $y = \frac{a}{h}$.

4. Une droite quelconque passant par l'origine, $ux + vy = 0$, rencontre la conique (S) en deux points P et Q et l'équation générale des coniques passant par les points M, N, P, Q est

$$(x^2+y^2)(1+m^2) - k^2(y - mx + ma)^2 + y(ux+vy) = 0.$$

Écrivons que cette équation représente un cercle, nous trouvons facilement

$$(4) \qquad u = -2k^2m, \qquad v = k^2(1-m^2),$$

et l'équation du cercle s'écrit

$$(x^2+y^2)(1+m^2-m^2k^2) + 2amk^2(mx-y) - k^2a^2m^2 = 0.$$

Le centre a pour coordonnées

$$x = -\frac{am^2k^2}{1+m^2-m^2k^2}, \qquad y = \frac{amk^2}{1+m^2-m^2k^2}.$$

Pour avoir le lieu de ce point, nous éliminons m entre ces deux équations. Nous avons d'abord $\frac{x}{y} = -m$, puis en remplaçant m par $-\frac{x}{y}$ dans l'une des deux équations, nous obtenons

$$x^2(k^2-1) - y^2 - ak^2x = 0.$$

Cette équation représente une conique ayant pour axe Ox, pour sommet l'origine et qui a même genre que la conique (S).

5. Remplaçons u et v par les valeurs (4), l'équation de la droite PQ s'écrit

$$(5) \qquad \frac{y}{x} = \frac{2m}{1-m^2},$$

et les points P, Q peuvent être définis comme les points de rencontre de cette droite et de la conique (S). On aura donc le lieu demandé en éliminant m entre les équations (5) et (2).

Mais si nous désignons par ω l'angle de PQ avec Ox, l'équation (5) nous donne $\operatorname{tg}\omega = \frac{2m}{1-m^2}$, et nous montre que $m = \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$; par suite, pour avoir l'équation du lieu en coordonnées polaires, il

suffit de remplacer dans l'équation (1) m par $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$, x par $\rho\cos\omega$ et y par $\rho\sin\omega$. Nous obtenons ainsi

$$\rho^2\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}\right)=k^2\left[\rho\sin\omega-\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}(\rho\cos\omega-a)\right]^2,$$

ou, en multipliant par $\cos^2\frac{\omega}{2}$,

$$\rho^2=k^2\left[\rho\sin\frac{\omega}{2}+a\sin\frac{\omega}{2}\right]^2;$$

nous en tirons les deux équations

$$\rho=k\sin\frac{\omega}{2}(\rho+a),\qquad \rho=-k\sin\frac{\omega}{2}(\rho+a).$$

Comme la seconde se déduit de la première en changeant ω en $\omega+2\pi$, ces deux équations représentent la même courbe. Nous discuterons la première, qu'on peut écrire

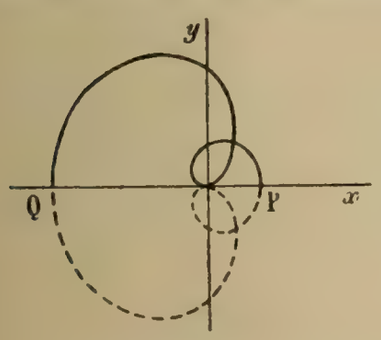
$$\rho=\frac{ak\sin\frac{\omega}{2}}{1-k\sin\frac{\omega}{2}},$$

ou, en posant $k=\frac{1}{p}$,

$$\rho=\frac{a\sin\frac{\omega}{2}}{p-\sin\frac{\omega}{2}}.$$

Si l'on change ω en $4\pi+\omega$, ρ ne change pas; donc, pour avoir toute la courbe, il suffit de faire varier ω dans un intervalle arbitraire (i) d'étendue égale à 4π. Si l'on change ω en $2\pi-\omega$, ρ ne change pas, donc la courbe est symétrique par rapport à Ox. Pour éviter de construire des portions de courbes symétriques, il faut décomposer l'intervalle (i) en deux intervalles tels qu'à toute valeur α du premier corresponde la valeur $2\pi-\alpha$ du second, ou qu'à toute valeur $\pi-\theta$ du premier corresponde la valeur $\pi+\theta$ du second. Nous prendrons pour intervalle (i) l'intervalle $(\pi-2\pi,\ \pi+2\pi)$, et nous le décomposons en deux, $(\pi-2\pi,\ \pi)$ et $(\pi,\ \pi+2\pi)$. On voit alors immédiatement qu'à toute valeur $\pi-\theta$ du premier correspond la valeur $\pi+\theta$ du deuxième.

Il suffira donc de faire varier ω dans l'un de ces intervalles, par exemple le premier $(-\pi,+\pi)$, de construire la courbe correspondante, puis de prendre la symétrique par rapport à Ox.



La fonction ρ est discontinue pour les racines de l'équation $p-\sin\frac{\omega}{2}=0$; cette équation admet des racines seulement si $p\leqslant 1$, ou si $k\geqslant 1$.

Enfin on a

$$\rho'=\frac{ap\cos\frac{\omega}{2}}{2\left(p-\sin\frac{\omega}{2}\right)^2}.$$

Premier cas. $p>1$, $k<1$.

ρ est continu pour toutes les valeurs de ω, et l'on a les variations suivantes :

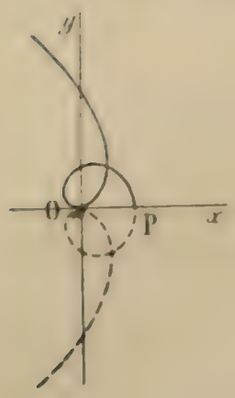
ω	$-\pi$		0		$+\pi$
ρ	$-\frac{a}{p+1}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{a}{p-1}$

la courbe correspondante est figurée en trait plein; les tangentes aux points P et Q sont perpendiculaires à Ox.

En achevant par symétrie par rapport à Ox, on obtient toute la courbe.

Deuxième cas. $p=1$, $k=1$.

ω	$-\pi$		0		$+\pi$
ρ	$-\frac{a}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



La branche infinie est parabolique, car on a

$$x = \rho \sin(\omega - \pi) = -\frac{a \sin\frac{\omega}{2} \sin\omega}{1 - \sin\frac{\omega}{2}},$$

ou, en posant $\omega = \pi - \varphi$,

$$x' = -\frac{a \cos\frac{\varphi}{2} \sin\varphi}{1 - \cos\frac{\varphi}{2}} = -\frac{a \cos\frac{\varphi}{2} \sin\varphi}{2 \sin^2\frac{\varphi}{4}}.$$

et l'on voit que x' est infini pour $\varphi = 0$. La courbe a donc des branches paraboliques dans la direction $\omega = \pi$.

Troisième cas. $p < 1$, ou $k > 1$.

Il existe alors un angle aigu $\frac{\alpha}{2}$ tel que l'on ait $\sin\frac{\alpha}{2} = p$; $\frac{\alpha}{2}$ étant compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, α sera compris entre 0 et π.

Nous avons alors

$$\rho = \frac{a \sin\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\omega}{2}},$$

et les variations suivantes :

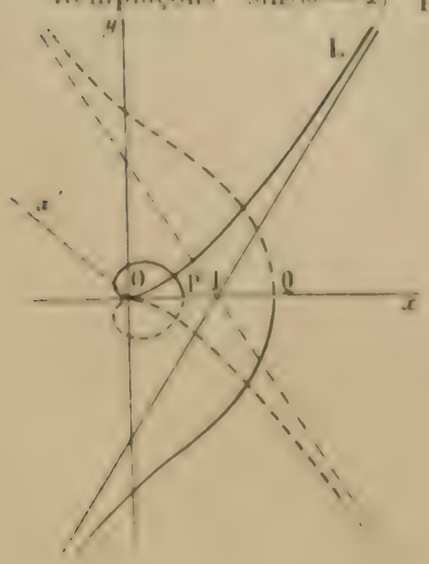
ω	$-\pi$		0		α		π
ρ	$-\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}+1}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}-1}$

Nous avons construit la courbe en supposant $\alpha < \frac{\pi}{2}$, ou $p < \frac{1}{\sqrt{2}}$, ou $k > \sqrt{2}$.

Cherchons si les branches infinies L et L′ ont une asymptote. Nous avons

$$x' = \rho \sin(\omega - \alpha) = \frac{a \sin\frac{\omega}{2} \sin(\omega - \alpha)}{\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\omega}{2}}.$$

Remplaçons $\sin(\omega - \alpha)$ par $2 \sin\frac{\omega - \alpha}{2} \cos\frac{\omega - \alpha}{2}$, puis par $4 \sin\frac{\omega - \alpha}{4} \cos\frac{\omega - \alpha}{4} \cos\frac{\omega - \alpha}{2}$, et $\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\omega}{2}$ par $2 \sin\frac{\alpha - \omega}{4} \cos\frac{\alpha + \omega}{4}$. On peut alors diviser haut et bas par $2 \sin\frac{\omega - \alpha}{4}$, et l'on a



$$x' = \frac{-2a \sin\frac{\omega}{2} \cos\frac{\omega - \alpha}{4} \cos\frac{\omega - \alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha + \omega}{4}}.$$

Pour $\omega = \alpha$, x' a pour limite $-2a \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. L'équation de l'asymptote est $\rho \sin(\omega - \alpha) = -2a \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;

Cette droite rencontre Ox en un point I qui a pour abscisse $\frac{a}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$; ce point est compris entre P et Q.

Pour étudier la position de la courbe par rapport à l'asymptote, nous cherchons le signe de $x' + 2a \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ pour les valeurs de ω voisines de α. Nous avons

$$x' + 2a \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2a . \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\omega+\alpha}{4} - \sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega-\alpha}{4}\cos\frac{\omega-\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha+\omega}{4}};$$

le dénominateur du second membre est positif pour les valeurs de ω voisines de α. Quant au numérateur, c'est une fonction continue, qui s'annule pour $\omega = \alpha$, et dont la dérivée prend une valeur négative pour $\omega = \alpha$. Donc cette fonction est décroissante aux environs de α, elle est positive pour $\omega < \alpha$ et négative pour $\omega > \alpha$.

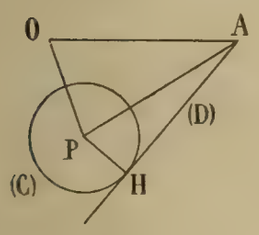
Par suite, la branche L qui correspond à $\omega < \alpha$ est, par rapport à l'asymptote, du côté des x' positifs, et la branche L′ du côté des x' négatifs.

L'aspect de la courbe est un peu différent si $k < \sqrt{2}$.

Enfin si $k = \sqrt{2}$, c'est-à-dire si les coniques (S) sont des hyperboles équilatères, α est égal à $\frac{\pi}{2}$, et les deux asymptotes sont confondues suivant une perpendiculaire à Ox.

Remarques géométriques.

2. Cherchons à déterminer les coniques (S) qui passent par un point donné P. Supposons le problème résolu et soit (D) la directrice d'une conique (S) passant au point P. Joignons OP et abaissons PH perpendiculaire sur (D). Nous avons



$$\frac{PO}{PH} = k, \qquad \text{ou} \qquad PH = \frac{OP}{k};$$

ceci montre que la droite (D) est tangente au cercle (C) qui a pour centre le point P et pour rayon $\frac{OP}{k}$.

Du point A on peut mener deux tangentes à ce cercle; il y a donc deux coniques (S) passant au point P.

Pour que ces coniques soient réelles, il faut que le point A soit extérieur au cercle (C), et pour cela il faut que l'on ait

$$AP > PH, \qquad \text{ou} \qquad AP > \frac{OP}{k},$$

ou enfin

$$\frac{PO}{PA} < k.$$

Le lieu du point P tel que l'on ait $\frac{PO}{PA} = k$ est un cercle (γ) ayant son centre sur OA et rencontrant OA en deux points E et F tels que l'on ait

$$\frac{\overline{EO}}{\overline{EA}} = k, \qquad \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = -k.$$

Si $k < 1$, le point O est entre E et F, et lorsque k diminue, les points E et F se rapprochent du point O.

On en conclut que les points P pour lesquels $\frac{PO}{PA} < k$ sont à l'intérieur du cercle (γ).

Si $k > 1$, le point A est entre E et F, et lorsque k diminue, les points E et F s'éloignent du point A.

Par suite, pour qu'on ait $\frac{PO}{PA} < k$, il faut que le point P soit extérieur au cercle (γ).

Enfin si $k = 1$, la condition $\frac{PO}{PA} < 1$ exprime que le point P est par rapport à la perpendiculaire au milieu de OA du même côté que le point O.

Pour que les directrices des coniques (S) passant au point P soient perpendiculaires, il faut que les tangentes issues de A au cercle (C) soient perpendiculaires; pour cela, il faut qu'on ait $AP = PH\sqrt{2}$, ou $\frac{PO}{PA} = \frac{k}{\sqrt{2}}$. Le lieu du point P est un cercle ayant son centre sur OA.

3. Cherchons maintenant les asymptotes de la conique (S) qui a pour directrice la droite (D). L'axe focal est la perpendiculaire OH à (D), et si l'on désigne par a, b les demi-axes de l'hyperbole ($c = \sqrt{a^2 + b^2}$), et par ω son centre, on a

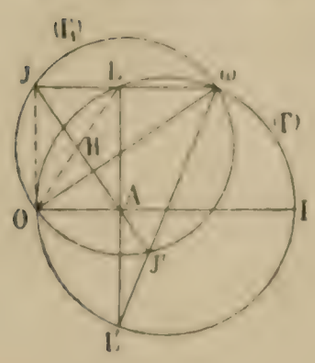
$$OH = O\omega - \omega H = c - \frac{a^2}{c} = \frac{c^2 - a^2}{c},$$

et

$$\frac{O\omega}{OH} = \frac{c^2}{c^2 - a^2} = \frac{k^2}{k^2 - 1}, \qquad O\omega = \frac{k^2}{k^2 - 1}.OH.$$

Comme le point H se déplace sur le cercle qui a pour diamètre OA, le lieu du point ω est le cercle (Γ) de diamètre OI, tel que $OI = OA.\frac{k^2}{k^2 - 1}$.

On sait que les directrices d'une hyperbole passent par les projections des foyers sur les asymptotes; par suite, pour construire les asymptotes de la conique (S), nous traçons le cercle (Γ_1) qui a pour diamètre $O\omega$; ce cercle rencontre (D) aux points J et J'; les asymptotes sont les droites ωJ et ωJ'.



Soient, d'autre part, L et L' les points du cercle (Γ) qui se projettent en A sur OI; je vais montrer que les asymptotes ωJ et ωJ' passent respectivement par les points L et L'.

Pour cela, il suffit d'établir que les angles OωJ et OωL sont égaux, ou que les arcs OJ et OL ont le même nombre de degrés, ou encore que les cordes OJ et OL sont proportionnelles aux diamètres des cercles correspondants.

Or, on a

$$\overline{OJ}^2 = OH.O\omega, \qquad \overline{OL}^2 = OA.OI$$

et

$$\frac{\overline{OJ}^2}{\overline{OL}^2} = \frac{OH.O\omega}{OA.OI} = \frac{\overline{O\omega}^2}{\overline{OI}^2}, \qquad \frac{OJ}{OL} = \frac{O\omega}{OI},$$

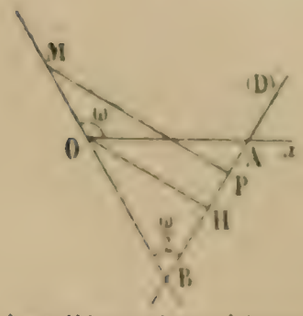
ce qui démontre la proposition.

On peut d'ailleurs remarquer que

$$\overline{AL}^2 = OA.AI = a(OI - a) = a^2\left(\frac{k^2}{k^2 - 1} - 1\right),$$

ou $AL = \frac{a}{\sqrt{k^2 - 1}}$, ce qui correspond bien au résultat obtenu dans la solution analytique.

5. Enfin, on peut obtenir très simplement l'équation en coordonnées polaires du lieu des points P et Q. Il suffit de remarquer que les cordes PQ et MN sont également inclinées, mais en sens contraires sur les axes de la conique (S). On est donc ramené à trouver le lieu des points de rencontre de cette conique et de la droite symétrique de OA par rapport à l'axe focal.



Soit OB la symétrique de OA par rapport à l'axe focal OH, et soit M un point du lieu, ayant pour coordonnées polaires ρ et ω. Nous avons $\frac{OM}{MP} = k$; or

$$MP = MB \sin\frac{\omega}{2} = (a + \rho)\sin\frac{\omega}{2}.$$

On a donc

$$\frac{\rho}{(a + \rho)\sin\frac{\omega}{2}} = k, \qquad \text{ou} \qquad \rho = \frac{ak\sin\frac{\omega}{2}}{1 - k\sin\frac{\omega}{2}};$$

c'est l'équation obtenue plus haut.

PIERRE VIVIER, lycée d'Orléans.

ÉCOLE NAVALE

Premier concours de 1918.

Algèbre, analyse et trigonométrie.

I. — **2450.** 1° Étudier les variations de la fonction

$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\mathrm{L}x,$$

L désignant le logarithme népérien, et construire la courbe représentative (C) rapportée à deux axes rectangulaires Ox, Oy.

2° Les tangentes à la courbe (C) aux points M et M′ coupent l'axe Oy aux points T et T′ : montrer que la longueur de l'arc MM′ est égale à la distance TT′.

3° Calculer, en fonction des abscisses des points M et M′, l'aire comprise entre la courbe (C), l'axe Oy et les segments MT, M′T′.

II. — **2451.** On suppose que l'expression

$$f(x) = \cos 3x + a\cos 2x + b\cos x + c,$$

qui peut être mise sous la forme d'un polynome en $\cos x$, s'annule pour $x = \alpha$, $x = \beta$, $x = \gamma$; α, β, γ désignent trois arcs dont les extrémités sur le cercle trigonométrique sont distinctes.

1° Calculer a, b, c en fonction de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

2° Trouver une fonction primitive de $\frac{1}{f(x)}$.

Géométrie analytique.

2452. — Dans un plan on donne un cercle fixe (A) tangent aux deux axes rectangulaires Ox et Oy.

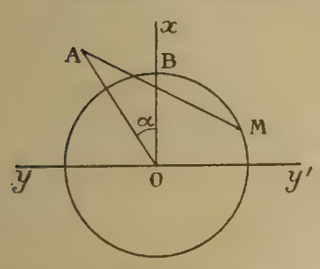
1° Un cercle variable (B), dont le centre parcourt l'axe Ox, passe par un point fixe P, donné sur l'axe Oy. Démontrer que le lieu des centres de similitude des cercles (A) et (B) est une conique. Discuter la nature de cette conique, et démontrer que ses directions asymptotiques restent conjuguées par rapport à deux directions fixes lorsque le point P se déplace sur Oy. — Dans le cas où le lieu est une hyperbole, déterminer ses asymptotes; dans le cas où il est une parabole, déterminer son axe de symétrie, son sommet et son foyer.

2° On mène au cercle (A) une tangente variable (D) et par l'origine des coordonnées une droite (Δ) dont le coefficient angulaire est égal et de signe contraire à celui de (D). Trouver le lieu du point de rencontre des droites (D) et (Δ).

Ce lieu comprend une conique; démontrer que d'un point quelconque de cette conique on voit sous deux angles égaux la portion de droite joignant ses deux foyers, et le cercle (A).

Mécanique.

2453. — Un point pesant M de masse m est assujetti à rester sur un cercle O dont le plan est vertical et dont le rayon est R. Il est de plus attiré par un point fixe A proportionnellement à sa distance à ce point. Le point A est dans le plan du cercle; il est déterminé par la longueur $OA = l$ et par l'angle α que forme OA avec la verticale ascendante Ox du point O. La force d'attraction est $m\omega^2.AM$ (ω étant une constante). Il n'y a pas de frottement.



1° Déterminer les positions d'équilibre du point M par la valeur de l'angle θ formé avec Ox par le rayon aboutissant à chaque position d'équilibre. Montrer que l'une des positions d'équilibre est stable, c'est-à-dire que si on écarte un peu le point M de cette position les forces tendent à l'y ramener. Trouver en ce point la réaction du cercle.

2° On suppose le point A sur Ox ($\alpha = 0$, et l ayant une valeur telle que la position d'équilibre stable soit B, le point le plus haut du cercle). On place le point M sans vitesse en un point M_0 du cercle à une distance y_0 du diamètre horizontal yy'. Démontrer par le théorème de la force vive que le point M passera par B et atteindra sans vitesse le point M_1 symétrique de M_0 par rapport à Ox, et oscillera indéfiniment entre M_0 et M_1. Trouver sa vitesse en B. — Examiner le cas des petites oscillations.

3° Montrer que l'on peut placer le point fixe A sur Ox en une position telle que le point M, étant lancé de M_0 avec une vitesse tangentielle quelconque v_0, parcoure indéfiniment le cercle d'un mouvement uniforme.

Calcul.

Calculer les angles A, A', B, B', C, C', compris entre 0° et 180°, donnés par les formules

$$\frac{A+A'}{2}=90^\circ+a,\qquad \operatorname{tg}\frac{A-A'}{2}=\operatorname{cotg}a\cos\varphi,\qquad \frac{B+B'}{2}=90^\circ+b,\qquad \operatorname{tg}\frac{B-B'}{2}=\operatorname{cotg}b\cos\varphi,$$

$$\frac{C+C'}{2}=90^\circ+c,\qquad \operatorname{tg}\frac{C-C'}{2}=\operatorname{cotg}c\cos\varphi,\qquad \operatorname{tg}\varphi=\frac{2\sqrt{\cos p\cos(p-a)\cos(p-b)\cos(p-c)}}{\sin a\sin b\sin c},$$

$$a+b+c=2p,$$

et vérifier que les valeurs obtenues satisfont aux relations

$$\frac{\sin A}{\sin A'}+\frac{\sin B}{\sin B'}=\frac{\sin C}{\sin C'}.$$

On pose

$$a=25^\circ\,13'\,25'',\qquad b=40^\circ\,28'\,14'',\qquad =58^\circ\,43'\,11''.$$

Épure.

Prendre comme ligne de terre le petit axe de la feuille.

On donne dans le plan horizontal de projection un triangle ABC tout entier à gauche du grand axe de la feuille. A est à 9cm, B à 1cm, C à 5cm de ce grand axe. A et B ont pour éloignement 3cm et C, 11cm. Ce triangle est la base d'une surface prismatique dont les arêtes AA', BB', CC' sont des droites de front inclinées à 45° sur le plan horizontal et telles qu'on s'élève sur elles de gauche à droite.

Une sphère a pour centre le point qui est situé dans le plan de profil du grand axe de la feuille, a pour éloignement 7cm et pour cote 4cm. Cette sphère est tangente à l'arête AA'.

Représenter la portion solide de la sphère située au-dessus du plan horizontal de projection et intérieure à la surface prismatique.

Physique.

I. — **2454**. Dans un appareil de Dulong et Petit, pour la mesure de la dilatation absolue du mercure, les deux tubes verticaux sont régulièrement cylindriques; leur section est de 7cm². Le tube horizontal qui les relie à la partie inférieure a un volume négligeable; il est muni d'un robinet qui permet d'établir ou de supprimer la communication entre les deux tubes verticaux.

1° Le robinet étant ouvert, et la température des deux tubes étant 0°, la hauteur du mercure dans chaque tube est de 120cm. On ferme le robinet et l'on porte l'un des tubes à 140°. De combien s'élève dans ce tube le niveau du mercure?

2° On ouvre ensuite le robinet. De combien varie chacun des niveaux? Quelle quantité de mercure passe d'un tube à l'autre et dans quel sens passe-t-elle?

Coefficient de dilatation absolue du mercure : 0,000182.

Coefficient de dilatation linéaire de la substance des tubes : 0,000007.

Densité du mercure : 13,6.

II. — **2455**. Démontrer l'existence et calculer la position des foyers et des plans principaux du système optique constitué par une sphère pleine en verre, plongée dans l'air, en ne considérant que des rayons peu inclinés sur un diamètre de cette sphère, formant axe du système.

Calculer la dimension de l'image du Soleil fournie par ce système quand le diamètre considéré est dirigé vers le centre du Soleil.

Rayon de la sphère : 20cm. Indice du verre : 1,52. Diamètre apparent du Soleil : $\frac{1}{2}$ degré.

Deuxième concours de 1918.

Algèbre et analyse.

I. — **2456** On considère la fonction

$$y=x.\log\left|\frac{x}{x+1}\right|.$$

Le signe log signifie logarithme népérien, et $|a|$ représente la valeur absolue de a.

Étudier les variations de la fonction et construire la courbe représentative.

Calculer l'aire limitée par l'axe des x et par la portion de la courbe située au-dessus de l'axe des x. Le calcul devra être fait à 1^{cm^2} près. L'unité de longueur est le décimètre.

Montrer que la fonction donnée est une intégrale de l'équation

$$x(x+1)y' = (x+1)y + x.$$

Intégrer cette équation.

II. — **2457**. A une valeur donnée de la quantité complexe Z correspondent trois valeurs de la quantité complexe z telles que $Z = z^3$. On représente chaque nombre complexe par un point dont les coordonnées sont la partie réelle et le coefficient de i de ce nombre.

Déterminer un point A représentant Z tel que si on appelle B, C, D les points qui représentent les valeurs correspondantes de z, les quatre points forment un parallélogramme.

Géométrie analytique.

I. — **2458**. Soient Ox, Oy deux axes rectangulaires, P un point de leur plan, α, β ses coordonnées. Former l'équation d'une conique (S) satisfaisant aux trois conditions suivantes : elle passe par l'origine O des coordonnées; elle admet, comme diamètre conjugué des cordes parallèles à Ox, la corde joignant les points de contact des tangentes menées du point P à la conique (C) ayant pour équation $x^2 - 2y = 0$; elle admet enfin, comme diamètre conjugué des cordes parallèles à Oy, la corde joignant les points de contact des tangentes menées du point P à la conique (C') ayant pour équation $y^2 - 2x = 0$.

A tout point P correspond ainsi une conique (S). Étudier comment varie le genre (ellipse, hyperbole, parabole) de (S) suivant la position de P.

Déterminer le lieu que doit décrire P pour que (S) soit une hyperbole dont les asymptotes se coupent sous un angle donné θ. Ce lieu est une conique dont on demande les axes et l'équation réduite.

Trouver l'équation de l'enveloppe de celles des coniques (S) qui sont des paraboles.

II. — **2459**. Les axes Ox, Oy, Oz sont rectangulaires. On appelle Δ la droite ayant pour équations $x = 1$ $y = z$, Δ' la symétrique de Δ par rapport à Oz, et enfin D la droite rencontrant Δ et Δ' et passant par le point M de coordonnées $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$, $z = 0$.

Déterminer l'angle θ de la droite D et de la droite L ayant pour équations $x = y = z$; étudier les variations de cet angle lorsque M parcourt le cercle qu'il décrit quand le paramètre α varie. On prend comme sens positifs sur D et L ceux qui correspondent aux cotes z croissantes.

Soit A le point de coordonnées $x = 1$, $y = z = 0$. Calculer les coordonnées de sa projection sur la droite D.

Mécanique.

2460. — On donne trois axes rectangulaires, Ox, Oy, Oz, et un point matériel, M. Soient A et B les pieds des perpendiculaires MA et MB abaissées du point M respectivement sur Ox et Oy.

Le point M est soumis à l'action de deux forces P et Q.

La force P est dirigée suivant MA, de M vers A. La force Q suivant MB, de M vers B. Les intensités des forces P et Q sont données par les formules

$$P = 9mk^2\overline{MA}, \qquad Q = 16mk^2\overline{MB},$$

où m désigne la masse du point M et k une constante donnée.

1° Étudier le champ de forces résultant des forces P et Q (fonction des forces, lignes de forces, surfaces de niveau, travail pour un déplacement donné).

2° Déterminer le mouvement du point M, supposé entièrement libre, soumis à l'action des deux seules forces P et Q et partant de l'origine des coordonnées avec une vitesse initiale donnée.

Ce mouvement est-il périodique?

3° On suppose en second lieu que le point M est assujetti à rester, en y glissant sans frottement, sur la circonférence (C) de rayon R, ayant pour équations paramétriques

$$x = R\sin\theta, \qquad y = \frac{3R}{4}\cos\theta, \qquad z = \frac{R}{4}\sqrt{7}\cos\theta.$$

Déterminer le mouvement, sur la circonférence (C), du point M soumis à l'action des forces P et Q et animé d'une vitesse initiale.

Calculer la réaction de la circonférence sur le point M.

Calcul.

Soit c le plus petit angle positif tel que

$$\operatorname{tg} c = \frac{a^2 \sin 2\alpha \cos\alpha}{b^2 \cos(\beta - \alpha)}.$$

Calculer le nombre x donné par la formule

$$x = \frac{\operatorname{tg} 2\beta - c \operatorname{tg} 2\alpha - c}{\cos^2 \alpha + \beta},$$

$$a = 0{,}12928; \qquad b = 1{,}6256; \qquad \alpha = 49^\circ\, 25'\, 35''; \qquad \beta = 170^\circ\, 10'\, 3''.$$

Epure.

Soit ABCD un tétraèdre régulier. Une sphère tangente à la face ABC a pour centre le milieu de l'arête CD. Représenter, par ses deux projections, le tétraèdre après enlèvement de la partie intérieure à la sphère. Ce solide est opaque.

La ligne de terre, parallèle aux petits côtés de la feuille, est à $16^{cm},5$ du bord inférieur. Les sommets A et B sont dans le plan horizontal de projection; ils se projettent horizontalement : le premier à 6^{cm} à droite du grand axe de la feuille et à 1^{cm} en avant de la ligne de terre, le second à 6^{cm} à gauche du grand axe et à 8^{cm} en avant de la ligne de terre. Le sommet C est dans le plan vertical de projection, au-dessus du plan horizontal de projection. Le sommet D est au-dessus du plan ABC.

Physique.

I. — **2461**. Pour déterminer les éléments principaux d'un système centré convergent, on déplace une source lumineuse d'un côté du système sur son axe et on observe de l'autre côté les déplacements de l'image.

Soient : x un premier déplacement de la source mesuré à partir d'une position initiale donnée, x' le déplacement correspondant de l'image, y un second déplacement de la source et y' le déplacement correspondant de l'image, ces quatre quantités étant comptées positivement dans le même sens, inverse de la propagation de la lumière.

On demande :

a) d'exprimer en fonction de x, x', y, y' la distance focale f du système;

b) de voir si, pour une distance focale donnée, les valeurs prises simultanément par x et x' peuvent être quelconques ou doivent satisfaire à certaines conditions;

c) de voir ce que devient la formule générale obtenue pour f quand on suppose :

1° $x = +\infty$, les autres quantités restant finies.

2° $x = +\infty$, $y' = -\infty$;

d) de voir à quelles positions particulières de la source et de l'image par rapport au système correspondent les cas suivants :

1°	$x = \infty$,	$x' = -f$,	$y = f$,	$y' = -\infty$,
2°	$x = \infty$,	$x' = f$,	$y = -f$,	$y' = -\infty$,
3°	$x = \infty$,	$x' = -f$,	$y = 2f$,	$y' = -2f$;

e) en supposant qu'on puisse commettre sur la lecture de chaque position de la source ou de l'image dans un sens ou dans l'autre une erreur au plus égale à ε en valeur absolue, de calculer, pour chacun des trois cas précédents, le maximum de l'erreur possible sur la valeur de f. En déduire quelle est, à ce point de vue, la plus avantageuse des trois méthodes.

II. — **2462**. On rend solidaires l'un de l'autre deux barreaux aimantés dont les moments magnétiques ont respectivement pour valeurs 300 et 400 unités C. G. S., leurs axes magnétiques étant à angle droit l'un de l'autre.

Ce système étant suspendu librement autour d'un axe vertical de manière que les deux axes magnétiques soient horizontaux, on demande quel est, en unités C. G. S. et par rapport à l'axe de suspension, le moment du couple auquel ce système est soumis quand il a tourné autour de cet axe d'un angle de 30° à partir de la position d'équilibre qu'il tend à prendre dans le champ magnétique terrestre. La composante horizontale de l'intensité de ce champ sera supposée égale à 0,2 C. G. S.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

Coulommiers. — Imprimerie Paul BRODARD.

31e Année. Octobre 1920. N° 1.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. A. LÉVY

Professeur de Mathématiques spéciales (Centrale), au lycée Carnot.

Considérons l'équation réduite du troisième degré, à coefficients réels

$$x^3 + px + q = 0; \tag{1}$$

elle a au moins une racine réelle, α; appelons α_1 et α_2 les deux autres; nous aurons

$$\alpha^3 + \alpha_1^3 + \alpha_2^3 = -3q,$$
$$\alpha_1^3 + \alpha_2^3 = -3q - \alpha^3,$$
$$\alpha_1^3\alpha_2^3 = -\frac{q^3}{\alpha^3};$$

par suite, α_1^3, α_2^3 sont racines de l'équation

$$X^2 + (3q + \alpha^3)X - \frac{q^3}{\alpha^3} = 0;$$

ces racines sont réelles si

$$(3q + \alpha^3)^2 + \frac{4q^3}{\alpha^3} > 0,$$
$$\frac{z(z + 3q)^2 + 4q^3}{z} > 0, \qquad z = \alpha^3,$$

ou

$$\frac{z^3 + 6qz^2 + 9q^2z + 4q^3}{z} > 0,$$
$$\frac{(z + q)^2(z + 4q)}{z} > 0,$$

ou, enfin,

$$z(z + 4q) > 0.$$

Nous voyons donc que, si l'équation (1) a ses trois racines réelles, aucune d'elles n'est comprise entre 0 et $\sqrt[3]{-4q}$. Si elle n'a qu'une racine réelle, celle-ci est comprise entre 0 et $\sqrt[3]{-4q}$.

Substituons à x ces deux nombres; nous obtenons q et $p\sqrt[3]{-4q} - 3q$. La condition de réalité est

$$pq\sqrt[3]{-4q} - 3q^2 > 0,$$
$$pq\sqrt[3]{-4q} > 3q^2,$$

ou, en élevant au cube,

$$-4q^4p^3 > 27q^6,$$
$$q^4(4p^3 + 27q^2) < 0,$$

et, enfin,

$$4p^3 + 27q^2 < 0.$$

C'est la condition classique.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE

Concours de 1914 (*Suite*).

2261. — *Deux lentilles identiques, dont toutes les aberrations sont négligeables, et qu'on considérera comme infiniment minces, forment un système optique centré. Leur distance focale est* $f = 30^{cm}$, *l'intervalle qui les sépare est* $d = 15^{cm}$; *elles ont* 5^{cm} *de diamètre et sont placées aux deux extrémités d'un tube opaque de même diamètre qu'elles; au milieu de l'intervalle qui les sépare se trouve un diaphragme laissant libre une ouverture circulaire de* 35^{mm} *de diamètre, centrée sur l'axe et perpendiculaire à l'axe.*

1° *Déterminer et représenter les positions des foyers et des plans principaux du système.*

2° *Indiquer la marche des rayons qui, venant d'un point situé très loin sur l'axe, contribuent à former l'image.*

3° *On se sert du système pour photographier des objets situés très loin dans le voisinage de l'axe. Calculer de quelle quantité on peut déplacer la plaque parallèlement à elle-même sans que l'image cesse d'être* bonne.

On admettra que l'image est bonne, *tant que l'œil, regardant la photographie à une distance de* 25^{cm}, *ne s'aperçoit pas que l'image d'un point n'est pas un point.* (*On supposera que la plus petite dimension angulaire appréciable est égale à 2 minutes centésimales.*)

4° *Comment varie la quantité calculée au paragraphe précédent, quand la distance d des deux lentilles varie, le même diaphragme étant toujours placé à égale distance des deux lentilles?*

On fera varier la distance d depuis zéro jusqu'à la valeur pour laquelle le système cesse d'être utilisable comme objectif photographique.

5° *Comment varie, dans les mêmes conditions, la durée de pose qui produit toujours la même impression de la plaque?*

On admettra, pour ce calcul, que, dans les conditions de l'expérience, l'impression de chaque élément de surface de la plaque dépend seulement de la quantité totale *de lumière reçue par cet élément. On met au point sur la plaque, et on néglige les pertes de lumière par absorption et par réflexions sur les faces des lentilles.*

On distinguera le cas où l'objet se réduit à un point (étoile) du cas où il a des dimensions angulaires finies. (*École normale supérieure et bourses de licence. Concours de 1914. Groupe I.*)

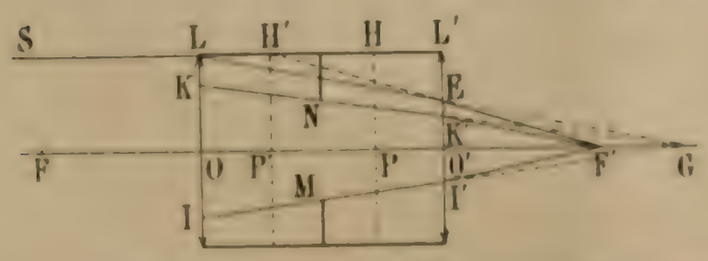
Nous désignerons par a le diamètre commun aux deux lentilles, par b le diamètre du diaphragme.

1° Un rayon SL, parallèle à l'axe, tombant sur le bord de la première lentille, se dirige, après réfraction, vers le foyer G de celle-ci, rencontre en E la seconde et va enfin passer par le foyer d'émergence F' du système. On a

$$\frac{1}{OG} - \frac{1}{OF'} = \frac{1}{f}, \qquad OG = -(f-d), \qquad OF' = -10.$$

Les directions SL et EF' se rencontrent au point H, qui détermine la position du plan principal PH'. La distance O'O étant la moitié de la distance focale GO, le point E est au milieu de O'L' et, par conséquent, au milieu de F'H', donc

$$OP = FO = 10.$$



Le système étant symétrique, le foyer d'incidence F et le plan principal correspondant PH sont symétriques de F' et de P'H' par rapport au diaphragme.

2° Le point où le rayon LE rencontre le plan du diaphragme est à une distance de l'axe moyenne entre OL et O'E, entre $\frac{5}{2}$ et $\frac{2,5}{2}$, ce qui fait $\frac{3,75}{2}$. Le diaphragme n'ayant que 3,5 de diamètre, ce rayon est intercepté. Le faisceau utile est donc limité, entre les lentilles, par les rayons MG et NG, qui rencontrent respectivement les deux lentilles en I et K, I' et K'. On en déduit facilement les rayons incidents, qui sont parallèles à l'axe, et les rayons émergents, qui passent par F'.

Le diamètre IK de la partie utile de la première lentille est donné par la proportion

$$\frac{IK}{b} = \frac{f}{f - \frac{d}{2}}, \qquad \text{d'où} \qquad IK = 4\frac{2}{3}.$$

3° Considérons le diamètre maximum ε d'une tache pouvant passer pour un point : il est réalisé à une distance δ du foyer F' tel que l'on ait

$$\frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{F'O'}{I'K'}.$$

Or, $\qquad F'O' = 10 \qquad$ et $\qquad I'K' = \frac{1}{2}IK = \frac{7}{3}, \qquad$ d'où $\qquad \frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{30}{7}.$

Mais ε est défini par la condition

$$\frac{\varepsilon}{25} = 2\frac{\pi}{200 \times 100} \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon = 0,007854.$$

On en déduit

$$\delta = 0^{cm},03366.$$

Le déplacement tolérable, pouvant se faire de part et d'autre du foyer, est double de cette distance : il est donc de $\frac{2}{3}$ de millimètre.

4° Le système peut servir d'objectif pour les valeurs de d comprises entre 0 et f. Quand d est petit, le faisceau utile est limité par le diaphragme, comme dans le cas précédent. Quand d est grand, le faisceau utile est limité par la première lentille, car si, en particulier, $d = f$, la section du faisceau réfracté par la première lentille n'aura, dans le plan du diaphragme, que $2^{cm},5$ de diamètre.

Considérons le premier cas. Soit b' le diamètre I'K' de la section faite par la seconde lentille dans le faisceau. Les deux triangles GI'K' et GMN donnent

$$\frac{b'}{b} = \frac{f-d}{f-\frac{d}{2}} = \frac{2(f-d)}{2f-d}.$$

Les points G et F' étant conjugués, on a

$$-\frac{1}{f-d} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}, \qquad \text{d'où} \qquad -p' = \frac{f(f-d)}{2f-d}.$$

Enfin,

$$\frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{-p'}{b'}.$$

En remplaçant b' et p' par leur valeur, on trouve

$$\frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{f}{2b} = \frac{30}{7}.$$

La latitude de mise au point est indépendante de d.

Considérons le second cas. Le diamètre a' de la section faite par la seconde lentille dans le faisceau est déterminé maintenant par la proportion

$$\frac{a'}{a} = \frac{f-d}{f};$$

p' conserve la même expression et $\frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{-p'}{a}$, d'où l'on déduit

$$\frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{f^2}{2f - d\,a} = \frac{180}{60 - d}.$$

La latitude de mise au point augmente en même temps que d. En particulier, pour $d = f = 30$, on a $\frac{\delta}{\varepsilon} = 6$.

On peut calculer la valeur de d servant de transition entre les deux cas en écrivant que les deux formules précédentes donnent la même valeur pour $\frac{\delta}{\varepsilon}$;

$$\frac{180}{60 - d} = \frac{30}{7}, \qquad d = 18^{\text{cm}}.$$

3° Considérons d'abord le cas d'une étoile. La quantité de lumière est proportionnelle à la surface de la partie utile IK de la première lentille. Si le faisceau est limité par le diaphragme, on a

$$\frac{\text{IK}}{\text{MN}} = \frac{f}{f - \frac{d}{2}} = \frac{2f}{2f - d}, \qquad \text{IK} = 3{,}5 \times \frac{60}{60 - d}.$$

Le temps de pose est proportionnel à $\frac{1}{\text{IK}^2} = \frac{(60 - d)^2}{210^2}$. Il diminue quand d augmente, puis devient constant quand d dépasse 18^{cm}, puisque le faisceau n'est plus limité alors que par la première lentille.

Considérons le cas d'un objet à diamètre apparent appréciable. On sait que, dans ce cas, l'*éclairement* de la plaque en P′ peut être considéré comme produit par la surface IK′ considérée comme ayant le même éclat que l'objet. Cet éclairement est donc proportionnel à $\frac{\text{IK}'^2}{p'^2}$ et le temps de pose à $\frac{p'^2}{\text{IK}'^2}$.

Si le faisceau est limité par le diaphragme, il faut remplacer IK′ par b' calculé ci-dessus, et le rapport qui mesure le temps de pose est trouvé égal à $\frac{f^2}{4b^2}$; il est indépendant de d.

Si le faisceau est limité par la première lentille, il faut remplacer IK′ par a et on trouve $\frac{f^2}{a^2\,2f - d)^2}$, valeur qui augmente en même temps que d.

Dans les deux cas, le temps de pose est proportionnel au carré de la latitude de mise au point.

Groupe II.

2264. — *Un mobile* M *parcourt la courbe dont l'équation en coordonnées polaires est* $r = e^{\theta}$, *l'unité de longueur étant le mètre. On suppose que le rayon vecteur* OM *tourne autour du point* O *avec une vitesse angulaire constante de* 100 *tours à la minute. Calculer la vitesse du point* M *à l'instant* t. *Calculer la vitesse moyenne depuis l'instant où l'angle polaire* θ *est nul, jusqu'à l'instant où cet angle est égal à* $\frac{\pi}{2}$; *on exprimera le résultat en unités* C. G. S.

En coordonnées polaires, les composantes de la vitesse sont

$$v_R = \frac{dr}{dt}, \qquad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt};$$

la première est la vitesse radiale, portée par le rayon vecteur; la seconde est la vitesse de circulation, portée par l'axe perpendiculaire au rayon vecteur et orienté dans le sens $\theta + \frac{\pi}{2}$.

Ici,

$$v_R = 2e^{2\theta}\frac{d\theta}{dt}, \qquad v_P = e^{2\theta}\frac{d\theta}{dt};$$

la quantité $\frac{d\theta}{dt}$ est la vitesse angulaire; pour l'obtenir, dans le cas actuel, nous remarquons que le rayon décrit un angle égal à 200π dans une minute; la vitesse angulaire en radians est donc

$$\frac{200\pi}{60} = \frac{10\pi}{3};$$

en degrés, elle vaudrait 600°.

Appelons ω cette vitesse angulaire, $\omega = \frac{10\pi}{3}$; nous aurons $\theta = \omega t$ et

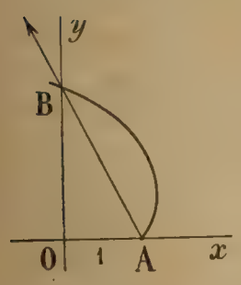
$$v_R = 2\omega e^{2\omega t}, \qquad v_P = \omega e^{2\omega t};$$

La vitesse, à l'instant t_1 est

$$v = \sqrt{v_R^2 + v_P^2} = \omega\sqrt{5}\, e^{2\omega t}.$$

Cette vitesse est la vitesse en mètres à la seconde; en centimètres, elle aura une valeur numérique 100 fois plus grande.

Soient A le point de la spirale qui est sur Ox, B, celui qui est sur Oy; nous avons $OA = 1$, $OB = e^{\pi}$; les composantes du vecteur AB sont -1, et e^{π}; en les divisant par le temps employé par le mobile pour aller du point A au point B, nous aurons les composantes de la vitesse moyenne. Or, le temps employé pour aller du point A au point B est donné par $2\omega t = \pi$; c'est $t = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi \times 3}{20\pi} = \frac{3}{20}$. Les composantes de la vitesse moyenne sont donc



$$\frac{-20}{3}, \qquad \frac{20e^{\pi}}{3}.$$

Elles sont exprimées en mètres. Pour les exprimer en centimètres, il faut multiplier par 100.

Si l'on conçoit la vitesse moyenne comme étant le quotient du chemin parcouru sur la courbe par le temps employé à le parcourir, il faut d'abord calculer la longueur de l'arc AB, puis diviser cette longueur par $\frac{3}{20}$. Or, en coordonnées polaires, on a

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2,$$
$$ds^2 = d\theta^2(4+1)r^2 = 5r^2 d\theta^2,$$
$$ds = r\sqrt{5}\, d\theta = \sqrt{5}\, e^{2\theta} d\theta;$$

par conséquent,

$$s = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{2\theta} + C^{te},$$

et la longueur de l'arc AB est

$$\text{arc AB} = \frac{\sqrt{5}}{2}(e^{\pi} - 1).$$

La vitesse moyenne définie de cette façon est

$$\frac{10\sqrt{5}}{3}(e^{\pi} - 1).$$

La grandeur de celle que nous avons trouvée antérieurement est

$$\frac{20}{3}\sqrt{e^{2\pi} + 1}.$$

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1920)

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES

Algèbre et analyse (M. BOULIGAND).

1. — Sommer les séries

$$u_n = \frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\cos\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1}}, \qquad u_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}, \qquad u_n = \frac{L\left(1+\frac{1}{n}\right)}{LnL(n+1)}.$$

2. — Déduire le fait que $\alpha \log \alpha$ tend vers zéro avec α, de la considération de l'intégrale définie $\int_\alpha^1 \frac{\alpha}{x}\,dx$ (utiliser une représentation graphique).

3. — Limite de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{n} x^n\,dx$ lorsque n croît indéfiniment. Même question pour l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{n}\sqrt{1+x^n}\,dx$.

4. — Calculer $\int_0^1 x\sqrt{1+x^{10}}\,dx$ à $\frac{1}{100}$ près.

5. — Limite, pour n infini, de l'intégrale $\int_{2n^2}^{2n^2+1} \sin\frac{1}{x}\,dx$, déduite d'une représentation graphique.

6. — Déterminer une fonction $z(x, y)$ telle qu'on ait, quels que soient x et y, $\int_1^x \frac{du}{u} + \int_1^y \frac{du}{u} = \int_1^{xy} \frac{du}{u}$. (On égalera les dérivées partielles des deux membres, et on en déduira une forme nécessaire de $\frac{z}{x}$ et de $\frac{z}{y}$).

7. — Déterminer une fonction $f(x)$ telle qu'on ait, en désignant par x et y deux valeurs quelconques de la variable indépendante, $f(x) + f(y) + 2\sqrt{f(x)f(y)} = f(x+y)$. (On se ramènera à la recherche de $\sqrt{f(x)}$.)

8. — Peut-on trouver une fonction $f(x, y)$ telle qu'on ait simultanément $f'_x = \frac{ax^2+2bxy+cy^2}{(x-y)^2}$, $f'_y = \frac{\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2}{(x-y)^2}$?

Résoudre en particulier cette question en montrant que la fonction $f(x, y)$, si elle existe, doit être la somme d'une fonction homogène de x et de y et d'une constante.

9. — Peut-on déterminer a, b, c de manière que la fonction $z(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ satisfasse à la relation

$$z''_{x^2} + z''_{y^2} + z''_{z^2} = 0\,?$$

10. — Trouver un polynome $z(x, y)$ tel qu'on ait entre les dérivées partielles de la fonction $f(x, y) = e^{z(x,y)}$ la relation $f''_{x^2} = f'_y$.

11. — Limite d'un quotient dont le numérateur tend vers zéro et dont le dénominateur n'est pas nul. Quel genre de difficulté se présente pour le quotient $\frac{\sin\frac{1}{n}}{\sin n}$?

12. — Étudier les séries

$$u_n = \frac{1}{2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\ldots+\frac{n+1}{n}}, \qquad u_n = \sin\left(\sqrt[4]{1+n^4}\right) - \sin n, \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}.$$

$$u_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{Ln}}}\alpha, \qquad u_n = \frac{1}{n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}, \qquad u_n = \frac{1}{n^{2+\frac{1}{Ln}}}, \qquad u_n = \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{1+2^3+\ldots+n^3}, \qquad u_n = \frac{1}{\frac{n}{n\sqrt{n}}}.$$

$$u_n = \frac{1}{\left(1+\frac{a}{Ln}\right)}, \qquad u_n = \left[\frac{1}{e}\right]^{\frac{1}{n^\alpha}}, \qquad u_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}}, \qquad u_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{Ln}}}, \qquad u_n = \frac{n^n}{e^{n^2}}, \qquad u_n = \frac{1}{10^{\frac{n}{Ln}}}.$$

$$u_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}}, \qquad u_n = \frac{1}{n^{1-\frac{1}{Ln}}}.$$

13. — A l'aide d'une représentation graphique, étudier les séries $u_n = (-1)^n \int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ (cas de demi-convergence et cas de convergence absolue), $u_n = \frac{1}{\int_{2n\pi+\frac{\pi}{2}}^{2n\pi+\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx}$.

14. — Que deviennent les intégrales $\int_1^l \frac{\sin x\,dx}{x^\alpha + \cos x}$ et $\int_1^l \frac{\sin^2 x\,dx}{x^\alpha + \cos x}$ lorsque l croît indéfiniment?

15. — Tracer la courbe représentative de la fonction $y = x \sin e^x$, et chercher ce que devient l'aire d'une arche de cette courbe, soit $\left| \int_{L(n\pi)}^{L(n+1)\pi} x \sin e^x dx \right|$, quand n augmente indéfiniment. Peut-on se faire une idée précise de l'ordre de grandeur de cette intégrale, au moyen d'une limite supérieure et d'une limite inférieure faisant intervenir l'intégrale

$$\int e^x \sin e^x dx?$$

16. — Déduire de la théorie des dérivées que, si l'on pose $f(x) = \int_0^x \frac{du}{1+u^2}$, on a, quels que soient x et y,

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

17. — Trouver une fonction $f(x)$ telle qu'on ait $f(x) + \int_0^1 e^{x-y} f(y)\,dy = e_x$.

18. — Que peut-on dire d'une série à termes positifs, pour laquelle on aurait, à partir d'un certain rang,

$$\sqrt[n]{u_n} < 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{ou bien} \quad \sqrt[n]{u_n} < 1 - \frac{1}{Ln}?$$

19. — Étudier les courbes représentatives des fonctions $y = (\operatorname{tg} x)^x$, $y = \frac{e^x + \cos x}{e^x + \sin x}$.

20. — Déduire la somme de la série harmonique alternée d'un développement limité de $L(1+x)$.

21. — Soit $f(x)$ une fonction positive, décroissante et tendant vers zéro [dans l'intervalle, $0, +\infty$]. Montrer que l'expression $f(1) + f(2) + \ldots + f(n) - \int_1^n f(x)\,dx$ tend vers une limite quand n croît indéfiniment.

22. — Soit l'équation $x^3 + x + \lambda = 0$. Tracer la courbe de variation du module des racines imaginaires lorsque λ croît de $-\infty$ à $+\infty$.

23. — Peut-on trouver deux fractions rationnelles $f(t)$ et $g(t)$ telles que la somme de leurs carrés soit égale à 1, ou telles que la somme de leurs cubes soit égale à 1?

(A suivre.)

SUJETS DE CONCOURS

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE

Concours de 1920.

Groupe I.

Mathématiques.

PREMIÈRE COMPOSITION

2463. — On donne trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, et deux cônes de révolution de sommets O et A ayant pour équations :

O) $\quad x^2 + y^2 - 2z^2 = 0,$

A) $\quad (x-a)^2 + y^2 - z^2 = 0$

(a est une constante positive).

1° Les cônes O et A ont en commun une courbe du quatrième degré Γ dont les projections sur les plans des zx et des xy mettent en évidence que par cette courbe passent deux cylindres du second degré qu'on considérera comme des cônes dont les sommets B et C seraient à l'infini, et on appellera tétraèdre OABC la figure obtenue en joignant deux à deux les quatre points A, B, C, O.

Soit $M_1(x_1, y_1, z_1)$ un point de la courbe Γ. Montrer que toute droite passant par ce point et coupant deux arêtes opposées du tétraèdre OABC en deux points R et S coupe Γ en un second point conjugué harmonique de

M_1 par rapport à R et S. Calculer les coordonnées des trois points M_2, M_3, M_4, ainsi obtenus en fonction de celles de M_1. Montrer que deux arêtes opposées quelconques du tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$ coupent deux mêmes arêtes opposées de OABC et que ce tétraèdre est connu lorsqu'on donne l'un de ses sommets.

Les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 seront appelés points associés.

2° Par la courbe Γ passent des hyperboloïdes à une nappe H_t dont l'équation est de la forme

$$x^2 + y^2 - 2z^2 - t^2(x - a^2 + y^2 - z^2) = 0,$$

t étant un paramètre positif qui satisfait à certaines conditions. Étudier les sections de ces hyperboloïdes par le plan Oxy. Former en fonction d'un paramètre l'équation générale des génératrices de l'un des systèmes de H_t et montrer qu'il existe quatre de ces génératrices qui sont tangentes à la courbe Γ. Reconnaître suivant les valeurs de t si ces génératrices sont réelles. Calculer les coordonnées des quatre points de contact M_1, M_2, M_3, M_4 de ces génératrices en fonction de t, et montrer que ce sont des points associés.

Inversement les tangentes à Γ en quatre points associés M_1, M_2, M_3, M_4 sont les génératrices d'un hyperboloïde H_t dont on écrira l'équation en fonction de l'abscisse de l'un des points.

3° On appelle corde de Γ toute droite coupant cette courbe en deux points. Combien passe-t-il de telles cordes par un point N donné? Dans quelle région de l'espace N doit-il se trouver pour que ces cordes soient réelles?

Déduire des résultats obtenus plus haut que, par toute corde joignant deux points réels P, Q de Γ, on peut mener quatre plans tangents à Γ autres que ceux qui la toucheraient en P et Q. Montrer que si l'on considère les quatre cordes projetées sur le plan Oxy suivant une droite D, les plans tangents sont réels pour deux des cordes.

On considérera en particulier la famille des cordes PQ qui coupent deux arêtes opposées du tétraèdre OABC en R et S et par lesquelles passent des plans tangents réels. On étudiera la correspondance entre les points R et S et on cherchera l'équation du lieu de cette droite RS. On montrera qu'il existe deux surfaces H_t telles que la droite conjuguée de toute droite PQ de la famille par rapport à l'une ou l'autre de ces surfaces est encore une droite de la famille. Où se trouvent les points de contact des plans tangents menés à Γ par une droite PQ?

4° Soit M un point de Γ et MT la tangente en ce point, par cette droite passe un hyperboloïde H_t, la génératrice du second système de H_t passant par M coupe la courbe Γ en un second point M'. Montrer que le plan MTM' est le plan osculateur à Γ en M et écrire l'équation de l'hyperboloïde qui passe par la tangente en M. Que peut-on dire des quatre points tels que M' correspondant à quatre points associés?

Chercher l'enveloppe E de la droite d'intersection du plan MTM' et du plan Oxy. Construire cette courbe et signaler ses particularités. Quelle est la classe de la courbe E? Reconnaître suivant la position d'un point dans le plan combien on peut mener par ce point de tangentes réelles à la courbe E. Calculer l'aire comprise entre chaque asymptote de E et les branches de courbe correspondantes limitées au point double réel.

DEUXIÈME COMPOSITION

2464. — 1° On considère, dans un plan rapporté aux axes rectangulaires Ox, Oy, la courbe (C), lieu du point M dont les coordonnées sont exprimées en fonction d'un paramètre variable θ par les formules

$$M \begin{cases} x = a(m\cos\theta\,\mathrm{ch}\,m\theta + \sin\theta\,\mathrm{sh}\,m\theta), \\ y = a(m\sin\theta\,\mathrm{ch}\,m\theta - \cos\theta\,\mathrm{sh}\,m\theta), \end{cases}$$

où a et m désignent respectivement une longueur et un nombre positifs donnés.

Former l'équation de la tangente à la courbe (C) au point M.

Soit A le point de (C) répondant à la valeur $\theta = 0$ du paramètre; calculer en fonction de θ la longueur de l'arc de courbe AM.

Soit (C_1) la développée de (C), et (C_2) la développée de (C_1); comment passe-t-on de (C) à (C_2)?

Soit d la distance de O à la tangente à (C) en M; chercher la relation qui lie d au rayon de courbure R de (C) en M.

2° Soit M' le point de (C) répondant à la valeur θ du paramètre, θ étant l'infiniment petit principal, évaluer la partie principale de l'aire infiniment petite limitée par l'arc MAM' de (C) et la corde MM'.

3° A l'instant origine ($t = 0$), un point matériel M part de A et décrit (C) dans le sens des θ croissants, avec une vitesse de grandeur constante an; calculer en fonction de θ les coordonnées d'un second point matériel, P, qui, pour $t = 0$, part de O, et se déplace dans le plan xOy de telle sorte que son vecteur vitesse soit constamment équipollent au vecteur OM.

Calculer en fonction de θ la longueur de l'arc de trajectoire OP.

4° On peut mener à la courbe (C) une infinité de tangentes parallèles à une même direction donnée;

démontrer que les points de contact de ces tangentes appartiennent à une même conique qu'on définira géométriquement.

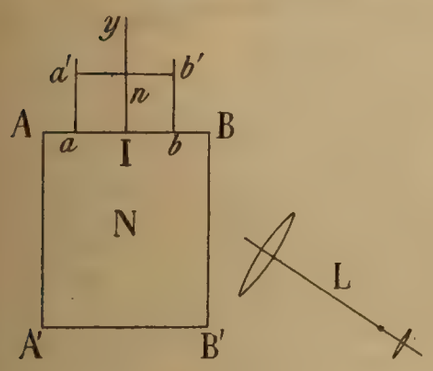
5° Soit V l'angle sous lequel la courbe (C) coupe le rayon vecteur OM. Trouver la relation $f(V, \theta) = 0$ qui relie V et θ; montrer que, θ croissant indéfiniment, V tend vers une limite, V_0.

Montrer qu'on peut calculer une constante θ_0 et définir une courbe Σ, coupant les rayons vecteurs issus de O sous l'angle constant V_0, de telle sorte que, Q étant le point de Σ d'angle polaire $xOQ = \theta - \theta_0$, la distance QM tende vers zéro quand θ croît indéfiniment.

Étudier le vecteur QM; déduire de là un mode de génération de (C).

Physique.

I. — **2465.** 1° Un prisme de verre a la forme d'un parallélépipède rectangle dont la section droite est ABA'B', située dans le plan de la figure.



Sur la face supérieure est disposée une cuve de verre sans fond *aba'b'* contenant un liquide. En un point I du plan de la figure, situé sur la surface de séparation du liquide et du prisme, on fait tomber des rayons lumineux monochromatiques ayant toutes les directions possibles dans l'angle dièdre A*Iy*. Les indices du liquide et du verre pour ces rayons sont respectivement n et N ($n < N$). Les rayons réfractés pénètrent dans le prisme et on considère particulièrement ceux qui sortent ensuite par la face BB'. Tous les rayons entrés en I sortent-ils du prisme? Quelles conditions faut-il réaliser pour qu'il y ait un faisceau émergent? Indiquer la constitution de ce faisceau.

2° Le faisceau émergent est limité à sa partie supérieure par un rayon situé dans le plan de la figure; soit i l'angle d'émergence de ce rayon à la sortie de la face BB'. Établir la formule qui relie i aux deux indices n et N. La mesure de i permet, connaissant N, de calculer n. Quels indices pourra-t-on mesurer avec un prisme d'indice N donné? Avec quelle précision faudra-t-il mesurer i pour que l'on puisse donner la cinquième décimale de n? Quelle précision obtiendra-t-on sur n en lisant i à une minute près?

3° En réalité, on observe le faisceau émergent avec une lunette L réglée pour l'infini et dont l'axe optique peut se déplacer en restant dans le plan de la figure. On réalise, à l'aide d'un appareil approprié, un éclairage de la surface de séparation tel que, en chaque point de cette surface, il tombe des rayons ayant toutes les directions données plus haut. Montrer que le champ de la lunette apparaît divisé en deux parties : l'une éclairée, l'autre sombre, les deux parties étant séparées par une ligne courbe S; on pourra calculer la courbure de cette ligne. Indiquer comment, de l'observation du phénomène, on peut déduire la mesure de i. Décrire un dispositif d'éclairage permettant de réaliser les conditions ci-dessus. Est-il possible de réduire la partie éclairée du champ à une petite portion voisine de la ligne S?

4° Le prisme est formé d'un verre dont les indices sont donnés par la formule $N = a + \frac{b}{\lambda^2}$; les indices du liquide suivent une loi analogue $n = \alpha + \frac{\beta}{\lambda^2}$. Qu'observe-t-on dans la lunette si on éclaire la cuve avec une lumière renfermant deux couleurs de longueur d'onde différentes λ_1 et λ_2? De quoi dépendra l'écart angulaire des deux lignes de séparation aperçues dans la lunette et comment se modifiera-t-il avec la dispersion du liquide, celle du prisme étant supposée donnée?

Application numérique. — On éclaire la cuve avec la lumière provenant d'un tube de Geissler à hydrogène renfermant les trois longueurs d'onde

$$\left|\begin{array}{ll} C\ldots & \lambda = 0{,}6563\mu, \\ F\ldots & \lambda = 0{,}4861\mu, \\ G'\ldots & \lambda = 0{,}4326\mu. \end{array}\right.$$

On a
$$\begin{cases} a = 1{,}59527, \\ b = 9{,}283.10^{-3}. \end{cases}$$

Calculer à une minute près les angles i correspondant aux trois couleurs pour l'eau et le benzène, pour lesquels on a respectivement

$$H^2O \begin{cases} \alpha = 1{,}32235, \\ \beta = 3{,}735.10^{-3}; \end{cases} \qquad C^6H^6 \begin{cases} \alpha = 1{,}47482, \\ \beta = 9{,}102.10^{-3}. \end{cases}$$

5° On supposera que l'influence de la température sur l'indice d'un solide et d'un liquide est donnée par la

formule $\frac{n-1}{d} = C^{te}$. On déterminera dans ce cas l'influence d'une variation de température sur la précision obtenue dans la mesure de n.

Avec quelle approximation doit être maintenue la température de l'ensemble pour que l'on puisse répondre d'une unité de la quatrième décimale sur l'indice n? Même question pour la cinquième décimale.

Application. — Benzène aux environs de 20° C. On donnera les résultats successivement pour les deux radiations C et G'; on donnera l'influence de la température sur la dispersion correspondante.

Coefficient de dilatation cubique du verre : 25.10^{-6}.

— — — du benzène : 12.10^{-4}.

II. — Courbes d'Andrews. — Point critique.

Groupe II.

Mathématiques.

Même sujet que la deuxième composition du groupe I.

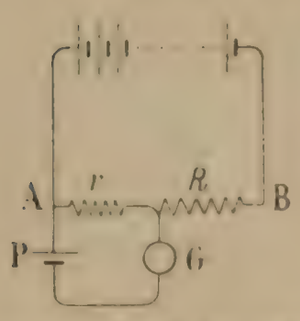
Physique.

I. — 2466. 1° On a besoin de 10 résistances de 1 mégohm chacune; on dispose pour les construire d'un fil de $\frac{1}{10}$ de millimètre de diamètre et dont la résistivité est 42.10^{-6} ohm-centimètre. Quelle longueur de fil faudra-t-il prendre pour constituer chacune des résistances?

La construction terminée, on compare chacune de ces résistances à un étalon; on trouve entre elles des différences qui ne dépassent pas $\frac{1}{10^5}$ de leur valeur.

Avec quelle approximation sont réalisées : A la résistance de 10 mégohms obtenue en mettant les 10 bobines en série, B la résistance de 100 000 ohms obtenue en mettant les 10 bobines en parallèle?

2° On dispose, d'autre part, d'une batterie d'accumulateurs et d'une pile étalon dont la f. e. m. est 1,0183 volt (à 0,0001 de volt près). Pour déterminer le voltage aux bornes de la batterie, on réalise le montage suivant. La batterie débite dans un circuit comprenant en R les 10 mégohms, en r une résistance étalon. Aux bornes de celle-ci est monté un deuxième circuit comprenant la pile étalon et un galvanomètre G; le montage est réalisé de façon que G reste au zéro quand on ferme les circuits. On trouve alors $r = 8\,486^{\omega}$ (à 1 ohm près). Quelle est la différence de potentiel aux bornes de la batterie? Avec quelle approximation est-elle connue?



3° Cette batterie sert à charger un condensateur plan constitué de la façon suivante : deux lames de verre argentées sur leurs faces en regard sont séparées par des cales de quartz d'égale épaisseur. Chacune de ces cales a été taillée perpendiculairement à l'axe du cristal; elle fait tourner le plan de polarisation de 35°,18 (à une minute près) pour la lumière jaune du sodium. Dans l'argenture de la lame supérieure, on a tracé une circonférence de 10^{cm} de rayon qui isole au centre de cette lame une armature circulaire. Grâce à des connexions convenables, on peut charger cette armature 50 fois par seconde et la décharger le même nombre de fois dans un galvanomètre G_1 qui prend une déviation fixe δ. Calculer δ sachant que :

a) Une épaisseur de quartz de 1^{mm} fait tourner le plan de polarisation de 21°,72 (à $\frac{1}{100}$ de degré près) pour la lumière jaune du sodium;

b) Si on constitue un circuit comprenant la pile étalon de résistance intérieure négligeable, le galvanomètre G_1 de résistance 1 830 ohms et les 10 résistances de 1 mégohm mises en parallèle, la déviation du galvanomètre est alors de 100^{mm} sur son échelle (à $\frac{1}{20}$ de millimètre près). Quelle est la précision finalement obtenue dans le calcul de δ?

II. — Harmoniques d'un son. Leur production naturelle. — Timbre des sons.

Chimie.

Étude comparative des aldehydes et des cétones aux points de vue des préparations et des propriétés.

Application. — **2467.** 1° Quelle quantité maximum d'alcool éthylique peut-on espérer transformer en aldehyde par l'emploi de 50g de bichromate de potassium en solution sulfurique?

2° Quel volume de liqueur de Fehling pourra-t-on réduire avec 1g d'aldéhyde, si la liqueur contient 70g de sulfate de cuivre cristallisé par litre?

$$Cr = 52,5, \qquad K = 39, \qquad Cu = 63,5.$$

Sciences naturelles.

Structure générale de la cellule chez les Animaux et chez les Végétaux. — Protoplasme et noyau. — Principales différenciations du cytoplasme.

N. B. — Le candidat ne parlera pas de la division cellulaire.

QUESTIONS PROPOSÉES

2468. — On donne un ellipsoïde E et une sphère S de centre ω. On considère un plan variable P assujetti à cette condition que son pôle p par rapport à S soit situé sur son diamètre par rapport à E.

1° Lieu du pôle p du plan P et enveloppe de ce plan.

2° Démontrer que la courbe C lieu du point p passe par les sommets du tétraèdre conjugué commun à l'ellipsoïde et à la sphère; réciproquement.

3° On fait varier le centre ω de la sphère S sur une droite Δ et l'on choisit de plus le rayon de cette surface de façon qu'elle passe par le centre de l'ellipsoïde; déterminer la surface Σ lieu de la courbe C et l'enveloppe du plan P. Pour quelles positions de la droite Δ la surface Σ est-elle de révolution?

4° On considère un point M et les plans polaires de ce point par rapport à toutes les quadriques passant par la courbe C, relative à une sphère fixe, S; démontrer qu'ils passent par un même point M'; déterminer le lieu du point M', lorsque M décrit une droite D.

5° On suppose en particulier que la droite D passe par le centre de l'ellipsoïde et est située dans le plan osculateur de la courbe C en ce point; montrer que le lieu de M' est une droite D' et trouver le lieu de cette dernière droite lorsque D varie en satisfaisant aux conditions indiquées précédemment.

(G. E., à Bordeaux.)

2469. — On considère l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

et l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

on mène la tangente en un point M de l'hyperbole; elle rencontre l'ellipse en deux points P et P'.

1° Trouver le lieu du conjugué harmonique, M', de M, par rapport à P et P', quand le point M parcourt l'hyperbole.

2° Trouver la correspondance qui existe entre le point M, et le pôle, M_1, de PP' par rapport à l'ellipse. Lieu de M_1.

3° Trouver le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point M_1 sur la droite PP'. Dans ce dernier cas, faire $b = a$.

E. H.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE NAVALE

Concours de 1914.

2266. — I. — *Calculer l'intégrale définie*

$$y = \int^{\alpha} e^{m\alpha} \sin \alpha \, d\alpha.$$

On suppose que m désigne un nombre positif donné.

Étudier, quand α varie de $-\infty$ à $+\infty$, les variations de la fonction $y(\alpha)$, et construire la courbe représentative. On montrera qu'après avoir tracé la partie de la courbe répondant aux valeurs de α comprises entre 0 et 2π, le reste de la courbe s'en déduit par une construction simple. On tracera avec soin cette même partie de la courbe pour $m = 1$.

II. — *On considère y comme une fonction de m. Calculer la dérivée de cette fonction par rapport à m; et la dérivée par rapport à α de cette dérivée.*

III. — *On considère l'intégrale*

$$x = \int_0^{\alpha} e^{m\alpha} \cos\alpha \, d\alpha.$$

A chaque valeur de x répondent en général une infinité de valeurs de α données par la relation précédente et à chacune de ces valeurs de α répond une valeur de la fonction y, ce qui permet de dire que y est fonction de x. Calculer la dérivée de y par rapport à x; on désignera cette dérivée par y'. Démontrer qu'il existe entre x, y et y' une relation indépendante de α et linéaire par rapport à chacune des trois variables x, y et y'. Former cette relation; l'intégrer. Déduire de l'intégration la relation indépendante de α qui existe entre les fonctions x et y.

Pour calculer l'intégrale y nous cherchons d'abord l'intégrale indéfinie en intégrant par parties :

$$\int e^{m\alpha} \sin\alpha \, d\alpha = -e^{m\alpha} \cos\alpha + m \int e^{m\alpha} \cos\alpha \, d\alpha.$$

Cette formule a été obtenue par l'application de la formule

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

en posant $$u = e^{m\alpha}, \qquad dv = \sin\alpha \, d\alpha.$$

Appliquons l'égalité précédente entre les limites 0 et α; nous aurons

$$y = 1 - e^{m\alpha} \cos\alpha + mx.$$

Un calcul tout pareil nous donne

$$\int e^{m\alpha} \cos\alpha \, d\alpha = e^{m\alpha} \sin\alpha - m \int e^{m\alpha} \sin\alpha \, d\alpha,$$

et $$x = e^{m\alpha} \sin\alpha - my.$$

De ces deux équations du premier degré en x et en y, il est facile de déduire y et x, et nous obtenons ainsi

$$(1) \qquad y = \frac{1}{1+m^2} + \frac{e^{m\alpha}(m \sin\alpha - \cos\alpha)}{1+m^2};$$

de même,

$$x = \frac{m}{1+m^2} + \frac{e^{m\alpha}(\sin\alpha + m\cos\alpha)}{1+m^2}.$$

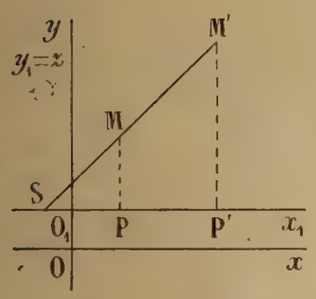
Pour étudier les variations de la fonction y, nous nous servirons de sa dérivée, qui est évidemment

$$y' = \frac{dy}{d\alpha} = e^{m\alpha} \sin\alpha.$$

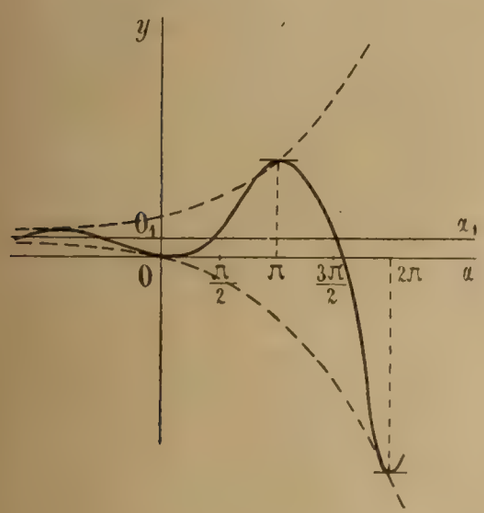
Cette dérivée est positive dans l'intervalle $(0, \pi)$, négative dans l'intervalle $(\pi, 2\pi)$, etc. La fonction est donc croissante dans le premier intervalle et croît de 0 à $\frac{e^{m\pi}+1}{1+m^2}$; dans le second intervalle, elle décroît de $\frac{e^{m\pi}+1}{1+m^2}$ à $\frac{1-e^{2m\pi}}{1+m^2}$; puis, elle croît de nouveau, etc. Supposons $m = 1$; alors, à gauche, quand α est négatif et grandit indéfiniment en valeur absolue, e^{α} tend rapidement vers 0, et la

fonction se rapproche indéfiniment de $\frac{1}{1+m^2}=\frac{1}{2}$; la courbe est asymptote à la droite $y=\frac{1}{2}$, qu'elle traverse une infinité de fois, car la partie $\frac{e^\alpha(\sin\alpha-\cos\alpha)}{2}$ s'annule une infinité de fois. A droite, quand α grandit indéfiniment par valeurs positives, e^α devient infini et grandit très vite, les oscillations de la fonction prennent très vite une grande amplitude : le premier maximum est déjà supérieur à 11, et la valeur absolue du premier minimum dépasse 250. Enfin une remarque intéressante est la suivante : les maximums et minimums sont situés sur les courbes $y=\frac{e^\alpha+1}{2}$ et $y=\frac{1-e^\alpha}{2}$; ce sont deux exponentielles symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite $y=\frac{1}{2}$. Il est d'ailleurs avantageux de compter les ordonnées à partir de la droite $y=\frac{1}{1+m^2}$, dans le cas général, ou $y=\frac{1}{2}$, dans le cas particulier actuel. Au point de vue géométrique cela revient à remplacer l'axe des x par la parallèle $y=\frac{1}{2}$, à poser $y=\frac{1}{2}+z$, z désignant la nouvelle ordonnée.

Une fois construite la partie de la courbe qui correspond à l'intervalle $(0, 2\pi)$, il est facile d'obtenir celle qui correspond à l'intervalle $(2\pi, 4\pi)$: il suffit de remplacer α par $\alpha+2\pi$ dans z; celui-ci se change en $ze^{2\pi}$ $(m=1)$ soient alors $O_1P=\alpha$, $O_1P'=\alpha+2\pi$, $PM=z$, $P'M'=ze^{2\pi}$; la droite MM′ coupe O_1x_1 $\left(y=\frac{1}{2}\right)$ en un point S tel que $\frac{SP'}{SP}=e^{2\pi}$, les deux segments SP et SP′ ont des longueurs invariables. Nous construirons donc une bande de papier sur laquelle nous marquerons les trois points fixes S, P et P′, et, en la faisant glisser le long de O_1x_1, nous placerons de suite, pour chaque point P, les deux points S et P′. Il n'y aura plus qu'à joindre SM pour avoir le point M′.



La troisième partie de la courbe, celle qui correspond à l'intervalle $(4\pi, 6\pi)$, se déduit de la seconde par le même procédé.



La figure que nous donnons ici donne une idée de la courbe, mais non la courbe réelle, dont les oscillations sont beaucoup plus étendues vers la droite que celles qui sont indiquées. La courbe est en quelque sorte formée d'une infinité de sinuosités comprises entre les deux exponentielles, $z=\frac{e^\alpha}{2}$ et $z=\frac{-e^\alpha}{2}$, bien qu'elle traverse la première en ses maximums, la seconde, en ses minimums.

II. — Si nous nous appuyons sur l'égalité

$$\frac{\partial^2 y}{\partial m\,\partial\alpha}=\frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\,\partial m},$$

nous avons de suite

$$\frac{\partial y}{\partial\alpha}=e^{m\alpha}\sin\alpha, \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\,\partial m}=\alpha e^{m\alpha}\sin\alpha.$$

Calculons maintenant $\frac{\partial y}{\partial m}$. Nous avons

$$(1+m^2)y=1+e^{m\alpha}(m\sin\alpha-\cos\alpha),$$

et, en dérivant par rapport à m,

$$2my+(1+m^2)\frac{\partial y}{\partial m}=\alpha e^{m\alpha}(m\sin\alpha-\cos\alpha)+e^{m\alpha}\sin\alpha;$$

il serait facile de déduire de là la valeur de $\frac{\partial y}{\partial m}$ et de calculer ensuite $\frac{\partial^2 y}{\partial m \partial \alpha}$; mais il vaut mieux dériver les deux membres de l'équation précédente par rapport à α et y remplacer ensuite $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ par sa valeur. Ce calcul donne

$$2m\frac{\partial y}{\partial \alpha} + (1 + m^2)\frac{\partial^2 y}{\partial m \partial \alpha} = e^{m\alpha}(m \sin\alpha - \cos\alpha) + m\alpha e^{m\alpha}(m \sin\alpha - \cos\alpha)$$
$$+ \alpha e^{m\alpha}(m \cos\alpha + \sin\alpha) + m e^{m\alpha} \sin\alpha + e^{m} \cos\alpha;$$

en remplaçant $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ par $e^{m\alpha} \sin\alpha$, et simplifiant, il reste

$$(1 + m^2)\frac{\partial^2 y}{\partial m \partial \alpha} = \alpha e^{m\alpha}(m^2 + 1) \sin\alpha,$$

finalement $\frac{\partial^2 y}{\partial m \partial \alpha} = \alpha e^{m\alpha} \sin\alpha.$

III. — Considérons la fonction

$$x = \frac{m}{1 + m^2} + \frac{e^{m\alpha}(\sin\alpha + m \cos\alpha)}{1 + m^2};$$

en donnant à x une valeur déterminée, nous obtenons ainsi une équation en α qui a une infinité de racines; ceci se voit sans peine en construisant la courbe $x = f(\alpha)$, qui est analogue à celle que nous avons construite antérieurement, et en coupant cette courbe par une parallèle à l'axe des α. Pour chacune de ces valeurs, de α, la fonction y a une valeur bien déterminée; cette fonction y est donc aussi une fonction multiforme de x, qui a une infinité de branches. Cherchons la dérivée de l'une quelconque de ces fonctions par rapport à x; nous aurons

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\alpha}}{\frac{dx}{d\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha;$$

d'autre part, les deux égalités du début peuvent s'écrire

$$mx + 1 - y = e^{m\alpha} \cos\alpha,$$
$$x + my = e^{m\alpha} \sin\alpha,$$

et, en divisant la seconde par la première,

$$\frac{x + my}{mx - y + 1} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}.$$

L'équation différentielle qui relie x à y est donc

$$(x + my)dx - (mx - y + 1)dy = 0.$$

Pour intégrer cette équation, nous poserons

$$x + my = u, \qquad mx - y + 1 = v,$$

et nous aurons

$$dx + mdy = du, \qquad mdx - dy = dv;$$

puis,

$$(1 + m^2)dy = mdu - dv,$$
$$(1 + m^2)dx = du + mdv;$$

par suite,

$$\frac{y}{x} = \frac{mdu - dv}{du + mdv}$$

et cette nouvelle équation différentielle s'écrit

$$m(vdu - udv) = udu + vdv,$$

ou

$$m\frac{vdu - udv}{u^2 + v^2} = \frac{udu + vdv}{u^2 + v^2}.$$

Sous cette forme elle est immédiatement intégrable et donne

$$m \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{v} = \frac{1}{2} L(u^2 + v^2) + C.$$

Pour déterminer la constante, nous remarquons que x et y sont nuls en même temps; alors $u = 0$, $v = 1$, et nous voyons que $C = 0$.

La relation demandée est donc

$$u^2 + v^2 = e^{2m \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{v}};$$

c'est l'équation de la courbe décrite par le point image (x, y) dans un plan représentatif quand α varie.

Comme les deux droites $u = 0$, $v = 0$ sont rectangulaires, on peut les prendre pour nouveaux axes dans le plan choisi, et, en appelant x' et y' les nouvelles coordonnées, nous pouvons écrire

$$y' = \frac{u}{\sqrt{1 + m^2}}, \qquad x' = \frac{v}{\sqrt{1 + m^2}},$$

et l'équation devient

$$x'^2 + y'^2 = (1 + m^2) e^{2m \operatorname{arc\,tg} \frac{y'}{x'}};$$

elle représente une spirale logarithmique, ou plutôt deux spirales symétriques l'une de l'autre par rapport à la nouvelle origine, O'.

Pour éclaircir ce point, revenons aux expressions de x et de y,

$$x = \frac{-m}{1 + m^2} + \frac{e^{m\alpha}(\sin\alpha + m\cos\alpha)}{1 + m^2},$$

$$y = \frac{1}{1 + m^2} + \frac{e^{m\alpha}(m\sin\alpha - \cos\alpha)}{1 + m^2},$$

et effectuons le changement de coordonnées,

$$x = \frac{-m}{1 + m^2} + x_1, \qquad y = \frac{1}{1 + m^2} + y_1;$$

nous obtiendrons

$$x_1 = \frac{e^{m\alpha}(\sin\alpha + m\cos\alpha)}{1 + m^2}, \qquad y_1 = \frac{e^{m\alpha}(m\sin\alpha - \cos\alpha)}{1 + m^2}.$$

Nous déduisons de là

$$x_1^2 + y_1^2 = \rho^2 = \frac{e^{2m\alpha}(1 + m^2)}{(1 + m^2)^2},$$

et, par suite,

$$\rho = \frac{e^{m\alpha}}{\sqrt{1 + m^2}},$$

d'autre part, $x_1 = \rho\cos\omega$, $y_1 = \rho\sin\omega$; par conséquent,

$$\cos\omega = \frac{\sin\alpha + m\cos\alpha}{\sqrt{1 + m^2}}, \qquad \sin\omega = \frac{m\sin\alpha - \cos\alpha}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Posons alors $m = \operatorname{cotg}\varphi$; nous voyons de suite que

$$\cos\omega = \cos(\alpha - \varphi), \qquad \sin\omega = \sin(\alpha - \varphi);$$

nous pouvons prendre $\alpha - \varphi = \omega$, $\alpha = \omega + \varphi$, et l'équation en coordonnées polaires de la courbe est

$$\rho = \frac{e^{m\omega}\sin\varphi}{\sqrt{1+m^2}} = \sin\varphi\, e^{m\varphi} e^{m\omega},$$

$$\rho = k e^{m\cot\varphi}.$$

Ceci montre bien que la courbe est une spirale logarithmique.

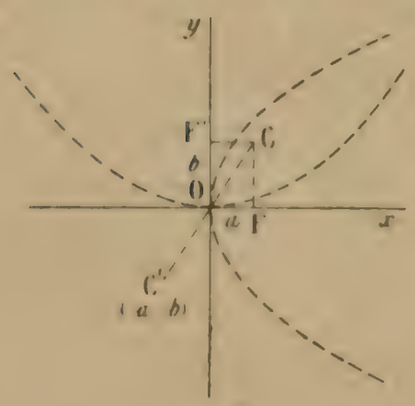
2267. — *Soient* F *et* F′ *les projections sur deux axes rectangulaires fixes* $x'Ox$, yOy, *d'un point* C *de leur plan, dont les coordonnées sont* $OF = a$, $OF' = b$. *On considère deux paraboles ayant leur sommet commun à l'origine* O, *et dont les foyers sont respectivement aux points* F *et* F′.

1° *On demande l'équation du lieu géométrique du point* M *sommet d'un angle droit dont l'un des côtés est tangent à l'une des paraboles, et dont l'autre côté est tangent à l'autre parabole. On construira la courbe répondant à cette équation.*

2° *Cette courbe a une asymptote* A. *On peut considérer la droite* A *et le point* C *comme se correspondant réciproquement, la droite étant déterminée dès que le point* C *est donné, et le point* C *étant déterminé quand la droite* A *est donnée. Ceci posé, on demande quelle est la courbe décrite par le point* C *quand la droite* A *se déplace de manière à passer par un point fixe.*

3° *On demande aussi quelle est la courbe décrite par le point* C *quand la droite* A *se déplace de manière à rester tangente à la parabole qui a son sommet au point* O *et son foyer à un point* φ *du plan dont on désignera les coordonnées par* $-a$ *et* $-b$.

1° L'équation de la parabole qui a pour sommet le point O et pour foyer le point F est



$$y^2 - 4ax = 0,$$

et celle de la parabole, qui a pour sommet le point O et pour foyer le point F′ est

$$x^2 - 4by = 0.$$

L'équation générale des tangentes à la première est

$$y = mx + \frac{a}{m};$$

celle des tangentes à la seconde est

$$x = m'y + \frac{b}{m'}.$$

Comme ces droites doivent être rectangulaires, nous avons $m + m' = 0$, ou $m' = -m$; les deux équations précédentes s'écrivent alors

$$m^2x - my + a = 0,$$
$$m^2y + mx + b = 0.$$

Nous aurons le lieu du point (x, y) en éliminant m entre elles; cela nous donne

$$(1) \qquad (x^2 + y^2)(ax + by) + (ay - bx)^2 = 0.$$

Cette équation représente une cubique circulaire ayant un point double à tangentes confondues au point O, c'est-à-dire un point de rebroussement; la tangente en ce point de rebroussement est la droite $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$; c'est la droite OC; la direction asymptotique est $ax + by = 0$, elle est perpendiculaire à OC. Le lieu est donc une cissoïde droite.

2° Pour avoir l'asymptote, nous coupons la courbe par une droite

$$ax + by = \lambda.$$

parallèle à la direction asymptotique. En remplaçant $ax+by$ par λ, nous avons une équation,

$$\lambda(x^2+y^2)+(ay-bx)^2=0,$$

homogène en x et y, qui nous donne les rayons joignant l'origine aux points de rencontre de cette droite avec la courbe. Pour que la droite devienne asymptote, il faut que l'un de ces points aille à l'infini, c'est-à-dire que l'un des rayons devienne parallèle à $ax+by=0$. Ceci s'exprime en écrivant que l'équation homogène en x et y admet la solution $\frac{x}{b}=-\frac{y}{a}$, et nous avons ainsi

$$\lambda(a^2+b^2)+(a^2+b^2)^2=0, \qquad \lambda=-(a^2+b^2).$$

L'équation de l'asymptote est donc

$$A\equiv ax+by+a^2+b^2=0.$$

Elle passe par le point C′, symétrique de C par rapport au point O.

Nous voyons ainsi qu'à tout point $C(a, b)$ correspond une droite A parfaitement déterminée, et qu'à toute droite du plan correspond un point déterminé, C; ce second point est évident géométriquement. Il est non moins facile à apercevoir analytiquement; car, soit $ux+vy+w=0$ une droite donnée, quelconque; en identifiant avec A, nous aurons

$$\frac{a}{u}=\frac{b}{v}=\frac{a^2+b^2}{w}=k,$$

$$a=ku, \qquad b=kv, \qquad k^2(u^2+v^2)=kw, \qquad k=\frac{w}{u^2+v^2},$$

et, par suite,

$$a=\frac{uw}{u^2+v^2}, \qquad b=\frac{vw}{u^2+v^2}.$$

Quand A tourne autour d'un point fixe (x_0, y_0), nous avons la relation

$$a^2+b^2+ax_0+by_0=0,$$

qui montre que le point (a, b) décrit un cercle passant à l'origine et ayant pour centre le point

$$-\frac{x_0}{2} \qquad -\frac{y_0}{2}.$$

3° Pour traiter la troisième partie, il est nécessaire de changer de notations : nous appellerons α et β les coordonnées du point mobile, C, qui correspond à la droite A ; l'équation de celle-ci sera

$$\alpha x+\beta y+\alpha^2+\beta^2=0.$$

Nous avons maintenant à écrire qu'elle est tangente à la parabole qui a pour foyer le point $(-a, -b)$, et pour sommet le point O. L'axe de cette parabole a pour équation $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$; la tangente au sommet, $ax+by=0$; et la directrice,

$$a(x-a)+b(y-b)=0.$$

Prenons le symétrique du foyer par rapport à la droite

$$\alpha x+\beta y+\alpha^2+\beta^2=0$$

et écrivons qu'il est sur la directrice; ou, ce qui revient au même, le pied de la perpendiculaire abaissée du point $(-a, -b)$ et écrivons qu'il est sur la tangente au sommet; nous aurons écrit que la droite A est tangente à la parabole. Le dernier calcul nous donne

$$\frac{x+a}{\alpha}=\frac{y+b}{\beta}=\lambda,$$

$$\alpha(\alpha\lambda-a)+\beta(\beta\lambda-b)+\alpha^2+\beta^2=0.$$

$$\lambda=-1+\frac{a\alpha+b\beta}{\alpha^2+\beta^2};$$

puis

$$a(\alpha\lambda-a)+b(\beta\lambda-b)=0,$$

$$(a\alpha+b\beta)(a\alpha+b\beta-\alpha^2-\beta^2)-(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)=0.$$

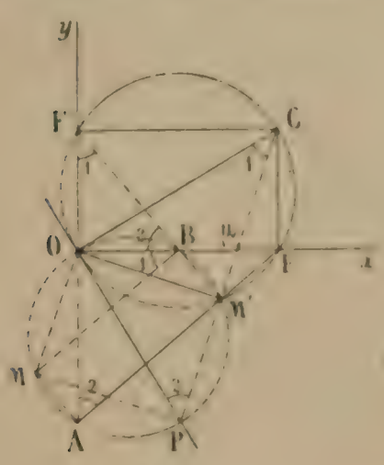
Cette dernière équation est l'équation du lieu; elle se simplifie et s'écrit

$$(ax+by)(x^2+y^2)+(ay-bx)^2=0,$$

en posant $\alpha=x$, $\beta=y$.

Ce lieu est justement la cissoïde droite déjà rencontrée.

Solution géométrique. — 1° Menons par les points F et F′ deux droites rectangulaires FM et FM′, qui rencontrent les axes des y et des x en A et B; menons par les points A et B des droites perpendiculaires respectivement à FA et à FB; elles se coupent en M, qui est un point du lieu. Le point M est sur le cercle circonscrit au rectangle OFCF′.



Joignons alors OM′ et OM; nous allons démontrer que ces deux droites sont rectangulaires et, pour cela, que les deux triangles OFM′ et OBM sont semblables. Il est évident d'abord que les deux angles OFM′ et OBM, marqués 1, sont égaux; car ils ont leurs côtés perpendiculaires. Il faut montrer ensuite que $\frac{OB}{OF}=\frac{BM}{FM}$; or $BM=M'A$, et $\frac{M'A}{FM}=\frac{OB}{OF}$, puisque les deux triangles OFB et FM′A sont semblables.

Les deux triangles indiqués ont donc un angle égal compris entre côtés proportionnels; ils sont semblables et les angles F′OM′ et BOM sont égaux; en retranchant de ces deux angles la partie commune, BOM′, il reste les angles F′OB et M′OM qui sont égaux. L'angle M′OM est donc droit.

Il résulte de là que le cercle décrit sur MM′ comme diamètre passe au point O; il passe aussi aux points A et B.

Menons alors CM′ qui rencontre ce cercle en P; la figure OMPM est un rectangle et MP = OM. Nous allons démontrer maintenant que l'angle COP est droit. Il suffit, pour cela de remarquer que tous les angles marqués 2 sont égaux : MPO et M′AO comme ayant même mesure et M′AO, F′BO comme ayant leurs côtés perpendiculaires; d'autre part, les angles OFM′ et OCM′ sont égaux comme ayant même mesure; les deux triangles COP et F′OB ont donc leurs angles égaux et l'angle COP est droit. La droite OP est fixe et tangente au premier cercle en O.

Prenons alors Cμ équipollent à MP; le lieu du point μ est une cissoïde droite ayant le point C pour point de rebroussement, la droite CO pour tangente en ce point et la droite OP pour asymptote.

Le lieu du point M est donc une cissoïde égale obtenue en faisant subir à celle-ci la translation CO. L'asymptote de cette nouvelle cissoïde est parallèle à OP et passe au point symétrique de C par rapport au point O.

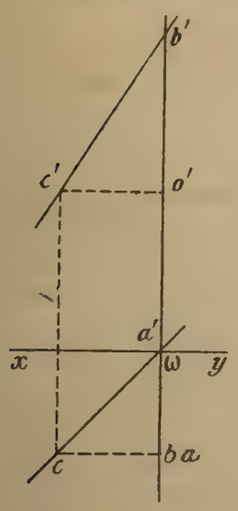
2° Quand on fait varier le point C, l'asymptote A varie; la correspondance qui existe entre eux est très simple : le point C est le symétrique, par rapport au point O, du pied de la perpendiculaire abaissée du point O sur la droite A.

Quand la droite A tourne autour d'un point fixe, K, le pied de la perpendiculaire abaissée du point O sur cette droite décrit un cercle ayant pour diamètre OK. Le point associé, C, décrit donc le cercle symétrique par rapport au point O.

3° Quand la droite A enveloppe la parabole indiquée, le pied de la perpendiculaire abaissée de O décrit la polaire de cette parabole par rapport à son sommet; c'est une cissoïde droite ayant pour point de rebroussement le point O et pour asymptote la directrice de la parabole. Le point associé à la droite A décrit donc la cissoïde symétrique par rapport au point O; c'est justement la cissoïde déjà trouvée dans la première partie.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

2312. — *xy est le petit axe de la feuille, ω est son centre.*
$\omega o' = 70^{mm}$, $\omega b' = 140^{mm}$, $\omega a = ac = o'c' = 45^{mm}$; *ac et o'c' sont parallèles à xy.*



Un ellipsoïde de révolution a pour axe le segment vertical (ab, a'b'), et il est tangent au plan vertical de projection.

Un cylindre, dont la trace sur le plan horizontal est un cercle, passe par les deux sommets de l'ellipsoïde (a, a') et (b, b'); une de ses génératrices a pour projection horizontale ωc et pour projection verticale b'c'.

On cherchera l'intersection de l'ellipsoïde et du cylindre, et on représentera, par ses deux projections, la portion de l'ellipsoïde, supposé solide et opaque, extérieure au cylindre.

(*École centrale*, 1919.)

On obtient des simplifications appréciables en construisant la base du cylindre dans le plan (H) de l'équateur de l'ellipsoïde. Ce cercle (ω, ω') passera par le point de contact (g, g') de l'ellipsoïde et du plan vertical de projection, puis par les traces (e, e'), (f, f') des génératrices rectilignes contenant les sommets (a, a'), (b, b').

A priori, la projection horizontale de la figure possédera un axe de symétrie, qui sera la droite joignant les pieds des génératrices de contour apparent horizontal du cylindre. Car, dans l'espace, la droite dont il s'agit est un axe de symétrie horizontal commun aux deux surfaces.

Construction de la courbe d'intersection. — Pour avoir un point quelconque de cette courbe, nous emploierons la méthode classique relative à une surface de révolution à axe vertical et à un cylindre dont la base est donnée dans un plan horizontal. Un plan quelconque, parallèle à cette base, coupe ici les deux surfaces suivant des cercles projetés horizontalement en vraie grandeur. Après avoir construit le cercle (pq, p'q') situé sur l'ellipsoïde, au lieu d'opérer de même pour celui que nous donne le cylindre, nous l'amènerons sur la base de ce dernier, par une translation parallèle aux génératrices. Nous transporterons également le premier cercle, dont le centre viendra de (i, i') en (i_1, i'_1), et sa nouvelle position coupera le cercle (ω) en deux points m_1 et n_1, que la translation inverse ramènera en (m, m') et (n, n'). On a ainsi deux points de la courbe demandée.

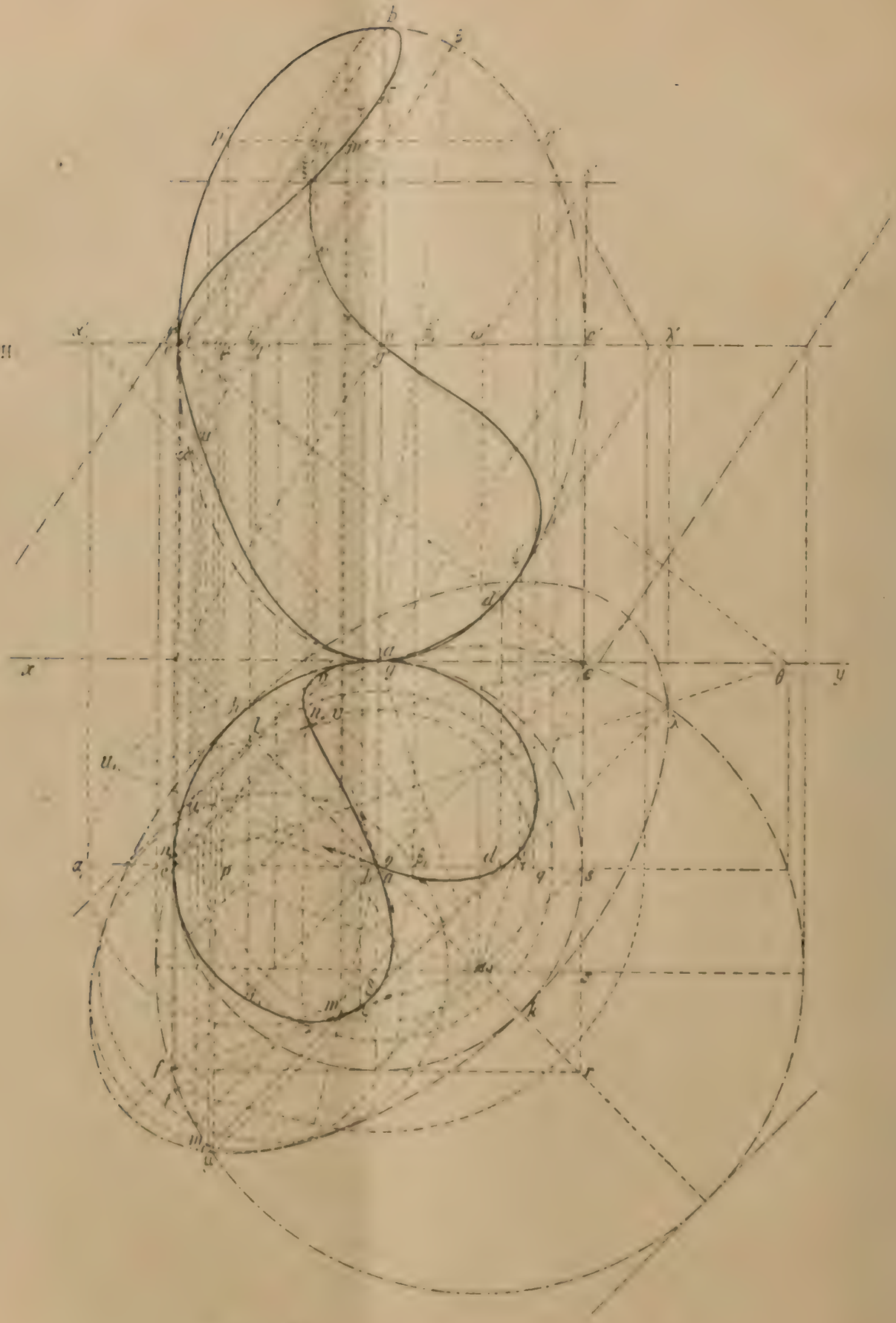
Tangente en un point (m, m') de la courbe. — Cette droite est déterminée par l'intersection (t, t') des traces des deux plans tangents sur le plan horizontal (H). Pour le cylindre, nous avons la tangente en m_1 au cercle de base (ω). Quant à l'ellipsoïde, il s'agit d'une perpendiculaire à la trace *om* du plan méridien du point de contact; elle sera déterminée à l'aide de la tangente à la méridienne, que nous déduirons, par une rotation, de la tangente en (q, q') à la méridienne principale.

Points remarquables : 1° *Points situés sur les contours apparents de l'ellipsoïde.* — En projection horizontale, l'équateur contient les points donnés (c, c'), (g, g'), et il n'y en a pas d'autres, puisque nous venons de voir qu'un plan horizontal ne peut donner que deux points.

Pour avoir ceux qui appartiennent à la méridienne principale, nous serons conduits à imaginer les intersections de son plan avec les deux surfaces. Dans le cylindre, nous aurions une ellipse, coupant la première en quatre points, parmi lesquels figurent déjà, d'après les données, ceux qui sont projetés verticalement en a', b', c'. La détermination de la projection d' du quatrième point est donc un problème du 1er degré, que nous pourrons résoudre de la manière suivante.

Parmi les quadriques qui passent par l'intersection de l'ellipsoïde et du cylindre, considérons la quadrique (Q) qui contient l'axe de révolution (ab, a'b'), et qu'on peut caractériser comme étant celle qui passe, par exemple, par le centre (o, o'). Le plan méridien principal la coupe suivant cette droite (ab, a'b'), et une autre droite projetée suivant c'd'. Il est tangent à la quadrique au point de rencontre de ces deux droites, projeté en ε'; et réciproquement, si l'on connaît ce point, la droite c'ε' déterminera le point d'. Nous allons chercher ε' comme application du théorème de Chasles relatif aux plans tangents à une surface gauche, le long d'une génératrice rectiligne.

Le rapport anharmonique des points de contact de quatre de ces plans est égal à celui du faisceau des quatre plans, ou de leurs traces sur le plan (H). D'abord, aux points (a, a'), (b, b') les plans tangents à la quadrique (Q) contiennent les tangentes à la courbe, qui sont les traces des plans tangents au cylindre sur les plans tangents horizontaux de l'ellipsoïde, et sont ainsi perpendiculaires aux rayons ωe, ωf de la base, ou parallèles à ωc et ωg. On reconnaît ensuite que le plan méridien parallèle à l'axe du cylindre donne les génératrices



Echelle : $\frac{1}{3}$.

passant par les sommets de l'ellipsoïde, et dont les nouveaux points de rencontre avec cette surface sont encore symétriques par rapport à (o, o'). La droite qui les joint est donc située sur (Q), de sorte que (o, o') est le point de contact, sur (Q), du plan dont il s'agit. Le plan perpendiculaire, étant son conjugué harmonique par rapport aux plans tangents en (a, a') et (b, b'), aura son point de contact conjugué harmonique du centre de l'ellipsoïde par rapport aux sommets, c'est-à-dire rejeté à l'infini.

Appliquons une seconde fois le théorème aux points projetés en o', a', ε' et au point à l'infini. Les perpendiculaires menées de ω aux traces de leurs plans tangents sont respectivement sur la figure ωr, ωe, $\omega\omega'$, ωs. Comme s est le milieu de er, le faisceau est harmonique. Il en résulte immédiatement que ε' est le milieu de $o'a'$, et se trouve sur la droite $c'e$.

Nous signalerons encore une propriété de la tangente en o', qui est la trace verticale du plan tangent au cylindre. La trace horizontale est la perpendiculaire menée au rayon ωg de la base par la trace horizontale c de la génératrice; elle passe donc par le point θ où xy est coupée par la ligne de rappel du second point où la droite co rencontre la base du cylindre. On en déduit la tangente $o'\theta$.

Enfin, la symétrie de la figure nous permet de déduire du point (d, d') le point (δ, δ') qui est le quatrième point de la courbe situé dans le plan méridien de profil.

2° *Points situés sur les contours apparents du cylindre.* — Ce sont les intersections de l'ellipsoïde avec les génératrices de contour apparent horizontal et vertical du cylindre; et, pour les obtenir, on appliquera l'une des méthodes usuelles de construction des points communs à une droite et à une quadrique. Pour la clarté, nous n'effectuons les tracés qu'à propos de la génératrice de contour apparent horizontal qui a son pied sur la base en (l, l'), en employant la projection stéréographique, et en plaçant le point de vue au sommet (a, a'). La section faite dans l'ellipsoïde par le plan de bout mené par la génératrice a pour perspective sur (H) le cercle de diamètre $\alpha_1 \beta_1$ dont la construction est évidente. Quant à la perspective de la génératrice, elle joint l à la trace e de la parallèle aux génératrices menée une fois pour toutes par (a, a'). Les points de rencontre u_1, v_1 se ramènent par la perspective inverse en (u, u') et (v, v').

3° *Points fournis par les génératrices limites.* — Les génératrices limites sont les génératrices communes au cylindre donné et au cylindre parallèle circonscrit à l'ellipsoïde. Leurs pieds sur le plan (H) seront les points de rencontre du cercle (ω) avec la trace du cylindre auxiliaire sur ce même plan. Celle-ci peut être considérée comme l'enveloppe des cercles (i_1), projections obliques des parallèles de l'ellipsoïde dans le sens des génératrices. Les points e et f, étant ainsi les centres des cercles de rayon nul bitangents à la courbe, seront ses deux foyers; et comme le petit axe de l'ellipse est le diamètre hk de l'équateur de l'ellipsoïde perpendiculaire à ef, on aura assez d'éléments pour construire la courbe sans recourir aux génératrices du cylindre circonscrit. On a ainsi deux points λ et μ, qui fourniront deux points (φ, φ'), (ψ, ψ') dont les tangentes sont deux génératrices.

On constate, par le calcul, que la droite $\lambda\mu$ détermine sur oc, à partir de o, un segment qui résulte du partage du rayon de l'équateur en moyenne et extrême raison. Ce segment est aussi égal à la distance du point l à oc.

4° *Points doubles en projection.* — Nous avons déjà indiqué les tangentes au point double o de la projection horizontale. En projection verticale, nous avons aussi un point double ξ', la droite des points doubles étant l'intersection du plan méridien principal de l'ellipsoïde et du plan des génératrices de contour apparent vertical du cylindre. Cette droite sera une horizontale déterminée par le point (s, s') où l'axe du cylindre rencontre le plan méridien dont il s'agit. Le plan horizontal correspondant, pris comme plan auxiliaire, permet de construire rigoureusement les deux points qui ont même projection verticale, ainsi que leurs tangentes, que nous n'avons pas figurées.

Il n'y a pas lieu d'insister sur la ponctuation. J. L.

Bonnes épures de MM. H.-L. Mennessier, à Évreux; M. Roux, au Creusot.

SUJETS DE CONCOURS

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

Concours de 1920.

Mathématiques.

I. — 2470. 1° Étudier la famille des courbes

$$(\alpha) \qquad \rho \sin\omega + \frac{a^2}{\rho} \sin\omega - \alpha = 0,$$

α désignant un paramètre variable.

2° Soit V l'angle que fait en un point la tangente à la courbe (α) avec le rayon vecteur.

Démontrer qu'en tout point de rencontre des courbes (α) avec le cercle $\rho = b$ le rapport $\frac{\operatorname{tg} V}{\operatorname{tg} \omega}$ ne dépend que de $\frac{a}{b}$.

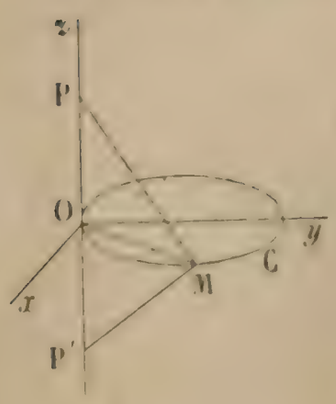
Calculer V en particulier pour les points de rencontre des courbes (α) avec le cercle $\rho = a$.

3° On considère la famille de courbes

$$(\beta) \qquad \rho \cos \omega - \frac{a^2}{\rho} \cos \omega - \beta = 0.$$

Démontrer que les familles (α) et (β) sont orthogonales.

II. — **2471**. On donne un cercle C dans un plan horizontal xOy. Par un point O de ce cercle on mène une perpendiculaire Oz au plan xOy.



Par O on mène une sécante OM et sur Oz on porte $OP = OP' = OM$, et on trace MP et MP'.

1° Trouver l'équation de la surface S engendrée par les droites MP et MP' quand le point M décrit le cercle C.

2° Étudier les sections horizontales de la surface S.

3° Par chaque point P il passe deux génératrices rectilignes de la surface S. Démontrer que leur plan coupe la surface suivant une conique.

Cette conique se trouve sur le cylindre

$$x^2 + y^2 = \overline{OM}^2.$$

Trouver le lieu des centres et des sommets de la conique quand le point M décrit le cercle C.

Calcul trigonométrique.

Soient deux nombres a et b ayant pour logarithmes décimaux

$$\log a = 0{,}23509, \qquad \log b = 0{,}43429.$$

1° Calculer les angles α et β compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ définis par les formules

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{2a}{3b}\sqrt{\frac{a}{3}}, \qquad \operatorname{tang} \beta = \sqrt[3]{\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}}.$$

2° Calculer les quantités

$$x = \sqrt{\frac{a}{3}} \cot 2\beta, \qquad y = \frac{\sqrt{a}}{\sin 2\beta}.$$

3° Calculer le module ρ et l'argument φ de l'imaginaire

$$x + iy = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi), \qquad (i^2 = -1)$$

et calculer

$$\rho^3 \cos 3\varphi \qquad \text{et} \qquad \rho^3 \sin 3\varphi.$$

4° Calculer la valeur que prend l'expression

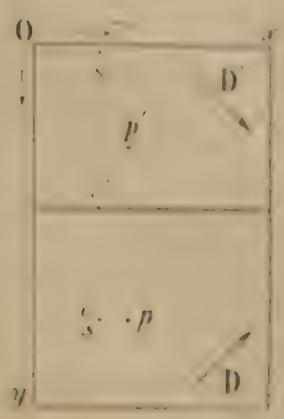
$$x^3 + 1{,}71828x + 2{,}71828$$

quand on y remplace x par la quantité

$$x + iy = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

précédemment calculée (3°).

Épure.



2472. — Cadre : 26 sur 40^{cm}.

Intersection d'un cône et d'une sphère.

Coordonnées à partir du sommet supérieur gauche du cadre en millimètres.

Cône de révolution à axe vertical. — Sommet (s, s') :

$$s'(x = 73^{mm}, \quad y = 7^{mm}), \qquad s(x = 73^{mm}, \quad y = 307^{mm}).$$

Base : Cercle horizontal de centre (c, c') : Rayon $= 70^{mm}$;

$$c'(x = 73^{mm}, \quad y = 177^{mm}), \qquad c \text{ confondu avec } s.$$

Le cône est posé sur une planche horizontale d'épaisseur 10^{mm}.

Sphère. — Centre (p, p') :

$$p'(x = 103^{mm}, \quad y = 113^{mm}); \qquad p(x = 103^{mm}, \quad y = 307^{mm}); \qquad \text{rayon} : 60^{mm}.$$

1° Représenter l'ensemble des deux solides.

2° L'ensemble des deux solides est éclairé par des rayons lumineux parallèles dont la direction (D', D) a ses projections inclinées à 45° sur les côtés du cadre.

Représenter les ombres propres de l'ensemble des solides ainsi que les ombres portées de cet ensemble sur lui-même et sur la planche horizontale. (Les limites des plages d'ombres en trait plein pour les parties vues et en pointillé pour les parties cachées.)

Épure à l'encre en noir, parties cachées en pointillé rond noir; constructions en rouge. Tangente en un point.

Coupe de la planche horizontale en hachures rouges.

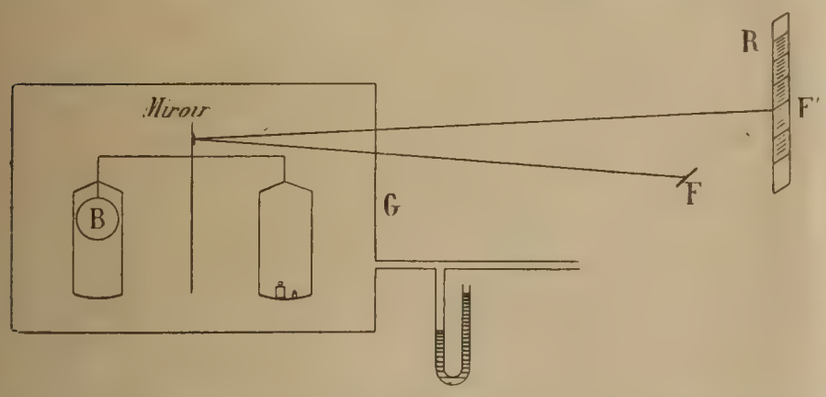
Ombres en hachures bleues ou au lavis (teinte plate) ou en hachures noires.

Titre : *Épure d'ombre*, en capitales droites.

Nom du candidat : angle supérieur gauche de la feuille, à l'encre.

Physique.

2473. — Une balance de précision est enfermée dans une cage étanche dont une paroi latérale est constituée par une glace transparente G. Un dispositif permet de faire varier la pression à l'intérieur de la cage; l'écart entre cette pression et la pression extérieure est mesuré par un manomètre à mercure. La cage renferme un thermomètre de précision. Les deux bras du fléau ont même longueur et les trois couteaux ont leurs arêtes situées dans le même plan.



Le couteau central porte un petit miroir concave, tangent au plan de symétrie transversal du fléau et destiné à la mesure des mouvements angulaires de celui-ci. Ce miroir donne, sur une règle translucide R, l'image F' d'un filament lumineux horizontal F. On admettra que, dans les limites d'emploi de l'appareil, la déviation δ du spot F' autour de la position d'équilibre stable est proportionnelle à la différence des efforts qui s'exercent sur les deux couteaux extrêmes.

A l'étrier de gauche est suspendue une boule B, dont le volume est $V = 200^{cm3}$; la tare est formée par des masses marquées de laiton. Le volume occupé par l'atmosphère gazeuse à l'intérieur de la cage est $U = 8\,125^{cm3}$.

La cage étant remplie d'air sec à la température $T = 293°$ absolus, sous la pression $H = 74^{cm}$ de mercure, on établit la tare de manière à amener le spot au zéro : cette tare est $M = 12^{g},900$. Puis, la température demeurant constante, on porte la pression à la valeur $H_1 = 79^{cm}$; on observe une déviation δ_1 du spot égale à $10^{cm},5$.

1° La pression étant ramenée à la valeur H_0, on place, sur le plateau de gauche, une feuille mince d'aluminium. Pour réaliser le retour au zéro du spot, il faut créer, dans la cage, une surpression $H_2 - H_0 = 7^{cm},32$.

Pendant toute la durée de l'expérience, le thermomètre accuse la même température $T = 293°$ absolus.

a) Quelle est la masse *m* de la feuille d'aluminium?

b) Quelle est l'erreur probable de cette mesure, l'incertitude de chacune des lectures étant :

$\varepsilon_\delta = 0^{cm},01$ dans la mesure de la déviation δ,

$\varepsilon_H = 0^{cm},005$ — de la hauteur de chacun des niveaux du manomètre,

$\varepsilon_T = 0°,05$ — de la température.

2° La cage étant remplie d'air sec à la température T (293° absolus) sous la pression $H = 74^{cm}$ de mercure, on y introduit goutte à goutte de l'alcool éthylique à l'aide d'une petite pompe, après avoir fermé toute communication avec l'extérieur. L'opération est effectuée assez lentement pour qu'à tout instant l'atmosphère de la cage puisse être considérée comme homogène et en équilibre de température avec l'extérieur ($T = 293°$ abs.)

Tracer la courbe qui exprime la déviation δ du spot en fonction de la masse μ d'alcool introduit, jusqu'au point correspondant à $\mu = 10^{g}$.

Densité du laiton . . . . . $\Delta = 8,6$

Densité de l'alcool liquide à 293° absolus . . . . . $D = 0,79$

Masse du litre d'air, dans les conditions normales . . . . . $1^{g},293$

Température absolue du zéro centigrade . . . . . 273°
Densité de la vapeur d'alcool rapportée à l'air.. . . . . $d = 1,61$
Tension maximum de la vapeur d'alcool à la température de 293° absolus . . . $h = 4^{m},40$ de mercure.

Chimie.

I. — **2474.** 1° On décompose par la chaleur de l'oxyde rouge de mercure. Les produits obtenus sont séparés par refroidissement. Formuler la réaction.

2° On traite du sulfure d'antimoine par une solution concentrée et chaude d'acide chlorhydrique; le gaz, A, produit par la réaction est brûlé avec une partie de celui qui a été obtenu par la décomposition de l'oxyde de mercure; il se fait un gaz, B, et de la vapeur d'eau. Formuler les réactions.

3° On fait passer le gaz B mélangé au reste de celui qui a été produit dans la réaction du 1°, sur de l'amiante platiné, chauffé à température convenable. Formuler la réaction.

4° Le produit formé dans l'opération précédente est alors traité avec les précautions voulues par une solution de carbonate de sodium. On obtient un sel neutre et un nouveau gaz, C.

On demande quel poids d'oxyde de mercure et de sulfure d'antimoine il a fallu employer pour arriver à 11^{g} du composé C.

On admettra que la réaction du 3° est totale.

Poids atomiques :

$O = 16$; $H = 1$; $S = 32$. $C = 12$; $Sb = 120$; $Hg = 200$.

Nota. — L'expression : « Formuler la réaction », signifie que la formule de la réaction devra être écrite sans être accompagnée d'aucun commentaire.

II. — Préparation de l'azote.

QUESTIONS PROPOSÉES

2475. — On considère deux cercles, C et C', se coupant en deux points, A et B; on effectue sur cette figure une transformation homographique telle que les points A et B deviennent dans la nouvelle figure les points cycliques. Étudier cette transformation.

1° En déduire qu'il existe deux familles de coniques tangentes à C et C' et passant par les points A et B. Montrer que la droite des contacts des coniques avec les cercles passe, pour chaque famille, par un point fixe.

2° Trouver le lieu des centres de ces coniques; ce sont des cercles dont les polaires relatives aux points fixes trouvés précédemment sont confondues avec AB.

3° Montrer que la première famille des coniques est formée par des hyperboles dont les asymptotes passent par deux points fixes, ainsi que les axes. Ces hyperboles sont semblables.

4° La deuxième famille est constituée par des ellipses dont les diamètres conjugués égaux passent par deux points fixes, ainsi que les axes. Ces ellipses sont semblables.

5° Trouver les lieux des pôles de AB par rapport à ces coniques. Distinguer ces lieux suivant les familles considérées.

Nota. — On peut aussi traiter le problème directement.

(GUILLERME Charles, à Grenoble.)

2476. — On donne un cercle de rayon R, deux diamètres rectangulaires AA', BB' et une tangente fixe en A, Δ. Une tangente mobile coupe Δ en M et BB' en N. On demande :

1° le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle MON;

2° les lieux des centres des cercles inscrit et ex-inscrits dans le même triangle;

3° l'enveloppe du cercle circonscrit à ce triangle.

Construire ces diverses lignes.

(R. MANEN, à Albi.)

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

Coulommiers. — Imp. PAUL BRODARD.

31e Année. Novembre 1920. N° 2.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Note de la Rédaction. — Afin de diminuer le retard qui existe encore dans publication des solutions des questions proposées, nous ne publierons pas les solutions des questions 2389, 2390, 2399, 2405, 2406, 2409-10-11-12-13-14-15-16, 2433-34-35-36-37-38-39-40-41-42-43, 2450-51-52-53-54-55-56-57-58-59-60-61-62.

PREMIÈRE PARTIE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Concours de 1919.

2294. — 1° *Étudier l'intersection* C *de la sphère* $x^2+y^2+z^2=1$ *et du cylindre* $x^2+y^2=x$.

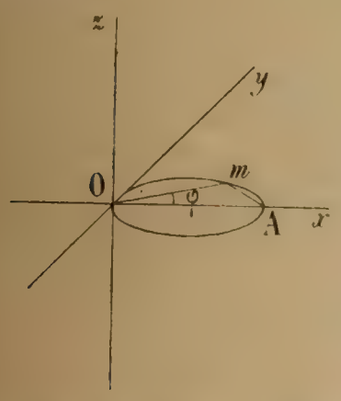
On exprimera les coordonnées d'un point M *de* C *en fonction de l'angle* φ *que fait avec* Ox *la projection du rayon* OM *sur* xOy.

On construira la projection de la courbe C *sur* yOz; *on déterminera les rayons de courbure aux points où elle coupe* Oz.

2° *Étudier le mouvement d'un mobile décrivant la courbe* C *de manière que le vecteur accélération coupe constamment* Oz; *que, de plus, pour* $t=0$, *on ait* $\varphi=0$, $\frac{d\varphi}{dt}>0$, *et que la courbe* C *soit entièrement décrite dans le temps* 2π.

On exprimera en fonction de φ *le temps* t, *les composantes de la vitesse et de l'accélération et la grandeur de ces deux vecteurs. Dans le mouvement en projection sur* xOy, *on exprimera l'accélération en fonction de la distance à l'origine.*

1° Soit m la projection du point M sur le plan des xy; m est un point du cercle $x^2+y^2=x$, et l'angle que fait Om avec Ox (Ox, Om), est égal à φ [sens positif (Ox, Oy)].



La longueur Om est la projection de OA sur Om; nous avons donc $Om=\cos\varphi$. Les coordonnées du point m sont alors $x=Om\cos\varphi$, $y=Om\sin\varphi$, c'est-à-dire $x=\cos^2\varphi$, $y=\cos\varphi\sin\varphi$.

Portons ces valeurs dans $x^2+y^2+z^2=1$; nous aurons

$$z^2=1-\cos^2\varphi, \qquad z^2=\sin^2\varphi, \qquad z=\pm\sin\varphi;$$

nous avons donc, pour représenter la courbe, les deux systèmes d'équations :

$$x=\cos^2\varphi, \qquad y=\sin\varphi\cos\varphi, \qquad z=\sin\varphi$$

et

$$x=\cos^2\varphi, \qquad y=\sin\varphi\cos\varphi, \qquad z=-\sin\varphi;$$

mais on passe de l'un à l'autre en changeant φ en $\pi+\varphi$; le premier suffit seul à représenter la courbe tout entière.

La projection de la courbe sur le plan des xy est un cercle, le cercle de diamètre OA.

La projection de la courbe sur le plan des xz est la courbe

$$x = \cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi, \qquad z = \sin\varphi;$$

c'est une parabole, $x = 1 - z^2$, ayant pour axe la droite Ox, pour sommet le point A, $x = 1$, et pour paramètre, $\frac{1}{2}$; la concavité est tournée vers le point O. La portion utile de cette parabole est l'arc BAC compris entre Oz et une parallèle à Oz menée par le point A.

La projection de la courbe C sur le plan yOz a pour équations paramétriques

$$y = \sin\varphi\cos\varphi, \qquad z = \sin\varphi,$$

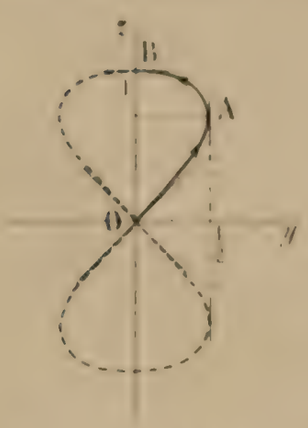
et, pour équation cartésienne

$$y = z\sqrt{1 - z^2}, \qquad \text{ou} \qquad y^2 = z^2(1 - z^2).$$

Pour construire cette courbe, nous pouvons nous servir soit de l'équation cartésienne, soit des deux équations paramétriques. Nous suivrons le second procédé.

Les deux fonctions y et z sont périodiques et ont pour période commune 2π; quand on y change φ en $-\varphi$, y se change en $-y$ et z en $-z$; la courbe est donc symétrique par rapport au point O, et, en tenant compte de cette symétrie, nous pouvons réduire l'intervalle de moitié : faisons en effet varier φ de $-\pi$ à $+\pi$, nous pouvons supprimer la partie négative de l'intervalle qui donne la moitié symétrique par rapport au point O de celle qui correspond à l'intervalle $(0, \pi)$. Nous ferons donc varier φ de 0 à π. Changeons encore φ en $\pi - \varphi$, z ne change pas et y se change en $-y$; la courbe est symétrique par rapport à Oz, et il suffit d'en construire une moitié, celle qui correspond à l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Nous ferons donc varier φ de 0 à $\frac{\pi}{2}$; nous prendrons ensuite la partie symétrique de celle-ci par rapport à Oz; puis, la partie symétrique des deux précédentes réunies par rapport au point O.



Pour $\varphi = 0$, y et z sont nuls, la branche de courbe part du point O; le rapport $\frac{z}{y}$ est égal à 1, la branche est tangente au départ à la première bissectrice; quand φ augmente, z augmente et $y = \frac{\sin 2\varphi}{2}$ augmente aussi jusqu'à $\varphi = \frac{\pi}{4}$; à ce moment $y = \frac{1}{2}$ et $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$, y passe par un maximum, et, comme y' est nul, la tangente est verticale; ensuite, de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{2}$, y diminue de $\frac{1}{2}$ à 0 et z augmente de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ à 1; en ce point de Oz, la tangente est horizontale, car z' est nul.

Nous obtenons donc ainsi l'arc OAB; il n'y a plus qu'à compléter par symétrie.

Le rayon de courbure en un point a pour valeur

$$\rho = \frac{(y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}{y'z'' - z'y''};$$

or,

$$y' = \cos 2\varphi, \qquad z' = \cos\varphi,$$
$$y'' = -2\sin 2\varphi, \qquad z'' = -\sin\varphi;$$

par conséquent,

$$\rho = \frac{(\cos^2 2\varphi + \cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{\sin\varphi + \sin 2\varphi\cos\varphi}.$$

Pour $\varphi = 0$, ρ est infini; cela n'a rien d'étonnant, puisque, sur la branche tracée, l'origine est un point d'inflexion. Pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\rho = 1$, le rayon de courbure du point B est égal à 1, le centre de courbure correspondant est le point O.

2° Si l'accélération rencontre toujours Oz, l'accélération, dans le mouvement projeté sur le plan xOy, est centrale et le mouvement du point m obéit à la loi des aires; nous avons donc

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C,$$

C désignant, comme d'habitude, la constante des aires. Mais $r^2 = x^2 + y^2 = \cos^2\varphi$; donc

$$C dt = \cos^2\varphi \, d\varphi,$$
$$2C dt = (1 + \cos 2\varphi) d\varphi;$$

par suite, $2Ct + C' = \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}$.

Au temps $t = 0$, φ est nul; donc C' est nul; ensuite, pour $t = 2\pi$, $\varphi = 2\pi$; par conséquent,

$$4C\pi = 2\pi, \qquad C = \frac{1}{2}.$$

L'équation du temps est donc

$$t = \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2};$$

il résulte de là que $\frac{dt}{d\varphi} = 1 + \cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi$, $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2\cos^2\varphi}$.

Calculons maintenant les composantes de la vitesse; nous aurons

$$\frac{dx}{dt} = -\sin 2\varphi \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\sin 2\varphi}{2\cos^2\varphi} = -\operatorname{tg}\varphi,$$

$$\frac{dy}{dt} = \cos 2\varphi \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\cos 2\varphi}{2\cos^2\varphi} = 1 - \frac{1}{2\cos^2\varphi},$$

$$\frac{dz}{dt} = \cos\varphi \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\cos\varphi}{2\cos^2\varphi} = \frac{1}{2\cos\varphi};$$

par suite,

$$v^2 = \frac{\sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi + \cos^2\varphi}{4\cos^4\varphi} = \frac{1 + \cos^2\varphi}{4\cos^4\varphi},$$

$$v = \frac{\sqrt{1 + \cos^2\varphi}}{2\cos^2\varphi}.$$

D'autre part, $r^2 = \cos^2\varphi$; donc

$$v = \frac{\sqrt{1 + r^2}}{2r^2}.$$

Passons à l'accélération. Les composantes sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{2\cos^4\varphi},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\sin\varphi}{2\cos^5\varphi},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\sin\varphi}{2\cos^2\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sin\varphi}{2\cos^4\varphi};$$

la valeur de l'accélération est donnée par

$$\gamma^2 = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2;$$

ici,
$$\gamma^2 = \frac{1 + \operatorname{tg}^2\varphi + \sin^2\varphi}{4\cos^8\varphi}, \qquad \gamma^2 = \frac{1 + \sin^2\varphi\cos^2\varphi}{4\cos^{10}\varphi};$$

or, $r^2 = \cos^2\varphi$; par conséquent, γ^2 a pour valeur, en fonction de r,
$$\gamma^2 = \frac{1 + r^2(1 - r^2)}{4r^{10}},$$
et
$$\gamma = \frac{\sqrt{1 + r^2 - r^4}}{2r^5}.$$

Quant à l'accélération dans le mouvement projeté sur le plan horizontal, elle est donnée par la formule
$$\gamma_{\text{II}}^2 = \gamma^2 - \gamma_z^2;$$
comme γ_z^2 a pour valeur $\dfrac{\sin^2\varphi}{4\cos^8\varphi}$, γ_{II}^2 a pour valeur
$$\gamma_{\text{II}}^2 = \frac{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}{4\cos^4\varphi} = \frac{1}{4\cos^{10}\varphi};$$
par suite,
$$\gamma_{\text{II}} = \frac{1}{2\cos^5\varphi} = \frac{1}{2r^5}.$$

Nous pouvons d'ailleurs avoir de suite γ_{II}^2 par la formule
$$\gamma_{\text{II}}^2 = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2.$$

Il est visible, en outre, que l'accélération est dirigée vers le point O ; sa valeur algébrique est donc
$$\gamma_{\text{II}} = -\frac{1}{2r^5}.$$

Bonnes solutions de MM. G. Lach, à Douai; A.-O. Gilbert, à Nantes; M., à Guéret; Mennessier, à Évreux; M. Roux, au Creusot; Ch. Page, enseigne de vaisseau; A. Berlande, à Lyon; L. Chiganne, à Strasbourg; J. Bouchary, étudiant; L. Gauthier, à Craponne; F. Millot, à Paris.

Assez bonnes solutions de MM. G. Singier, lycée de Valenciennes; M. Vasseur, à Calais.

2295. — 1° *On considère un déterminant d'ordre n dans lequel la troisième ligne a son premier élément nul; la quatrième ligne, ses deux premiers éléments nuls et, d'une manière générale, la ligne de rang p, ses $p-2$ premiers éléments nuls ($p > 2$).*

Déterminer le nombre des termes différents de zéro dans le développement du déterminant.

2° *Même question, en supposant de plus que chacune des deux premières lignes ait ses deux derniers éléments nuls.*

1° En développant par rapport aux éléments de la première colonne, on obtient deux mineurs à $n-1$ lignes et $n-1$ colonnes et tout pareils au déterminant proposé. En appelant N_n le nombre des termes non nuls, on a $N_n = 2N_{n-1}$, et cette égalité est bonne jusqu'à $n = 3$. On voit de suite alors que $N_n = 2^{n-1}$. Inutile d'insister davantage.

2° Quand les deux derniers éléments de chacune des deux premières lignes sont nuls, chacun des mineurs envisagés plus haut a sa première ligne terminée par deux zéros. Le second mineur relatif à chacun d'eux se réduit à son terme diagonal; il y a donc perte d'un terme pour chacun des deux zéros et on a alors
$$N'_n = 2(N_{n-1} - 2);$$
par suite,
$$N'_n = 2^{n-1} - 4;$$
N'_n désigne évidemment le nouveau nombre demandé.

Bonnes solutions de MM. G. Singier, à Valenciennes; A.-O. Gilbert, à Nantes. R. Rapinat, sous-lieutenant d'artillerie; L. Gauthier, à Craponne; G. T., à Lille; L. Long, à Chatellerault; J. Bouchary, étudiant; M. Roux, au Creusot; G. Lach, à Douai; M., à Guéret.

2296. — *On considère l'arc ω, fonction de la variable x, compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et qui a pour sinus*

$$\sin\omega = \sqrt{\frac{4x}{15x+60}}.$$

1° *Étudier la variation de la fonction* $y = \frac{\omega}{x+4}$ *et la représenter par une courbe.*

2° *Déterminer la constante a de façon que* $x^2y - ax$ *ait une limite finie quand x croît indéfiniment et déterminer cette limite.*

1° La fonction ω définie par l'équation

$$\sin\omega = \sqrt{\frac{4x}{15x+60}}$$

n'existe que si la quantité sous le radical est positive et plus petite que 1. Ceci donne les deux inégalités

$$\frac{x}{x+4} > 0 \qquad \text{ou} \qquad x(x+4) > 0,$$

et

$$\frac{4x}{15x+60} < 1, \qquad (11x+60)(x+4) > 0.$$

La première oblige x à être extérieur à l'intervalle $(-4, 0)$; la seconde oblige x à être extérieur à l'intervalle $\left(\frac{-60}{11}, -4\right)$.

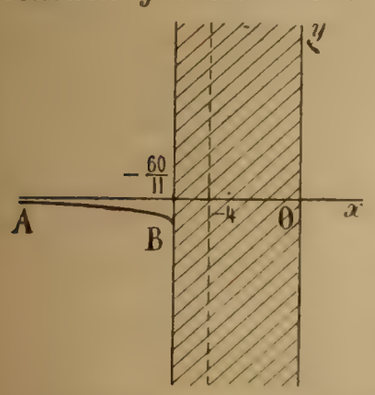
En résumé, x peut varier de $-\infty$ à $-\frac{60}{11}$ et de 0 à $+\infty$; la valeur -4, qui figure au dénominateur de y, n'est pas comprise dans les intervalles de variations et la fonction $y = \frac{\omega}{x+4}$ est définie dans les deux intervalles indiqués, sans aucune restriction.

Dans cette fonction ω représente la détermination de $\text{arc}\sin\sqrt{\frac{4x}{15x+60}}$, qui est comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Pour x infini, $\sin\omega = \sqrt{\frac{4}{15}}$ et, pour $x = -\frac{60}{11}$, $\sin\omega = 1$; de plus la fonction $\frac{4x}{15x+60}$ est croissante, $\sin\omega$ aussi, et nous avons les résultats suivants :

Quand x croît de $-\infty$ à $-\frac{60}{11}$, la fonction ω croît de $\text{arc}\sin\frac{2}{\sqrt{15}}$ à $\frac{\pi}{2}$;

Quand x croît de 0 à $+\infty$, la fonction ω croît de 0 à $\text{arc}\sin\frac{2}{\sqrt{15}}$.

Passons maintenant à la fonction y. A gauche, de $x = -\infty$ à $-\frac{60}{11}$, $x+4$ est négatif et décroît en valeur absolue; donc $\frac{\omega}{x+4}$ est négatif et croît en valeur absolue; par conséquent, la fonction y décroît de 0 à $\frac{\frac{\pi}{2}}{4-\frac{60}{11}}$, ou de 0 à $\frac{-11\pi}{32}$; ce dernier nombre est un peu plus grand que 1 en valeur absolue.



La fonction y est représentée par l'arc AB; nous verrons plus loin que la tangente au point B est parallèle à Oy.

A droite, de $x = 0$ à $x = +\infty$, la fonction ω est positive et croissante; il en est de même de $x+4$, et nous ne pouvons rien dire.

Prenons alors la dérivée; nous aurons

$$y' = \frac{\omega'(x+4) - \omega}{(x+4)^2}.$$

et il faudra reconnaître le signe de $\omega'(x+4) - \omega$.

Or,

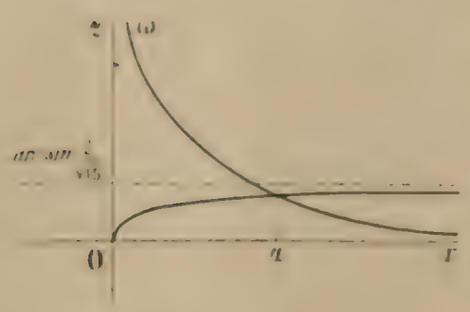
$$\omega = \arcsin\sqrt{\frac{4x}{15(x+4)}}, \qquad \omega' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x}{15x+60}}}\,\frac{4}{15}\,\frac{\frac{x+4-x}{(x+4)^2}}{2\sqrt{\frac{4x}{15(x+4)}}}. \qquad \omega' = \frac{4}{|x+4|\sqrt{x(11x+60)}};$$

le signe de y' est donc fourni par

$$\frac{4(x+4)}{|x+4|\sqrt{x(11x+60)}} - \omega.$$

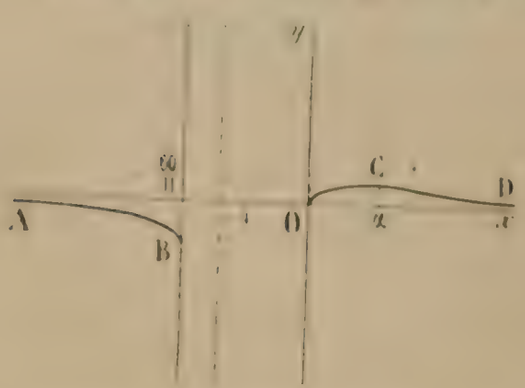
Dans le premier intervalle, où $x < -\frac{60}{11}$, $x+4$ est négatif, les deux termes sont négatifs, la dérivée y' est toujours négative et nous retrouvons ce fait déjà établi que la fonction est décroissante. Pour $x = -\frac{60}{11}$, la dérivée devient infinie, la tangente au point B est verticale.

Dans le second intervalle, où $x > 0$, la quantité à étudier se réduit à $\frac{4}{\sqrt{x(11x+60)}} - \omega$; la première partie, $z = \frac{4}{\sqrt{x(11x+60)}}$, est décroissante, et varie de $+\infty$ à 0; la deuxième partie, $\omega = \arcsin\sqrt{\frac{4x}{15(x+4)}}$, est positive et croissante, et varie de 0 à $\arcsin\frac{2}{\sqrt{15}}$; les deux courbes correspondantes se coupent en un point unique, $x = \alpha$; la dérivée y' est positive de 0 à α, et négative de α à $+\infty$.



La fonction y est donc croissante de 0 à α, et décroissante ensuite; elle passe par un maximum pour $x = \alpha$, est nulle au point O, et nulle aussi à l'infini.

Pour voir comment la racine α est placée, il faut substituer les nombres 1, 2, 3; on verra que la racine est comprise entre 2 et 3 et voisine de 2 [$f(2)$ est positif et petit, $f(3)$ est négatif].



La courbe totale est tracée à côté. La tangente en O est verticale aussi : y' devient infinie en ce point. Quant à l'ordonnée du maximum, $y(\alpha)$, elle est petite, plus petite que $\frac{1}{12}$.

2° La quantité $x^2y - ax$ peut s'écrire

$$x^2(xy - a) = x\left(\frac{\omega x}{x+4} - a\right);$$

le premier facteur, x, devient infini; il ne peut y avoir de limite que si le second tend vers 0, c'est-à-dire si $a = \lim\frac{\omega x}{x+4}$. Pour $x = \infty$, cette limite est $\arcsin\frac{2}{\sqrt{15}}$; donc la valeur de a est $\arcsin\frac{2}{\sqrt{15}}$.

Pour trouver la limite de l'expression $x^2y - ax$, elle-même, nous l'écrirons ainsi : $\dfrac{\frac{\omega x}{x+4} - a}{\frac{1}{x}}$ et nous prendrons le quotient des dérivées; nous aurons

$$\mathrm{D}.\ \frac{\frac{\omega x}{x+4}}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{x^2}{(x+4)^2}\left[4\omega + 4\omega' x + \omega' x^2\right].$$

Pour $x = \infty$, le rapport $\frac{-x^2}{(x+4)^2}$ tend vers -1, la fonction 4ω tend vers $4\arcsin\frac{2}{\sqrt{15}}$;

enfin, $\omega' x$ tend vers 0 et $\omega' x^2$, vers $\frac{\quad}{\sqrt{11}}$, car

$$\omega' x^2 = \frac{4x^2}{|x+4|\sqrt{x(11x+60)}}.$$

La limite de l'expression indiquée est donc

$$-4 \arcsin \frac{2}{\sqrt{15}} - \frac{4}{\sqrt{11}}.$$

Bonnes solutions de MM. G. Lach, à Douai; Mennessier, à Évreux; J. Bouchary, étudiant; A. Guibert, à Nantes; L. Gauthier, à Craponne; L. Chiganne, à Strasbourg; Ch. Pacé, enseigne de vaisseau; A. Hutinel, à Cannes; Y. Bouthillier, élève à l'École centrale.

Assez bonnes solutions de MM. M. Vasseur, à Calais; A. Berlande, à Lyon; Mirguet, à Guéret; G. Singier, à Valenciennes; F. Millou, à Paris.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1920)

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES (*Suite.*)

Géométrie descriptive (M. Bouligand).

24. — Déterminer un cône de révolution tangent au plan horizontal suivant la ligne de terre et passant par deux points donnés. Trouver d'abord sa section par le plan de bout de ces points.

25. — On donne une sphère; déterminer un cône de révolution circonscrit, le cercle de contact passant par un point donné de la sphère et le cône devant passer par deux points donnés.

26. — Circonscrire à une sphère un cône de révolution d'angle au sommet donné et passant par deux points donnés.

27. — Circonscrire à une sphère un cylindre de révolution de rayon donné, passant par un point donné et tangent à une droite (ou encore passant par deux points donnés, ou bien tangent à deux droites données).

28. — Construire un cylindre de révolution de rayon donné, tangent au plan horizontal et passant par deux points donnés.

29. — Construire un cylindre parabolique, connaissant le paramètre d'une parabole de section droite, deux points de ce cylindre et sachant que les axes des sections droites sont dans le plan horizontal.

30. — Mener un cône par un point A et une conique C du plan horizontal, de manière que le plan vertical de projection soit un plan de section circulaire de ce cône. Étudier d'abord le cas où le plan de front de A rencontre la conique C en deux points réels. Lorsque cette condition n'est pas remplie, déterminer le cercle du cône situé dans ce plan P, sachant qu'il passe par A et par les points de rencontre imaginaires conjugués de rencontre de C avec la trace horizontale du plan P. Se servir à cet effet de deux couples de points de cette trace conjugués par rapport à la conique C.

31. — Un cône a pour base un cercle dans le plan horizontal. On considère une section de ce cône par un plan passant par une droite D. Déterminer le centre de cette section et chercher son lieu géométrique lorsque le plan tourne autour de D (hyperbole située dans le plan polaire d'une parallèle à D issue du sommet). Déterminer un plan passant par D de manière que le centre de la section obtenue soit dans le plan horizontal.

32. — On donne un cône de révolution à axe vertical de demi-angle au sommet 60°. Trouver une hyperbole équilatère tracée sur ce cône, ayant son centre dans le plan horizontal, le plan de la courbe devant en outre contenir un point donné.

33. — On donne une sphère et un cône à base horizontale circulaire. Mener un plan qui coupe les deux surfaces suivant des cercles de rapport d'homothétie donné.

34. — Mener par trois points donnés une sphère qui coupe le plan horizontal de projection suivant un cercle imaginaire dont on connaît le module du rayon.

35. — On donne un cône de révolution à axe vertical, non sécant à la ligne de terre. Trouver les contours apparents du cône de révolution qui passe par un point donné et par les deux droites imaginaires communes au premier cône et au plan mené par son sommet et la ligne de terre (couper par une sphère centrée au sommet, et prendre pour plan du tableau le plan de profil de ce point).

36. — Un cercle donné dans le plan horizontal est la base commune de deux cônes. Le sommet d'un de ces cônes est donné. Déterminer le sommet du second cône dans le plan vertical, de manière que la deuxième conique commune soit une parabole tangente à un plan horizontal donné.

37. — Un cône a pour base un cercle du plan horizontal. Mener par un point donné un cône homothétique coupant le premier suivant un cercle.

38. — Reconnaître la nature de la conique commune à deux cônes du second ordre homothétiques.

39. — Déterminer une sphère connaissant l'ellipse suivant laquelle se projette un certain grand cercle de la sphère, et un point de cette sphère.

40. — Un cône C a pour base dans le plan horizontal une parabole donnée ayant pour axe la ligne de terre. Son sommet est dans le plan vertical à une cote donnée. La trace horizontale du cône supplémentaire est un cercle. Trouver le cône C.

41. — Faire passer par deux points donnés une sphère qui coupe un cône donné, à base circulaire, suivant deux cercles.

42. — Trouver une sphère coupant deux cônes suivant des cercles, sachant que les bases de ces cônes sont des cercles du plan horizontal.

43. — On donne un cône de révolution d'axe vertical et d'angle au sommet 60°, et on demande de déterminer un cône, de sommet donné et coupant le premier suivant un cercle et suivant une hyperbole équilatère, ou encore suivant un cercle et une parabole (application de la recherche des directions asymptotiques de l'intersection de deux cônes).

44. — Faire passer par un point donné une sphère qui ait en commun un grand cercle avec un cône donné à base circulaire horizontale.

45. — On considère une parabole du plan horizontal ayant pour directrice la ligne de terre. Trouver une sphère tangente aux deux plans de projection et passant par les deux points imaginaires de rencontre de la parabole donnée avec la ligne de terre.

46. — Étudier les cylindres qui coupent deux cônes donnés du second ordre suivant un système de cercles.

47. — Trouver sur un cône à base circulaire horizontale une parabole tangente aux deux plans de projection.

48. — Faire passer par un cercle donné du plan horizontal un cylindre coupant une sphère donnée suivant un système de deux cercles.

49. — Faire passer par deux droites (A, A') et (B, B') un hyperboloïde de révolution à axe de front. Chercher d'abord la direction de l'axe (droite de front également inclinée sur les deux génératrices), et terminer par un changement de plan horizontal approprié.

50. — On donne une parabole horizontale d'axe parallèle à la ligne de terre et une droite de l'espace rencontrant cette parabole. Faire passer par cette parabole et par la droite un hyperboloïde de révolution.

51. — On donne un hyperboloïde de révolution à axe vertical. Trouver une génératrice de la surface dont la plus courte distance à la ligne de terre ait une longueur donnée.

52. — On donne une sphère et on considère la parallèle à la ligne de terre qui lui est tangente au point le plus bas. On prend en outre une tangente de bout. Étudier l'hyperboloïde de révolution circonscrit à la sphère et passant par les deux droites précédentes.

53. — Trouver sur un hyperboloïde de révolution à axe vertical une parabole tangente au premier plan bissecteur et dont le plan passe par un point donné.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

I. — Algèbre et Analyse.

10275. — On considère la suite $x_1 = \sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}}$, $x_2 = \sqrt[3]{x\sqrt[3]{x x_1}}$, $x_3 = \sqrt[3]{x\sqrt[3]{x x_2}}$, ... $x_n = \sqrt[3]{x\sqrt[3]{x x_{n-1}}}$, ... Trouver la limite de x_n quand n augmente indéfiniment.

— **276.** — Trouver le plus grand commun diviseur aux polynomes $9x^5 + 11x^3 - 2$ et $81x^3 + 11x + 4$.

— **277.** — On donne $u_1 = \sqrt{3}$, $u_2 = \sqrt{3 + u_1}$, ... $u_n = \sqrt{3 + u_{n-1}}$; trouver la limite de u_n pour n infini.

— **278.** — On donne les deux relations de récurrence $u_n = u_{n-1} + 2v_{n-1}$, $v_n = -\frac{1}{6}u_{n-1} - \frac{1}{6}v_{n-1}$, qui définissent u_n et v_n, si l'on donne u_0 et v_0. Trouver une relation entre les quantités u seulement. On trouve $6u_{n+1} - 5u_n + u_{n-1} = 0$. En déduire l'expression de u_n.

— **279.** — Étudier les séries qui ont pour termes généraux

$$\frac{\sin\frac{\pi}{n}\cos n\pi}{1+\sqrt{n}},\quad n^{-1/2}x^n,\quad \frac{1}{n}\,\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{n}\right),\quad \frac{x^n}{n}\cos\frac{2n\pi}{3},\quad \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n},\quad \frac{1}{nr}\,\mathrm{tg}\,\frac{r}{nr},\quad \sqrt{n^3+1}\,e^{-\sqrt{n}},$$

$$\mathrm{L}\left(1+\mathrm{tg}\,\frac{x^n}{a+n}\right),\quad \frac{x^n}{n} - \mathrm{L}\,x^{\frac{n-1}{n}},\quad \frac{(-1)^n \sin\frac{\pi}{n}\,\mathrm{arc\,tg}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos n\pi}{\sqrt{n+(-1)^n}},\quad \sqrt{n^2+a}+\sqrt{n^2+b}-2n.$$

— **280.** — On considère les séries qui ont pour termes généraux

$$L(1+n)+aL(2+n)+bL(3+n), \qquad aLn+bL(n+1)+2L(1+\sqrt{n})+\frac{c}{\sqrt{n}},$$

déterminer a, b, c pour que ces séries soient convergentes.

— **281.** — Étudier la série dont le terme général est $x^n y^p$, $x<1$, $y>1$, p désignant le nombre des chiffres de n.

— **282.** — Calculer la somme des séries dont les termes généraux sont

$$a^{(-1)^n}x^n, \qquad ne^{-n}, \qquad \frac{n+3}{n+1}x^n, \qquad \frac{1}{(3n)!}.$$

— **283.** — Développer en séries les fonctions $L(\sqrt{1+x^2}-x)$, $\frac{1}{1+e^x}$, $\frac{(1+x)^p}{(1-x)^2}$.

— **284.** — Développer par la formule de Mac Laurin la fonction y définie par l'équation $\operatorname{tg} y=\frac{1-x}{1+x}\operatorname{tg} a$.

— **285.** — Appliquer la formule de Taylor à $\sin(x+h)$. En déduire la formule d'addition des sinus.

— **286.** — Trouver pour $x=0$ les limites des fonctions

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}, \qquad \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}, \qquad \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{x}}, \qquad \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{x^2}}, \qquad \left(\frac{1}{\cos x}\right)^{\cot x}, \qquad \frac{x-\sin x-\frac{1}{6}\sin^3 x}{(\operatorname{arc}\sin x)^5},$$

$$(\cos x+\sin x)^{\cot x}, \qquad x^n Lx, \qquad \frac{\pi x+1}{x^2}-\frac{2\pi e^{2\pi x}}{x(e^{2\pi x}-1)}, \qquad (\operatorname{arc}\sin x)^x.$$

— **287.** — Trouver pour n infini les limites des expressions

$$n\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{1}{n^2+k}, \qquad \frac{1}{n^2+1}+\frac{3}{n^2+4}+\frac{5}{n^2+9}+\ldots+\frac{2p-1}{n^2+p^2}, \qquad \frac{\sqrt{n!}}{n}, \qquad \left[\cos\frac{2k\pi}{n}\right]^{n^2}.$$

— **288.** — Trouver les limites de $(x+1)^{1+\frac{1}{x+1}}-x^{1+\frac{1}{x}}$ pour $x=+\infty$, $(x-1)^3 e^{\frac{x-1}{x+1}}$ pour $x=1$, $L\frac{2x}{\pi}\cdot e^{\frac{1}{\cos x}}$ pour $x=\frac{\pi}{2}$, $\left(\frac{4x}{\pi}\right)^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$ pour $x=\frac{\pi}{4}$, $\frac{1}{\cos x}+L\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$ pour $x=-\frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{x}L\frac{e^x-1}{x}$ pour $x=0$ et $x=+\infty$.

— **289.** — Étudier les variations des fonctions

$$\operatorname{arc}\sin Lx, \qquad \frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\ \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right), \qquad \cos\sqrt{x}, \qquad \frac{x^5(1+x)^3}{(1+2x)^2}, \qquad e^{2x}+m\frac{x-1}{x+1}, \qquad x^2 e^{\frac{1}{1-x}}, \qquad \frac{L(1+e^x)}{x}.$$

$$(\cos x)^{\frac{1}{x}}, \qquad (x-1)e^{\frac{1}{(x-1)(x-2)}}, \qquad \cos x\, e^{\operatorname{tg} x}, \qquad (Lx)^{\frac{1}{x}}, \qquad (1+x)^{x+a}, \qquad y^2=e^{-x}\left(L|c|-\frac{1}{x}\right), \qquad y^2=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-L\,x.$$

— **290.** — Discuter les variations de la fonction $x-\log x$. En déduire les systèmes de logarithmes dans lesquels un nombre est égal à son logarithme.

— **291.** — Appliquer la formule des accroissements finis à la fonction Lx entre n et $n+1$. En déduire la divergence de la série harmonique.

— **292.** — Trouver deux fonctions circulaires dont la différence des carrés est égale à 1. On a $\frac{1}{\cos^2 y}-\operatorname{tg}^2 y=1$. En posant $\operatorname{ch} x=\frac{1}{\cos y}$, $\operatorname{sh} x=\operatorname{tg} y$, démontrer que $\operatorname{th}\frac{x}{2}=\operatorname{tg}\frac{y}{2}$.

— **293.** — On considère la fonction y de la variable x définie par l'équation $e^x-e^y(x-y)=0$. Calculer $\frac{dy}{dx}$. Construire la courbe correspondante.

— **294.** — Soient u et v deux fonctions des deux variables indépendantes x et y. Démontrer que si l'on a $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, on a aussi $\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial v}$, x et y étant considérées cette fois comme fonctions de u et v.

— **295.** — Quelles sont les valeurs imaginaires de z pour lesquelles $\operatorname{tg} z$ est réel?

— **296.** — Résoudre les équations $\cos z=\cos(a+bi)$, $\operatorname{sh} x=\frac{3}{4}$, $\sin z=i+2$.

— **297.** — Établir les inégalités $x-\frac{x^2}{2}<L(1+x)<x-\frac{x^2}{2(1+x)}$ pour les valeurs de x comprises entre 0 et 1.

— **298.** — Discuter la réalité des racines de l'équation $3x^4+4ax^3+b=0$.

— **299.** — Déterminer λ de façon que l'équation $x^3-5x+\lambda=0$ ait deux racines x_1, x_2 vérifiant la relation

$$x_1+x_2=2x_1x_2.$$

— **300.** — On considère l'équation $2x^3-11x^2-3x+36=0$. Démontrer qu'entre deux racines α, β de cette équation il existe la relation $2\alpha+\beta=10$. Résoudre l'équation.

— **301.** — Déterminer les régions du plan où doit être situé le point M (a, b) pour que l'équation $\cos^3 x-3ab\cos x+a^3+b^3=0$ ait trois racines comprises entre 0 et π.

— **302.** — Déterminer λ de façon que l'équation $x^3 - x^2 + \lambda x + 1 = 0$ ait une racine double, puis résoudre l'équation.

— **303.** — Quelle relation doit-il exister entre les coefficients de l'équation complète du troisième degré pour qu'une racine soit égale à la somme des deux autres?

— **304.** — Discuter la réalité des racines de l'équation $\frac{\alpha}{(x-a)^2} + \frac{\beta}{(x-b)^2} - 1 = 0$, suivant la position du point (α, β) dans le plan.

— **305.** — Décomposer $(x^2 - 3x)^2 + 4(x^2 + x - 2)^2$ en un produit de deux trinomes du second degré à coefficients réels.

— **306.** — Déterminer a de façon que l'équation $x^4 - x^3 + ax^2 - x - 6 = 0$ ait deux racines dont la somme soit égale à 1.

— **307.** — Déterminer un polynome $f(x)$ connaissant le reste de la division de $f(x)$ par $f(x^2)$.

— **308.** — On considère la fonction $y = \frac{e^{z^2} + e^{\theta^2 z^2} + e^{\theta^4 z^2} + \ldots + e^{\theta^{2(n-1)} z^2}}{n}$, où θ est l'une des racines de l'équation $x^n - 1 = 0$. Développer y suivant les puissances ascendantes de z.

— **309.** — **Calculer les intégrales**

$$\int \frac{dx}{1+x^3}, \quad \int \frac{dx}{(1+x^3)^2}, \quad \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}, \quad \int \frac{dx}{x^2+3x+2}, \quad \int \frac{x^3dx}{x^4+1}, \quad \int \frac{x^2dx}{x^4+1}, \quad \int \frac{x\,dx}{x^3+1},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^3}, \quad \int \frac{x+1}{x^3+1}dx; \quad \int \frac{x\,dx}{x+\sqrt{x^2-a^2}}, \quad \int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\text{poser } x = \frac{1}{u}\right), \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int_0^{a} x^4\sqrt{2x-x^2}dx, \quad \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}, \quad \int x^5\sqrt{1-x^2}\,dx, \quad \int \frac{\sqrt{x^2-2x+2}}{x+1}dx, \quad \int \frac{dx}{x+\sqrt{1+x-x^2}},$$

$$\int \frac{dx}{x(1+x^2-\sqrt{x^4+1})}, \quad \int \frac{(1+x)dx}{\sqrt{1-x-x^2}}; \quad \int_0^{\pi} \frac{dx}{5+3\cos x}, \quad \int \frac{dx}{a+b\cos x}, \quad \int \frac{dx}{1+\cos^2 x},$$

$$\int \frac{dx}{\sin x+\sin 3x}, \quad \int \frac{dx}{\cos x\cos 3x}, \quad \int \sin^2 x\cos^4 x\,dx; \quad \int \frac{\text{arc}\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad \int \frac{dx}{\cos x\sqrt{\cos^2 x-2\sin^2 x}},$$

$$\int \frac{x^2\,\text{arc tg}\,x}{1+x^2}dx, \quad \int \frac{dx}{\cos x\sqrt{5\cos^2 x+1}}, \quad \int \frac{x\,\text{l}x\,dx}{(x^2+1)^2}, \quad \int \sin x\sqrt{2-\text{tg}^2 x}\,dx, \quad \int_0^{+\infty} \left(x\,\text{arc}\sin\frac{a}{x}-a\right)dx,$$

$$\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\sqrt{2-\sin^2 x}}, \quad \int \sqrt{e^{2x}+e^x+1}\,dx, \quad \int \frac{\sin^3 x\,dx}{\sqrt{\cos^2 x-3\cos x-2}}, \quad \int \text{ch}\,x\cos^4 x\,dx, \quad \int \text{ch}^2 x\cos^3 x\,dx,$$

$$\int \frac{dx}{(1+2x^3)^{\frac{4}{3}}}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\text{ch}\,x}, \quad \int \sqrt{a^2-(x-1)^2}\,dx, \quad \int \frac{dx}{\sin x\sqrt{\sin^2 x+2\cos^2 x}}, \quad \int xe^x\sin x\,dx.$$

— **310.** — **Établir des formules de récurrence pour calculer les intégrales**

$$\int \frac{\sin^{2n}x}{\cos^{2n+1}x}dx, \quad \int \frac{\sin^{2n+1}x}{\cos^{2n+1}x}dx, \quad \int \frac{x^{2n+1}}{(1+x^2)^{n+1}}dx.$$

— **311.** — Calculer l'intégrale $\int x^2y^2p\,ds$, x, y étant les coordonnées d'un point de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, p la distance du centre à la tangente au point (x, y), s l'arc de l'ellipse.

— **312.** — Calculer l'aire de la courbe $\rho = a\cos 2\omega$ qui est extérieure au cercle $\rho = \frac{a}{2}$.

— **313.** — Calculer le volume commun à une sphère et à un cylindre de révolution passant par le centre et tangent à la sphère.

— **314.** — Volume engendré par l'aire de la courbe $y = 2a(1+\cos\omega)$ tournant autour de Ox.

— **315.** — Volume engendré par l'aire de la courbe $(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2) = 0$ tournant autour de Oy.

— **316.** — Volume du solide commun aux deux cylindres $x^2+y^2-2ax=0$, $ay=z^2$.

— **317.** — Volume du solide commun à deux cylindres qui ont pour sections droites deux paraboles focales.

— **318.** — Calculer les moments d'inertie : d'un triangle équilatéral par rapport à son centre, d'un triangle quelconque par rapport à un côté, d'un triangle par rapport à un axe passant par le centre de gravité et parallèle à un côté, d'une cardioïde par rapport à l'axe polaire.

(*A suivre.*)

SUJETS DE CONCOURS

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE

Concours de 1917.

Groupe I.

Mathématiques. (*Première composition.*)

2477. — On considère la courbe (C) définie en coordonnées rectangulaires par les équations

$$x = a\cos 2t, \qquad y = a\sin 2t, \qquad z = 2a\cos t$$

où a désigne une longueur donnée et t un paramètre variable.

1° Former l'équation générale des surfaces de second ordre (S) qui contiennent la courbe (C). Partager l'espace en régions telles que les surfaces (S) qui passent par les différents points d'une même région soient toutes de même genre (ellipsoïdes, hyperboloïdes à une nappe, hyperboloïdes à deux nappes, etc.). A quoi se réduisent ces régions si l'on se limite soit au plan xOy, soit au plan xOz?

2° La droite (sécante double) joignant deux points P_1, P_2 de la courbe (C) coupe le plan xOy en un point M; il passe par ce point M une autre sécante double P_3P_4. Montrer qu'il existe dans le plan xOy un point M′ différent de M par lequel il passe deux sécantes doubles ayant avec la courbe (C) les quatre mêmes points d'intersection P_1, P_2, P_3, P_4. Trouver les formules permettant de passer des coordonnées (x, y) du point M aux coordonnées (x', y') du point M′.

Ces formules font correspondre à un point quelconque M du plan xOy un autre point M′ bien déterminé. Construire géométriquement :

a) Le point M′, connaissant le point M;

b) Les points M et M′, connaissant la droite indéfinie MM′.

Montrer que si les points M et M′ sont définis, comme il est dit plus haut, en partant de deux points réels P_1, P_2 de la courbe (C), les points M et M′ sont tous les deux dans la région des surfaces (S) réglées.

Réciproquement, si les points M et M′ sont tous les deux dans la région des surfaces (S) réglées, il existe sur la courbe (C) deux points réels P_1, P_2 tels que M soit la trace de la sécante double P_1P_2 sur le plan xOy. Délimiter la partie du plan xOy dans laquelle doit être le point M pour qu'il en soit ainsi.

3° Résoudre les questions du numéro 2° précédent en remplaçant le plan xOy par le plan xOz. Étudier en outre comment doit être choisie la droite indéfinie MM′ du plan xOz :

a) Pour que les points M et M′ soient réels;

b) Pour que les points P_1, P_2, P_3, P_4 soient réels.

4° Former l'équation qui donne les valeurs de t correspondant aux pieds des normales à la courbe (C) menées par un point donné M de l'espace. Lieu du point M tel que cette équation admette une racine double.

Ce lieu est une surface. Construire sa section (Γ) par un plan donné $z = h$ parallèle au plan xOy. Montrer que cette courbe (Γ) jouit de la propriété d'être semblable à l'enveloppe de ses normales. Longueur totale de cette courbe (Γ).

(*Deuxième composition.*)

Étant donnés trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, une courbe Γ est donnée en coordonnées semi-polaires par les équations

$$r = \frac{l}{\cos\frac{\theta}{2}}, \qquad z = \frac{l\sqrt{3}}{\cos\frac{\theta}{2}},$$

où l est une constante positive; r et θ sont les coordonnées polaires de la projection m d'un point M de Γ sur le plan xOy, Ox étant l'axe polaire et O le pôle.

1° La courbe Γ est supposée parfaitement polie, l'axe Oz est vertical et dirigé vers le haut. Un point P, assujetti à rester sur Γ, est pesant et soumis en outre à une répulsion exercée par Oz perpendiculaire à cet

axe. L'intensité de cette répulsion est proportionnelle à la distance; elle devient égale au poids lorsque la distance est égale à l. Trouver les positions d'équilibre de P.

2° Déterminer θ en fonction du temps t, de façon que le mouvement correspondant du point M sur la courbe Γ soit uniforme, θ et $\frac{d\theta}{dt}$ ayant respectivement à l'instant initial $t = 0$ les valeurs 0 et $2l\alpha$, où α est une constante positive donnée. Pour ce même mouvement, exprimer l'aire A balayée par le rayon vecteur Om pendant l'intervalle de temps 0, t, et déterminer aussi la direction du vecteur MJ, accélération de M.

3° Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi/2} z \frac{ds}{d\theta} d\theta,$$

où z désigne la cote du point M, s la longueur de l'arc M_0M de Γ, M_0 et M correspondant aux valeurs 0 et θ de l'angle polaire.

4° Le point N, de coordonnées rectangulaires

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = r\sqrt{3},$$

décrit une surface S lorsque r et θ varient d'une façon quelconque. Écrire l'équation de cette surface. Si r est fonction de θ, N décrit une courbe C tracée sur S. Déterminer cette fonction de façon que le plan osculateur à C au point N soit normal à S au même point. Pour cela, après avoir formé l'équation différentielle à laquelle doit satisfaire r, on la ramènera à une équation linéaire par le changement d'inconnue $r = \frac{1}{\rho}$.

Comparer les courbes trouvées et la courbe Γ.

Épreuve pratique.

Ombres d'une sphère évidée par un cône. — On donne quatre points par leurs coordonnées exprimées en millimètres, et par rapport aux axes dirigés comme l'indique le croquis ci-contre :

	x	y	z
A	0	100	72
B	0	100	0
C	— 36	136	72
D	72	172	144.

La *sphère* a pour centre A et passe par B.

Le *cône* a pour sommet B et pour base le cercle horizontal de centre C qui passe par A.

Les *rayons lumineux* sont parallèles au vecteur DB.

1° Construire l'intersection du cône et de la sphère, et représenter le *volume* de la sphère extérieur au cône.

2° Déterminer toutes les ombres produites sur ce corps.

Nota. — Entourer l'épure d'un cadre de 280 × 440.

Dessiner les lignes d'ombre en noir fin, les lignes de construction en rouge fin continu, et mettre des hachures bleues ou grises sur les ombres visibles.

Physique.

I. — Goniomètre. Formation des images. Réglage. Mesure des indices de réfraction d'un prisme de verre, pour des radiations monochromatiques déterminées, par la méthode du minimum de déviation.

Chercher s'il y a avantage, au point de vue de la précision, à adopter la méthode suivante :

Le prisme a pour base un triangle très sensiblement équilatéral. On est assuré que ses angles ne diffèrent de 60° que de quantités inférieures à une minute. Les trois faces du prisme sont planes au même degré de perfection et les trois arêtes sont parallèles. On fait la mesure du minimum de déviation pour chacun des trois dièdres du prisme et l'on écrit que la moyenne des trois déviations minima mesurées correspond à un angle réfringent de 60°.

II. — Un pendule, formé d'une petite sphère très dense suspendue à un fil inextensible, est assimilable à un pendule simple de 981^{cm} de longueur. Il oscille dans un plan vertical, en un lieu où l'accélération due à la pesanteur est 981 C. G. S. On ne se préoccupera ni de l'amortissement des oscillations, ni des effets de la rotation de la Terre. On désignera par α l'élongation à l'époque t, c'est-à-dire l'angle que fait alors le fil avec la verticale. L'angle α sera regardé comme positif quand la sphère sera à droite de sa position d'équilibre.

Le maximum de α, pour les oscillations considérées, est $\frac{1}{100}$ de radian. On prend pour origine des temps l'une des époques où le fil est vertical, la sphère allant vers la droite. Calculer l'époque θ du premier passage par l'élongation $\frac{1}{200}$ de radian.

A l'époque x, la sphère rencontre un système mobile et éprouve un choc de durée extrêmement courte; ce choc ne modifie ni la direction ni le sens du vecteur qui représente la vitesse linéaire de la sphère, mais il en multiplie la grandeur par un nombre λ compris entre 0 et 2.

Calculer, en fonction de x et de λ, la nouvelle valeur de l'élongation maximum, l'époque du passage par le plus proche maximum d'élongation et l'époque du passage suivant par la verticale. Discuter.

Première application numérique : $x = 0$; $\lambda = \frac{3}{2}$.

Deuxième application numérique : $x = \theta$; $\lambda = \frac{1}{2}$.

Nota. — A la suite de ce problème le candidat traitera, en peu de lignes et sans donner aucune description de mécanismes, de l'application du pendule aux horloges.

Groupe II.

Mathématiques.

I. — 1° On considère l'équation

$$e^{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}} = 1 - \alpha,$$

où α est un nombre donné positif et inférieur à l'unité. Exprimer l'inconnue x en fonction de α. Comment utiliserait-on la formule trouvée si l'on n'avait pas de table de logarithmes?

2° La racine trouvée x est infiniment petite en même temps que α; on prend α pour infiniment petit principal. Calculer la partie principale η de x et celle de la différence $x - \eta$.

II. — Un point M de masse m se meut sur une droite Ox parfaitement polie et horizontale. Il est attiré par l'origine O proportionnellement à la distance, l'intensité de l'attraction est $m\omega^2$ pour l'unité de distance. Il est soumis en outre à une résistance proportionnelle à la vitesse et opposée à cette vitesse; l'intensité de l'attraction est $2m\varepsilon$ pour la vitesse unité. On suppose, dans ce qui suit, $\varepsilon < \omega$.

1° Écrire l'équation différentielle du mouvement de M. Soit $\varphi(t)$ une solution quelconque de cette équation, t désignant le temps. Montrer que la dérivée logarithmique $\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}$ est une fonction périodique de t, calculer la période T et le rapport $u = \frac{\varphi(t+2T)}{\varphi(t)}$.

2° Le mobile M abandonné sans vitesse, à l'instant initial $t = 0$, en un point M_0 d'abscisse x_0, atteint au bout d'un temps $2nT$, n étant un nombre entier, une position M_n d'abscisse x_n. Déterminer le travail E_a de l'attraction pendant cet intervalle de temps; en déduire le travail E_r de la résistance. Indiquer, sans effectuer les calculs, par quelles méthodes on calculerait l'intégrale donnant E_r en partant de l'expression de l'abscisse x du mobile en fonction du temps t.

3° La masse du point M est $1^g,7$; l'attraction à 1^{cm} de distance est la fraction 0,027 du poids du mobile; n est égal à 10; x_0 et x_{10} sont égaux à 1^{cm} et $0^{cm},9$. L'accélération de la pesanteur est 980, en unités C. G. S.

Calculer, en unités C. G. S., ω, E_a et ε.

Physique.

I. — Un objet lumineux S, extrêmement éloigné, émet trois radiations monochromatiques : la radiation rouge C, la radiation jaune D_3, la radiation vert-bleu F. Cet objet est de forme irrégulière, mais il est tout entier compris dans une sphère Σ de centre O. Le diamètre apparent de la sphère Σ est $\frac{1}{2\,000}$ de radian.

On dirige vers S une lunette astronomique dont l'objectif Ω a une distance focale égale à 10^m pour toutes les radiations visibles. Soient A l'axe optique, Φ le plan focal, r le foyer principal de l'objectif Ω. Un réticule est placé au point r; on amène en ce point l'image du point O (on entend par *image* celle qui est fournie par Ω).

On place ensuite, en avant de l'objectif Ω, un grand prisme de verre P, dont la section principale contient l'axe A. L'angle de ce prisme est $\frac{2}{10}$ de radian. Les normales à ses faces sont inclinées sur A d'angles infé-

rieurs à $\frac{2}{10}$ de radian. On traitera l'angle du prisme et les angles d'incidence et de réfraction comme des angles faibles.

Les indices de réfraction du prisme P pour les trois radiations C, D_3, F sont respectivement :

1,520; 1,524; 1,530.

De combien faut-il faire tourner l'ensemble de la lunette et du prisme pour amener en r l'image jaune de O? Où sont placées les trois images de S? Quelles sont leurs formes et leurs dimensions? La position du prisme est-elle indifférente au point de vue de la netteté des images? Pourrait-on placer le prisme après l'objectif?

Dans le plan focal Φ on place la fente d'un grand spectroscope; cette fente est perpendiculaire à l'arête du prisme P; elle est large; elle est suffisamment longue pour qu'une partie de l'image rouge et une partie de l'image jaune de S viennent l'éclairer. Décrire l'aspect observé dans la lunette du spectroscope. Examiner le cas où le plan focal Φ serait éclairé, non seulement par les radiations C, D_3, F provenant de l'objet S, mais encore par une faible lumière solaire diffuse.

II. — Dans un fil métallique homogène AB, de résistance r, circule, dans le sens AB, un courant continu d'intensité i; la différence de potentiel entre les points A et B (potentiel de A *moins* potentiel de B) est V. Le fil se déplace dans un champ magnétique. Les forces résultant de l'action de ce champ sur le fil parcouru par le courant i exécutent par seconde le travail (positif ou négatif) W. La quantité de chaleur dégagée par seconde dans le fil, par effet Joule, est Q.

Écrire les relations qui existent entre ces diverses grandeurs. Indiquer les unités.

Le candidat choisira lui-même deux exemples ($W > 0$ et $W < 0$) avec applications numériques.

Chimie.

Chlorure de sodium. — Carbonates de sodium. — Soude caustique. — Sodium.

Action de la soude caustique sur les principaux métalloïdes.

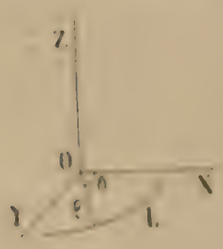
DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

Concours de 1914.

Mathématiques.

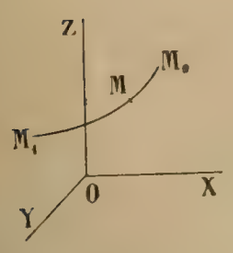
2281. — *On donne un cylindre dont les génératrices sont parallèles à OZ et ayant pour section droite, dans le plan XOY, une spirale logarithmique L, c'est-à-dire une courbe dont l'équation en coordonnées polaires est de la forme $\rho = ae^{\lambda}$, a étant une constante, ρ et θ les coordonnées polaires d'un point de la courbe (voir la figure 1).*



1° Trouver la courbe C, intersection de ce cylindre et d'un cône de révolution d'angle au sommet 2α ayant son sommet en O et son axe parallèle aux génératrices du cylindre. Construire la projection de cette courbe C sur le plan ZOX.

2° Démontrer que le développement de la courbe C sur le plan tangent au cône est une spirale logarithmique.

3° Démontrer que la section par le plan horizontal XOY de la surface engendrée par les tangentes à la courbe C est une spirale logarithmique. Déterminer la section de la même surface par le plan ZOX.



4° *A chaque point* M *de la courbe* C *on fait correspondre un point* M′ *qui est la trace sur le plan* XOY *de la tangente en* M *à la courbe* C; *en supposant que le mobile* M *parte d'un point* M_0 *correspondant à* $\theta = 0$ *pour parcourir la courbe* C *avec une vitesse uniforme* v, *déterminer la vitesse* v' *du point* M′ *à un instant* t, *ainsi que le rapport des chemins* s *et* s' *parcourus respectivement au même instant* t *par les mobiles* M *et* M′.

5° *On considère l'arc* M_0M_1 *de la courbe* C *décrit par le point* M (*voir figure* 2) *quand* θ *varie de* 0 *à* π; *quand le point* M *se déplace sur cette courbe de* M_0 *à* M_1, *une circonférence ayant pour centre* M *et tangente à* OZ *décrit une surface* A; *on demande de calculer le volume* V *compris entre cette surface et le plan* ZOX.

Remarques. — 1° *Le problème sera traité analytiquement, mais il sera tenu compte des démonstrations géométriques fournies par les candidats.*

2° *Pour obtenir la différentielle* dV *du volume* V *qu'on demande de calculer dans la dernière partie du problème, on décomposera ce volume* V *en cylindres tronqués par des plans infiniment rapprochés passant par l'axe des* Z *et faisant entre eux un angle* $d\theta$.

3° *Il est en outre rappelé que la fonction primitive de* e^x *est* e^x.

1. Le plan xy est un plan de symétrie commun au cône et au cylindre; par suite, la courbe C se compose de deux branches symétriques par rapport au même plan, et il suffira d'étudier celle qui est tracée sur la nappe supérieure du cône. Soit M (x, y, z) un de ses points; posons $OM = R$, nous avons $R \sin\alpha = \rho = ae^\theta$, et

$$(1) \qquad x = ae^\theta \cos\theta, \qquad y = ae^\theta \sin\theta, \qquad z = \frac{ae^\theta}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Ce sont les équations paramétriques de la courbe C.

D'après la nature même de sa projection horizontale, la courbe C est une spirale tracée sur le cône, et le sommet du cône est un point asymptotique, c'est-à-dire un point dont la distance au point M, $R = \frac{ae^\theta}{\sin\alpha}$, tend vers zéro quand θ tend vers $-\infty$.

Si l'on désigne par x_1, y_1, z_1 les valeurs que prennent x, y, z quand dans les équations (1) on change θ en $\theta + 2\pi$, c'est-à-dire si l'on passe sur une même génératrice du cône d'un point de C au point immédiatement au-dessus, on a

$$\frac{x_1}{x} = \frac{y_1}{y} = \frac{z_1}{z} = e^{2\pi}.$$

Les spires successives de la courbe C sont donc deux à deux homothétiques par rapport au point O et le rapport d'homothétie de deux spires consécutives est invariablement 2π.

Cette propriété se conserve en projection parallèle; par suite, pour étudier la projection de la courbe C sur le plan zOx, il suffit, dans les équations paramétriques de cette projection

$$x = ae^\theta \cos\theta, \qquad z = \frac{ae^\theta}{\operatorname{tg}\alpha},$$

de faire varier θ dans un intervalle d'étendue égale à 2π et de construire les homothétiques de la branche de courbe obtenue par rapport au point O, les rapports d'homothétie étant $e^{2\pi}, e^{4\pi}, \ldots, e^{2n\pi}, \ldots, e^{-2\pi}, e^{-4\pi}, \ldots, e^{-2n\pi} \ldots$.

Nous avons

$$\frac{dx}{d\theta} = ae^\theta(\cos\theta - \sin\theta), \qquad \frac{dz}{d\theta} = \frac{ae^\theta}{\operatorname{tg}\alpha}, \qquad m = \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha(\cos\theta - \sin\theta)};$$

m est la pente de la tangente.

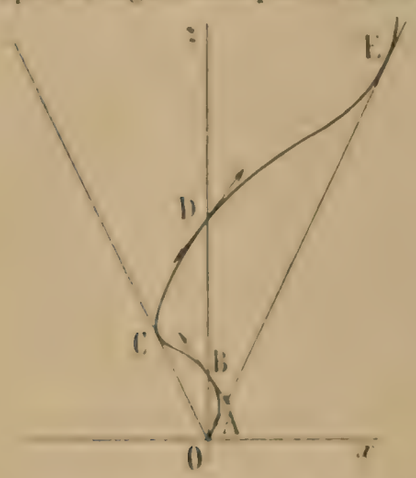
Faisons varier θ de 0 à 2π, nous avons les variations suivantes

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
x	a	↗	$\frac{ae^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	↘	0	↘	$-ae^{\pi}$	↘	$\frac{-ae^{\frac{5\pi}{4}}}{\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha}$	↗	0	↗	$ae^{2\pi}$
z	$\frac{a}{\mathrm{tg}\,\alpha}$				↗				↗		↗		$\frac{ae^{2\pi}}{\mathrm{tg}\,\alpha}$
m	$\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$		∞		$-\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$		$-\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$		∞		$\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$		$\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$

Aux points extrêmes A et E ($\theta = 0$ et 2π) la courbe est tangente à la génératrice du cône $z = \frac{x}{\mathrm{tg}\,\alpha}$, et au point C($\theta = \pi$), elle est tangente à l'autre génératrice $z = -\frac{x}{\mathrm{tg}\,\alpha}$. Au point B$\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$, la tangente est parallèle à OC, et au point D$\left(\theta = \frac{3\pi}{2}\right)$ à OE.

Comme $\frac{dm}{d\theta} = \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\mathrm{tg}\,\alpha(\cos\theta - \sin\theta)^2}$ s'annule pour $\theta = \frac{3\pi}{4}$ et $\theta = \frac{7\pi}{4}$, la courbe présente deux points d'inflexion, l'un entre B et C l'autre entre D et E.

2. Pour démontrer que le développement de la courbe C sur un plan tangent au cône est une spirale logarithmique, il suffira d'établir que la courbe C coupe sous un angle constant les génératrices du cône, car cette propriété se conserve dans le développement, et c'est une propriété caractéristique de la spirale logarithmique.



Les paramètres directeurs de la tangente MT sont

$$\frac{dx}{d\theta} = ae^{\theta}(\cos\theta - \sin\theta), \qquad \frac{dy}{d\theta} = ae^{\theta}(\cos\theta + \sin\theta), \qquad \frac{dz}{d\theta} = \frac{ae^{\theta}}{\mathrm{tg}\,\alpha};$$

ceux de la droite OM sont x, y, z; par suite, le cosinus de l'angle de ces deux droites est

$$\cos V = \pm \frac{x\frac{dx}{d\theta} + y\frac{dy}{d\theta} + z\frac{dz}{d\theta}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2}}.$$

Or, nous avons $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 = \frac{a^2e^{2\theta}}{\sin^2\alpha}$; nous en tirons

$$x\frac{dx}{d\theta} + y\frac{dy}{d\theta} + z\frac{dz}{d\theta} = \frac{a^2e^{2\theta}}{\sin^2\alpha},$$

puis

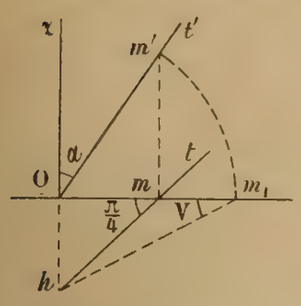
$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = a^2e^{2\theta}\left[(\cos\theta - \sin\theta)^2 + (\cos\theta + \sin\theta)^2 + \frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha}\right] = \frac{a^2e^{2\theta}(1 + \sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha}.$$

On en déduit

$$\cos V = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \sin^2\alpha}},$$

et ceci montre que l'angle V est constant.

On peut établir cette propriété géométriquement. Soit M un point quelconque de la courbe C; prenons comme plan horizontal de projection le plan des xy, et comme plan vertical le plan zOM, et soient m, m' les projections du point M.



La tangente en M à la courbe C se projette verticalement sur Om' puisqu'elle est dans le plan tangent au cône suivant la génératrice OM et que ce plan tangent est le plan de bout Om'. D'autre part, elle se projette horizontalement suivant la tangente en m à la spirale logarithmique, et cette tangente fait l'angle constant $\frac{\pi}{4}$ avec le rayon vecteur Om.

Pour construire l'angle OMT, nous rabattons le plan tangent au cône sur le plan horizontal autour de sa trace horizontale Oh, et nous obtenons l'angle cherché $V = Om_1h$.

Nous avons
$$\cos V = \frac{Om_1}{hm_1} = \frac{Om_1}{\sqrt{Oh^2 + Om_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{Oh}{Om_1}\right)^2 + 1}}.$$

Or
$$\frac{Oh}{Om_1} = \frac{Oh}{Om'} = \frac{Oh \sin\alpha}{Om} = \sin\alpha, \qquad \text{et} \qquad \cos V = \frac{1}{\sqrt{\sin^2\alpha + 1}}.$$

3. La tangente au point M de la courbe C a pour équations

$$\frac{x - ae^\theta \cos\theta}{ae^\theta(\cos\theta - \sin\theta)} = \frac{y - ae^\theta \sin\theta}{ae^\theta(\cos\theta + \sin\theta)} = \frac{z - \frac{ae^\theta}{\operatorname{tg}\alpha}}{\frac{ae^\theta}{\operatorname{tg}\alpha}},$$

ou

$$\frac{x - ae^\theta \cos\theta}{\cos\theta - \sin\theta} = \frac{y - ae^\theta \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} = \frac{z \operatorname{tg}\alpha - ae^\theta}{1}.$$

Cette tangente rencontre le plan des xy au point M′ qui a pour coordonnées

$$x = ae^\theta \sin\theta, \qquad y = -ae^\theta \cos\theta,$$

ou

$$x = ae^\theta \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right), \qquad y = ae^\theta \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right).$$

Les coordonnées polaires ρ_1, ω de ce point sont ainsi mises en évidence; ce sont

$$\rho_1 = ae^\theta, \qquad \omega = \theta - \frac{\pi}{2};$$

éliminons θ, nous obtenons l'équation polaire de la courbe,

$$\rho_1 = ae^{\omega + \frac{\pi}{2}},$$

c'est bien une spirale logarithmique, qu'on peut obtenir en faisant tourner la spirale donnée d'un angle droit dans le sens négatif autour de l'origine.

La trace de la tangente sur le plan des zx a pour coordonnées

$$x = \frac{ae^\theta}{\cos\theta + \sin\theta}, \qquad z = \frac{ae^\theta \cos\theta}{\operatorname{tg}\alpha(\cos\theta + \sin\theta)};$$

ces équations sont les équations paramétriques de la trace sur le plan zOx de la surface engendrée les tangentes à la courbe C.

Pour construire cette courbe il suffit de faire varier θ de 0 à 2π, et d'achever par des homothéties, comme il a été dit plus haut.

4. Nous avons donné précédemment les coordonnées polaires du point M′ $\rho_1 = \rho$, $\omega = \theta - \frac{\pi}{2}$.

Les différentielles des arcs s et s' seront par suite

$$ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2}, \qquad ds' = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2}.$$

Le rapport des vitesses des mobiles M et M′ sera donc

$$\frac{v}{v'} = \frac{ds}{ds'} = \sqrt{1 + \frac{dz^2}{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{2\,\mathrm{tg}^2\alpha}} = k.$$

Ceci montre que v' est aussi constant et que les deux mouvements sont uniformes.

On en déduit $s = ks'$, puisque les arcs s et s' s'annulent en même temps, et on peut écrire

$$\frac{v}{v'} = \frac{s}{s'} = \sqrt{1 + \frac{1}{2\,\mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1 + \sin^2\alpha}}{\sin\alpha \cdot \sqrt{2}}.$$

5. Conformément aux indications de l'énoncé, nous prenons, comme volume élémentaire dV, le volume constitué par un tronc cunéiforme d'un cylindre dont la base est le cercle de centre M tangent à Oz et dont les génératrices sont parallèles à la tangente MT à la courbe C. Ce tronc est compris entre le plan MOz et le plan infiniment voisin passant par Oz. Ces deux plans interceptent sur la courbe C l'arc infiniment petit ds. Le volume d'un tronc de prisme ou de cylindre est équivalent au volume d'un prisme ou cylindre de même section droite, de même direction de génératrice et limité par des plans parallèles menés par les centres de gravité des deux bases du tronc.

En prenant pour base le cercle de rayon ρ, la hauteur du cylindre élémentaire équivalent à dV est l'arc intercepté par les plans limites sur la spirale donnée L, divisé par $\sqrt{2}$, donc

$$dV = \frac{\pi\rho^2}{\sqrt{2}}\, ds_1$$

ds_1 étant l'élément d'arc de la spirale $\rho = ae^{\theta}$.

On a

$$ds_1^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 = 2a^2e^{2\theta}d\theta^2, \qquad ds_1 = a\sqrt{2}e^{\theta}d\theta$$

et

$$dV = \pi\rho^2 d\rho.$$

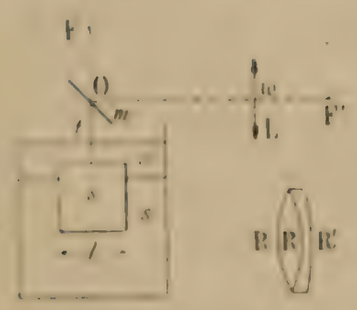
On en déduit

$$V = \pi(\rho_1^3 - \rho_0^3) = \frac{\pi a^3(e^{3\theta} - 1)}{3}.$$

Ce volume est indépendant de α.

P. MAURICE, ingénieur civil, professeur de mathématiques, à Lyon.

2284. — *On considère un cube d'arête l et de masse spécifique s qui flotte à la surface de séparation de deux liquides non miscibles de masses spécifiques s' et s''. Une des arêtes est verticale.*



Pour mesurer la masse spécifique s, supposant connues s' et s'', on imagine le dispositif suivant : le cube porte, par l'intermédiaire d'une tige verticale t, un miroir plan m incliné à 45°. La tige et le miroir sont de poids négligeables.

Le miroir renvoie sur une lentille convergente L les rayons issus d'un point lumineux fixe F, placé sur la verticale de t.

Lorsque s prend la valeur initiale s_0, l'axe optique de la lentille L, qui est horizontal, passe par le centre O du miroir. On observe l'image F′ de F et l'on demande :

1° *Le lieu de cette image lorsque s varie ;*

2° *La relation qui existe entre s et la distance de F′ à sa position initiale ;*

3° *D'étudier la sensibilité de l'appareil.*

Application numérique : $s_0 = 1$, $s = 1{,}1$, $s'' = 0{,}94$, $l = 9{,}8$, *système* C. G. S.

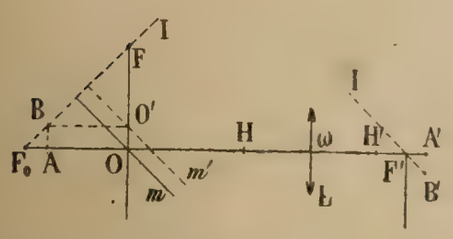
La lentille L est constituée par l'accolement de deux lentilles minces :

1° *Une lentille biconvexe dont l'indice est 1,5 et dont les faces ont chacune pour rayon de courbure* $R = 100^{cm}$;

2° *Une entille concavo-convexe dont l'indice est* 1,75 *et dont la face extérieure a pour rayon* $R' = 300^{cm}$.

Lorsque s *prend la valeur* s_0, *la somme des distances* $O\omega + OF$ *est égale à trois fois la distance focale de* F.

1° Supposons que, par suite d'une diminution de s, le point O s'élève de x. Le miroir passe de la position m à la position m' qui en est distante de $\frac{x}{\sqrt{2}}$. L'image de F dans le miroir, qui était primitivement en F_0, se déplace sur la droite F_0F d'une quantité $F_0B = 2\frac{x}{\sqrt{2}} = x\sqrt{2}$. Ce déplacement peut être décomposé en deux autres rectangulaires, F_0A et AB, tous deux égaux à x. L'image F′ subit de même un déplacement F′B′ que nous décomposerons de même suivant F′A′ et A′B′, désignés respectivement par x' et z'.



Rapportons les positions des plans conjugués dans la lentille L à ses foyers H et H′. Soient q_0 et q' les valeurs absolues des segments HF_0 et H′F′. Nous aurons successivement, en appelant f la distance focale,

$$q_0 q' = f^2 \qquad \text{et} \qquad (q_0 - x)(q' + x') = f^2,$$

d'où, en éliminant q',

$$x' = \frac{f^2 x}{q_0(q_0 - x)}.$$

D'autre part, les segments A′B′ et AB sont respectivement proportionnels à $\omega A'$ et ωA :

$$\frac{z'}{x} = \frac{f + q' + x'}{f + q_0 - x},$$

d'où, en remplaçant q' et x' par leur valeur,

$$z' = \frac{f q_0 x}{q_0(q_0 - x)}.$$

On en déduit la relation simple

$$\frac{z'}{x'} = \frac{q_0}{f}.$$

Le lieu du point B′ est donc une droite. On aurait pu le prévoir : en effet, le point B se déplaçant sur la droite F_0F, le rayon qui se réfléchirait sur le miroir plan dans la direction F_0F resterait fixe. Supposons qu'il rencontre la lentille quelque part en I; le rayon réfracté IF′ sera le lieu du point B′. De plus, on aura

$$\frac{z'}{x'} = \frac{\omega I}{\omega F'} = \frac{\omega F_0}{\omega F'} = \frac{f + q_0}{f + q'} = \frac{f + q_0}{f + \frac{f^2}{q_0}} = \frac{q_0}{f}.$$

2° Le déplacement λ' de l'image est lié aux déplacements x' et z' par la relation

$$\lambda' = \sqrt{x'^2 + z'^2} = \frac{fx}{q_0(q_0 - x)}\sqrt{f^2 + q_0^2}.$$

D'autre part, si l' et l'' désignent respectivement les hauteurs des deux liquides en contact avec le cube dans la position initiale, les équilibres successifs du cube s'expriment par les équations

$$s_0 l = s' l' + s'' l'',$$
$$s l = s'(l' - kx) + s''(l'' + kx),$$

k désignant un coefficient dépendant de la section du vase qui contient les liquides, égal à 1 si cette section peut être regardée comme infinie. On en déduit

$$(s_0 - s) l = k(s' - s'')x, \qquad \text{d'où} \qquad x = \mu(s_0 - s) \qquad \text{si} \qquad \mu = \frac{l}{k(s' - s'')}.$$

Portons cette valeur dans l'expression de λ' :

$$\lambda' = \frac{f\mu(s_0 - s)}{q_0(q_0 - \mu(s_0 - s))}\sqrt{f^2 + q^2}.$$

3° La sensibilité sera définie par la dérivée de λ' par rapport à s. On trouve

$$\frac{d\lambda'}{ds} = -\frac{f\mu\sqrt{f^2 + q^2}}{(q_0 - \mu(s_0 - s))^2}.$$

Application numérique. — Calculons d'abord la distance focale de la lentille. La formule aux distances conjuguées, dans les dioptres, appliquée successivement aux trois surfaces réfringentes, pour un point lumineux situé à l'infini, donne

$$-\frac{1,5}{p_2} = \frac{1 - 1,5}{100} = \frac{0,5}{100},$$

$$\frac{1,5}{p_2} - \frac{1,75}{p_3} = \frac{1,5 - 1,75}{100} = -\frac{0,25}{100},$$

$$\frac{1,75}{p_3} - \frac{1}{f} = \frac{1,75 - 1}{300} = \frac{0,75}{300},$$

d'où, en additionnant,

$$-\frac{1}{f'} = \frac{1}{f} = \frac{0,5 - 0,25 + 0,25}{100} = \frac{1}{200}, \qquad f = 200.$$

D'autre part, la dernière donnée équivaut à $q_0 = 2f = 400$.

Ces valeurs, portées dans les expressions de x' et de z', donnent

$$z' = 2x'.$$

Pour calculer μ, supposons $k = 1$:

$$\mu = \frac{9,8}{0,16} = 61,25.$$

D'autre part,

$$\sqrt{f^2 + q_0^2} = 100\sqrt{4 + 16} = 100\sqrt{20}.$$

Portons ces valeurs dans l'expression de λ' :

$$\lambda' = \frac{200 \times 61,25(1 - s)}{400(400 - 61,25(1 - s))} \times 100\sqrt{20} = \frac{2\,450\sqrt{20}(1 - s)}{320 - 49(1 - s)}.$$

Enfin, pour la sensibilité, on trouve

$$\frac{d\lambda'}{ds} = -\frac{1\,225\,000\sqrt{20}}{(400 - 61,25(1 - s))^2}.$$

Calculons-la, en particulier, pour $s = 1$; le calcul donne

$$\frac{d\lambda'}{ds} = -34,2.$$

Par exemple, une variation de $\frac{1}{100}$ pour s produit un déplacement d'environ $\frac{1}{3}$ de centimètre pour l'image.

2285. — *On fait passer un courant prolongé de chlore dans une solution étendue et froide de potasse. On obtient ainsi une liqueur* A.

D'autre part on prend 10^{cm^3} *d'une solution d'anhydride arsénieux dans l'acide chlorhydrique étendu faite à raison de* $1^g,98$ *d'anhydride arsénieux par litre; on y ajoute une goutte d'indigo.*

On fait alors tomber goutte à goutte la liqueur A *dans la solution arsénieuse jusqu'à décoloration.*

A ce moment on a versé 4^{cm^3} *de liqueur.*

On demande le titre de la solution de potasse.

Données numériques : As = 75, K = 39.

Première réaction : $2KOH + Cl^2 = KCl + ClOK + H^2O$.

Le poids moléculaire de l'anhydride arsénieux As^2O^3 est égal à $150 + 48 = 198$. La dissolution employée contient donc $\frac{1}{100}$ de molécule par litre et $\frac{1}{10\,000}$ de molécule pour 10^{cm^3}.

La réaction de l'hypochlorite sur l'anhydride arsénieux peut se formuler

$$As^2O^3 + 2ClOK = As^2O^5 + 2KCl.$$

Donc, à $\frac{1}{10\,000}$ de molécule d'anhydride arsénieux correspondent $\frac{2}{10\,000}$ de molécule d'hypochlorite, qui proviennent eux-mêmes de $\frac{4}{10\,000}$ de molécule de potasse. C'est donc cette quantité de potasse qui se trouvait dans 4^{cm^3} de la dissolution, en admettant que le volume de cette dissolution n'ait pas varié sensiblement par suite de l'action du chlore.

Or $\frac{1}{10\,000}$ de molécule par centimètre cube représente encore $\frac{1}{10}$ de molécule par litre : c'est une liqueur *décinormale*.

2282. — *Les côtés d'un triangle isocèle, mesurés en mètres, ont pour longueurs a, a et b. L'angle au sommet est α grades, et le périmètre $2p = 20^m$.*

Une quantité A, *fonction de l'angle α, est déterminée par la formule*

$$A = 1 - \frac{bL\frac{a}{b} + r\frac{b}{a}}{r + a - b}, \qquad \textit{avec} \qquad r = 606{,}5 - 0{,}695b.$$

Calculer les valeurs de A *qui correspondent aux valeurs suivantes de α :* 10^G, 15^G, 20^G.

Le symbole L *représente des logarithmes népériens.*

On utilisera des tables de logarithmes à cinq décimales.

Nota. — *Le module des transformations de logarithmes népériens en logarithmes vulgaires est* $M = 0{,}43429$.

Nous calculerons la quantité $B = \frac{bL\frac{a}{b} + r\frac{b}{a}}{r + a - b}$, et nous en déduirons $A = 1 - B$. Les côtés a et b sont définis par les équations

$$b = 2a \sin\frac{\alpha}{2} \qquad \text{et} \qquad 2a + b = 20, \qquad \text{ou} \qquad a + \frac{b}{2} = 10.$$

On peut donc écrire

$$r = 606{,}5 - 0{,}695b = \left(a + \frac{b}{2}\right)60{,}65 - 0{,}695b = 60{,}65a + 29{,}63b.$$

Si nous remplaçons r par cette dernière valeur dans B, nous obtenons une fonction homogène et de degré zéro par rapport à a et b, et en posant $\frac{a}{b} = x$, B prend la forme

$$B = \frac{xLx + r}{xr'},$$

x, r, r' étant définis par les équations

$$x = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}, \qquad r = 60{,}65x + 29{,}63, \qquad r' = r + x - 1.$$

Nous calculerons séparément

$$B' = \frac{Lx}{r'} = \frac{\log x}{Mr'}, \qquad B'' = \frac{r}{xr'}, \qquad B = B' + B'',$$

$$\log B' = \log\log x - \log M - \log r', \qquad \log B'' = \log r - \log x - \log r'.$$

	$\alpha = 10$ grades.		$\alpha = 15$ grades.		$\alpha = 20$ grades.	
$-\log 2$	1,69897		1,69897		$\bar{1}$,69897	
$-\log \sin \frac{\alpha}{2}$	1,10536	$\Delta = 6$	0,92982	$\Delta = 10$	0,80567	$\Delta = 13$
$\log x$	0,80433		0,62879		0,50464	
	$\frac{28}{5}$	6 372 8	$\frac{70}{9}$	4 253 9	1 3	3 196 2
x	6,3728	$\Delta = 5$	4,2539	$\Delta = 7$	3,1962	$\Delta = 8$
	8 043 3	90 542 1,5	6 287 9	79 844 6,3	5 046 4	70 295 3,2
$\log \log x$	$\bar{1}$,90544		1,79850		1,70298	
$\log 60,65$	1,78283		1,78283		1,78283	
$\log x$	0,80433	$\Delta = 11$	0,62879		0,50464	$\Delta = 23$
$\log 60,65 x$	2,58716		2 41162		2,28747	
	5 1	3 865 1			$\frac{35}{12}$	1 938 5
$60,65 x$	386,51		258,00		193,85	
	29,63		29,63		29,63	
r	416,14		287,63		223,48	
$x - 1$	5,37		3,25		2,20	
r'	421,51	$\Delta =$	290,88	$\Delta = 15$	225,68	$\Delta = 20$
	4 161 4	61 920 4	2 876 3	45 879 4,5	2 234 8	34 908 16
$\log r$	2,61924	$\Delta = 10$	2,45884	$\Delta = 15$	2,34924	$\Delta = 19$
	4 215 4	62 480 1	2 908 8	46 359 12	2 256 8	35 334 15,2
$\log r'$	2,62481		2,46371		2,35349	
$\log \log x$	1,90544		1,79850		$\bar{1}$,70298	
$-\log M$	0,36222		0,36222		0,36222	
$-\log r'$	3,37519	$\Delta = 10$	3,53629	$\Delta = 8$	3,64651	$\Delta = 8$
$\log B'$	3,64285		3,69701		3,71171	
	$\frac{76}{9}$	4 393 9	$\frac{697}{4}$	4 977 5	$\frac{64}{7}$	5 148 9
B'	0,0043939		0,0049775		0,0051489	
$\log r$	2,61924		2,45884		2,34924	
$-\log r$	$\bar{1}$,49567		1,37121		1,49536	
$-\log r'$	3,37519	$\Delta = 28$	3,53629	$\Delta = 18$	3,64651	$\Delta = 14$
$\log B'$	1,49010		1,36634		1,49111	
	$\frac{05}{5}$	1 549 2	$\frac{24}{10}$	2 324 6	08 3	3 098 2
B'	0,1549		0,2324		0,3098	
B	0,15931		0,23744		0,31497	
λ	0,84069		0,76256		0,68503	

P. MAURICE, professeur de mathématiques, à Lyon.

SUJETS DE CONCOURS

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

Concours de 1917.

Mathématiques.

I. — Une droite L, de longueur donnée, se déplace de façon que ses extrémités décrivent deux droites fixes D et Δ orthogonales entre elles et non situées dans un même plan.

Former l'équation de la surface engendrée par L.

Déterminer la courbe d'intersection de cette surface par un plan contenant la perpendiculaire commune aux droites D, Δ et également incliné sur ces deux droites.

II. — Construire la courbe plane définie par les équations

$$x = \varphi - \frac{1}{5}\varphi^5, \qquad y = \frac{1}{2}(1 + \varphi^2)^3,$$

où φ désigne un paramètre auxiliaire.

Imaginant ensuite que φ soit lié au temps t par la relation

$$t = \varphi + \frac{1}{3}\varphi^3,$$

calculer, en fonction de φ, la vitesse et l'accélération totale du point ayant pour coordonnées x et y, ainsi que la composante tangentielle et la composante centripète de l'accélération totale. Comparer ces deux composantes aux projections de l'accélération totale sur les axes. Utiliser enfin les valeurs de la vitesse et de l'accélération centripète pour calculer, en fonction de l'ordonnée y, le rayon de courbure de la trajectoire.

Calcul trigonométrique.

Étant données les fonctions

$$f(n, x) = e^{-2nx} - e^{nx}\cos x - \frac{1 + 3n^2}{2n} e^{nx} \sin x,$$

$$F(n, x) = -\frac{3}{4} f(n, x) + f(-n, x),$$

calculer les valeurs numériques que prennent $f(n, x)$, $f(-n, x)$ et $F(n, x)$ quand on y fait

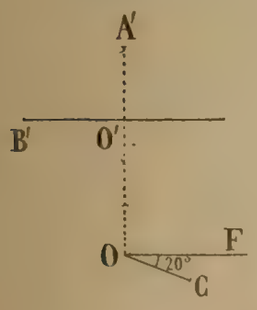
$$x = \pi + \frac{11}{32}\pi, \qquad n = 0{,}2140272.$$

Peut-on, au degré d'approximation des tables à cinq décimales, décider avec certitude du signe de $F(n, x)$ pour ces valeurs particulières de n et de x?

(On a $\log \pi = 0{,}49715$, $\log e = 0{,}43429$, $\log \log e = \bar{1}{,}63778$.)

Épure.

Intersection de deux surfaces de révolution. — *Données :*



Droite OO' menée par le centre de la feuille, parallèlement aux longs côtés.

$$OO' = 15^{cm}, \quad O'A' = 8^{cm}, \quad O'B' = 11^{cm}, \quad OC = 7^{cm},5.$$

La droite OC fait un angle de 20° avec la droite de front OF.

Surface S_1. — Ellipsoïde de révolution à axe vertical ayant son centre au point (O, O'). Les demi-axes de l'ellipse méridienne sont O'A' et O'B'.

Surface S_2. — Surface de révolution autour de la verticale du point C. La courbe méridienne située dans le plan vertical OC est une ellipse dont le centre coïncide avec celui de l'ellipsoïde et dont l'un des sommets a pour projections (O, A'). La longueur du demi-axe horizontal de cette ellipse est de 4^{cm}.

Construire un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point.

Représenter :

1° en projection horizontale le solide commun,

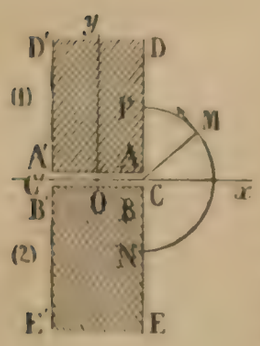
2° en projection verticale ce qui reste de l'ellipsoïde après suppression du solide commun, ainsi que de la partie de l'ellipsoïde située au-dessous du plan horizontal O'B'.

Titre et cadre inutiles.

Physique.

I. — Loi de Coulomb. Quantité d'électricité. Champ électrique. Lignes de force, flux de force. Théorème de Gauss. Théorème de Coulomb. Éléments correspondants.

II. — On considère deux prismes droits (1) et (2) limités par les plans



$$x = \pm a, \qquad z = \pm c, \qquad \left.\begin{matrix} y = \varepsilon \\ y = l \end{matrix}\right\} \text{ prisme (1)},$$

$$x = \pm a, \qquad z = \pm c, \qquad \left.\begin{matrix} y = \varepsilon \\ y = l \end{matrix}\right\} \text{ prisme (2)},$$

ε étant supposé infiniment petit, tandis que c et l sont infiniment grands.

Ces deux conducteurs sont portés respectivement aux potentiels V_1 et V_2. Par raison de symétrie les lignes de force sont des courbes situées dans les plans $z = C^{te}$. On admettra sans démonstration que ce sont des demi-circonférences telles que MNP ayant leurs centres sur la droite $x = a$, $y = 0$ (ou sur la droite $x = -a$, $y = 0$).

1° Démontrer que le champ électrique h conserve une valeur constante en tout point M d'une même ligne de force NMP, et qu'il varie en raison inverse de la distance CM.

2° Calculer la densité électrique en un point quelconque P de la face plane AD.

3° Calculer la charge électrique portée par l'aire rectangulaire située sur cette face AD et limitée par les plans $y = b$, $y = b'$, $z = 0$, $z = 1$.

Chimie.

Analyse eudiométrique d'un grisou. — Le gaz est recueilli sur place dans des bouteilles remplies d'eau de chaux et est apporté au laboratoire pour y être analysé par la méthode de l'eudiomètre de Regnault. On admettra que le gaz dégagé par le soufflard renferme seulement du méthane, de l'azote, de l'hydrogène et de l'acide carbonique.

On introduit un certain volume de gaz dans l'eudiomètre et on le détend de façon à lui faire occuper exactement la capacité fixe allant du sommet de l'eudiomètre au trait de repère. La pression de la masse gazeuse est de 185^{mm} de mercure.

On introduit alors l'oxygène nécessaire à la combustion et on ramène encore la masse gazeuse à occuper le même volume que précédemment et la pression est de 780^{mm}.

On provoque la combustion par une étincelle électrique; on ramène de nouveau la masse gazeuse au volume fixe et la pression est de $465^{mm},5$.

On absorbe enfin l'acide carbonique et on fait une dernière mesure de la pression de la masse gazeuse ramenée toujours au même volume. Cette pression est de $310^{mm},8$ de mercure.

Les expériences ont toutes été faites à la température de 17°, à laquelle la tension de la vapeur d'eau est de 15^{mm}. La paroi intérieure du tube de l'eudiomètre est supposée constamment mouillée.

On demande :

1° De calculer les proportions des différents gaz contenus dans le gaz soumis à l'analyse;

2° De déterminer l'erreur maximum qui peut être commise sur ces proportions, si les mesures de pression comportent une erreur de lecture de $0^{mm},2$ en plus ou en moins et si la température, au lieu d'être constante, varie irrégulièrement, d'une mesure à l'autre, entre 16° et 18°. La tension de vapeur d'eau correspondant à ces deux températures extrêmes diffère de 1^{mm} en plus ou en moins de la pression moyenne indiquée de 15^{mm}.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

Coulommiers. — Imprimerie Paul BRODARD.

31e Année. Décembre 1920. N° 3.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Note de la rédaction. — Une erreur de classement nous a empêchés de signaler quelques solutions satisfaisantes de la question 2267. MM. L. TROIN, à Turin ; L. SIMON, à Fourmies ; A. MALRAIT, lycée de Marseille ; E. DUMAINE, lycée de Saint-Étienne ont envoyé : les deux premiers, de très bonnes solutions, et les deux autres, des solutions très suffisantes.

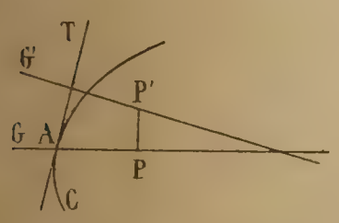
PREMIÈRE PARTIE

AU SUJET DE LA LIGNE DE STRICTION D'UNE SURFACE RÉGLÉE

par M. H. Girard, professeur au lycée Banville, à Moulins.

Considérons une surface S, non développable, engendrée par une droite G dépendant d'un paramètre. On sait que le plan tangent tourne de 180° autour de la génératrice G lorsque le point de contact parcourt cette dernière.

Il existe donc, sur chaque génératrice, *un* point en lequel le plan tangent est *perpendiculaire* au plan tangent à l'infini; ce point, que nous désignerons dans ce qui va suivre par A, est ce que l'on appelle le *point central* de la génératrice G. Lorsque cette dernière se déplace sur la surface S, son point central trace une courbe C appelée *ligne de striction* de la surface S.

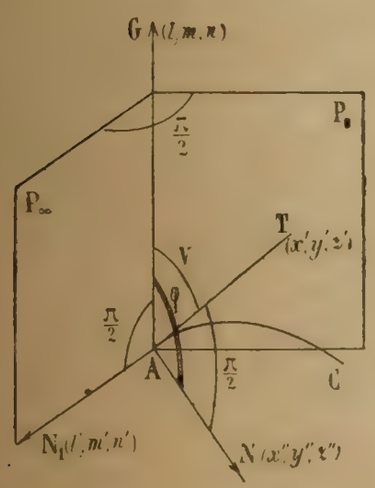


Si le lecteur veut bien se reporter à la démonstration de la formule de Chasles, il sera conduit à admettre les trois propositions suivantes :

1° Le plan tangent au point situé à *l'infini* sur la génératrice G est parallèle à la génératrice G' *infiniment voisine* de G.

2° Le plan tangent central contient la perpendiculaire commune PP' aux génératrices *infiniment voisines* G et G'.

3° Le point central A coïncide avec la position limite du pied P de la perpendiculaire commune PP'.



La première de ces propositions sera seule utilisée dans la suite, mais les deux autres ne doivent pas être perdues de vue dans les applications, notamment dans le cas où la surface S est un conoïde (*).

Ceci étant rappelé, soient l, m, n les *cosinus* directeurs de la génératrice G et x, y, z les coordonnées du point central A. Supposons les six variables l, m, n, x, y et z *fonctions de l'arc s* de la ligne de striction C, de sorte que nous ayons

$$(1)\quad \begin{cases} x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, \\ l^2 + m^2 + n^2 = 1, \\ ll' + mm' + nn' = 0. \end{cases}$$

Exprimons que la courbe C est bien la ligne de striction de la surface S engendrée par la droite G

(*) Voir question n° 2192, p. 30.

Le plan tangent à l'infini, P_∞, est *parallèle* aux deux directions *rectangulaires* (l, m, n) et (l', m', n'); le plan central, P_0, est *parallèle* aux directions (l, m, n) et (x', y', z'). Pour que ces deux plans soient perpendiculaires il faut et il suffit que les directions (l', m', n') et (x', y', z') soient orthogonales, c'est-à-dire que l'on ait identiquement

$$(2) \qquad l'x' + m'y' + n'z' = 0.$$

Cette équation de condition, jointe à la dernière du système (1), prouve que la *normale* au point A à la surface S est parallèle à la direction (l', m', n').

Soient AN_1 la normale à la surface au point central A, AN la normale principale à la ligne de striction, ρ le rayon de courbure de cette dernière, V et φ les angles que fait la génératrice G avec la tangente AT et la normale principale AN. Nous pouvons écrire

$$(3) \qquad \cos V = lx' + my' + nz';$$

d'où l'on déduit, par dérivation, en tenant compte de (2) et du premier groupe des formules classiques de Frenet et Serret,

$$(4) \qquad \cos\varphi = -\rho \sin V \frac{dV}{ds}.$$

Telle est la relation qui permet de trouver toutes les surfaces réglées admettant pour ligne de striction une courbe donnée C. On remarquera que le problème dépend d'une fonction arbitraire,

$$V = f(s).$$

Restreignons la question en imposant une seconde condition à la courbe C. Nous sommes ainsi conduits à examiner les trois problèmes suivants :

1° *La ligne de striction est aussi une géodésique de* S.

Dans ces conditions, les normales AN et AN_1 sont confondues, la relation (4) se réduit à

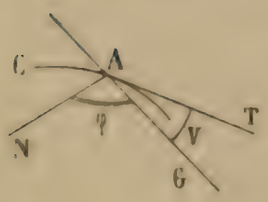
$$\rho \sin V \frac{dV}{ds} = 0,$$

ce qui nous donne

$$V = \text{constante}.$$

La génération des surfaces S, qui constituent une famille, est évidente. Parmi ces surfaces il y a lieu de retenir celle engendrée par la *binormale* à la courbe C $\left(V = \frac{\pi}{2}\right)$.

2° *La ligne de striction est ligne asymptotique.*



La génératrice G devant être située dans le plan osculateur à la courbe C, nous avons

$$\cos\varphi = \sin V$$

et par suite la relation (4) devient

$$\left(1 + \rho \frac{dV}{ds}\right) \sin V = 0.$$

L'hypothèse $\sin V = 0$ nous conduit à la surface developpable admettant la courbe C pour arête de rebroussement.

Cette solution particulière écartée, examinons le cas général où l'on doit avoir

$$1 + \rho \frac{dV}{ds} = 0,$$

c'est-à-dire

$$dV = -\frac{ds}{\rho} = -d\sigma, \qquad V = -\int d\sigma = \sigma_0 - \sigma,$$

σ désignant l'arc de l'indicatrice sphérique des tangentes à la courbe C.

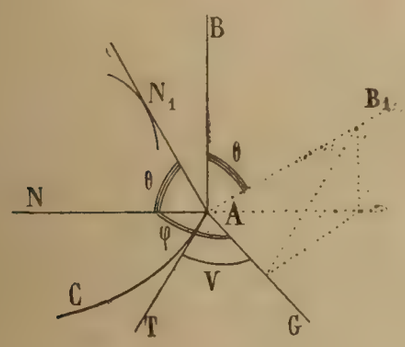
On voit donc que la connaissance de l'une des surfaces S entraîne celle de toutes les autres (analogue aux développées d'une courbe).

L'interprétation géométrique de l'équation $dV = -d\sigma$ est évidente : il suffit de faire rouler sans glisser un grand cercle sur l'indicatrice sphérique c des tangentes à la courbe C; le rayon Og reste parallèle à la génératrice G. En particulier, si C est une hélice circulaire, son indicatrice c se réduit à un petit cercle de la sphère de rayon égal à l'unité, le point g décrit une *hélice sphérique*.

3° *La ligne de striction est ligne de courbure.*

Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que la normale AN_1 à la surface S engendre une développable ayant nécessairement *pour arête de rebroussement une développée de* C.

Désignons par θ l'angle formé par les normales AN, AN_1 et par AB la binormale à la courbe C. Si l'on veut bien remarquer que le plan tangent central TAG forme avec la binormale un angle égal à θ, nous aurons



$$(5) \qquad \cos\varphi = -\sin\theta \sin V,$$

et la relation fondamentale devient

$$(6) \qquad \frac{dV}{ds} = \frac{\sin\theta}{\rho},$$

ou

$$V = \int \sin\theta \frac{ds}{\rho}.$$

Connaissant les angles θ et V en fonction de l'arc s, il sera possible de former les équations de la génératrice G.

Les surfaces répondant à la question dépendent donc de *deux* constantes introduites par des quadratures.

Enfin remarquons que si la courbe donnée C est plane, l'angle θ est constant.

Exemple : appliquer ce qui précède au cercle C défini par les équations

$$x = R\cos\frac{s}{R}, \qquad y = R\sin\frac{s}{R}, \qquad z = 0.$$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES

(Cours préparatoires.)

Concours de 1919.

2302. — I. *On considère deux ellipses homothétiques et concentriques, les deux points d'intersection* A *et* B *avec l'ellipse extérieure* E *d'une tangente à l'ellipse intérieure* E', *et le pôle* M *de cette droite par rapport à l'ellipse* E. *Montrer que :*

1° *l'aire du triangle* ABM,

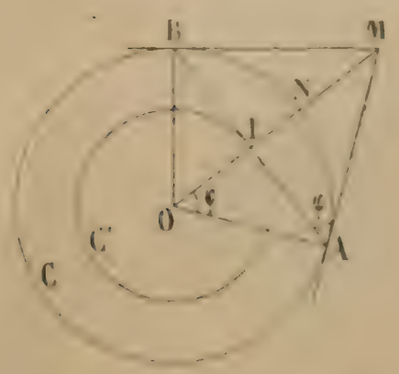
2° *l'aire de la partie de ce triangle intérieure à l'ellipse* E *sont indépendantes du choix de la tangente* AB *à l'ellipse* E', *et les calculer en fonction des demi-axes* a *et* b *de l'ellipse* E' *et du rapport d'homothétie* $\lambda = \cos\varphi$ *de l'ellipse* E' *à l'ellipse* E. *Déterminer la limite du rapport des deux aires considérées lorsque* φ *est infiniment petit.*

II. *Traiter la même question en remplaçant les ellipses* E *et* E' *par des hyperboles homothétiques et*

concentriques H *et* H'. *On désignera leur rapport d'homothétie par* $\lambda = \frac{e' - e''}{2}$ *(on pourra commencer par traiter le cas où l'hyperbole* H *est l'hyperbole équilatère* $x = \frac{e' + e''}{2}$, $y = \frac{e' - e''}{2}$ *et où* AB *est parallèle à l'axe des* y*).*

I. — On peut considérer les ellipses E et E' comme les projections de deux cercles concentriques C et C', situés dans un même plan passant par le grand axe des ellipses et faisant avec le plan des ellipses un angle V dont le cosinus est égal à $\frac{b}{a}$.

Les aires envisagées dans l'énoncé seront alors les projections d'aires analogues relatives aux deux cercles, et seront égales à celles-ci multipliées par cos V ou $\frac{b}{a}$. Il suffit d'établir le théorème pour les deux cercles.



On voit d'abord que, quelle que soit la tangente AB, l'aire du triangle ABM et celle du segment ABN sont constantes. Nous allons évaluer ces aires.

Le cercle C' a pour rayon $OI = a$, et le cercle C,

$$OA = \frac{a}{\lambda} = \frac{a}{\cos\varphi};$$

par suite, dans le triangle rectangle OAI, l'angle AOI est égal à φ, et de même $IAM = \varphi$.

L'aire S du triangle ABM est

$$S = IA.MI = IA^2 \operatorname{tg}\varphi = a^2 \operatorname{tg}^2\varphi,$$

et l'aire S' du segment ABN est

$$S' = \text{secteur OAB} - \text{triangle OAB} = OA^2.\varphi - \frac{1}{2}OA^2 \sin 2\varphi = \frac{a^2(2\varphi - \sin 2\varphi)}{2\cos^2\varphi}.$$

Les aires correspondantes dans les ellipses sont $\frac{b}{a}S$ et $\frac{b}{a}S'$, ou

$$ab \operatorname{tg}\varphi \qquad \text{et} \qquad \frac{ab(2\varphi - \sin 2\varphi)}{2\cos^2\varphi}.$$

Le rapport de ces aires est

$$\frac{S}{S'} = \frac{2\sin^2\varphi}{\cos\varphi(2\varphi - \sin 2\varphi)}.$$

Cherchons maintenant la limite de ce rapport quand φ tend vers zéro. En utilisant les développements en série de $\sin\varphi$ et de $\sin 2\varphi$, on peut écrire

$$\sin\varphi = \varphi - \mu\varphi^3,$$

$$\sin 2\varphi = 2\varphi - \frac{(2\varphi)^3}{3!} + \nu\varphi^5,$$

μ et ν restant finis quand φ tend vers zéro.

Remplaçons $\sin\varphi$ et $\sin 2\varphi$ par ces valeurs dans l'expression de $\frac{S}{S'}$, nous avons

$$\frac{S}{S'} = \frac{2(\varphi - \mu\varphi^3)^2}{\cos\varphi\left[\frac{(2\varphi)^3}{3!} - \nu\varphi^5\right]} = \frac{2(1 + \mu\varphi^2)^2}{\cos\varphi\left[\frac{4}{3} - \nu\varphi^2\right]}.$$

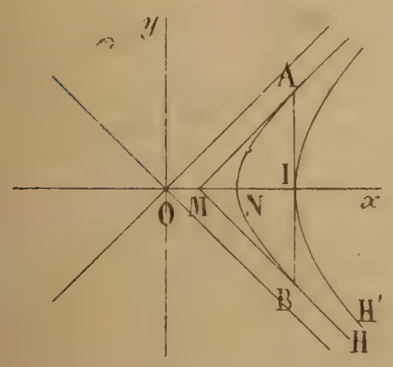
On voit alors que, quand φ tend vers zéro $\frac{S}{S'}$ a pour limite $\frac{2}{\frac{4}{3}}$ ou $\frac{3}{2}$.

II. — On peut considérer également les hyperboles données comme les projections de deux hyperboles *équilatères* homothétiques, et par suite, tout revient à traiter la question dans le cas où les hyperboles sont équilatères.

Nous représenterons par

$$x^2 - y^2 - a^2 = 0, \qquad x^2 - y^2 - a^2 \operatorname{ch}^2\varphi = 0$$

les équations des hyperboles H et H′ rapportées à leurs axes.



Considérons d'abord le cas où AB est tangente à H′ au sommet I $(a \operatorname{ch}\varphi, 0)$.

Les coordonnées du point A sont $a \operatorname{ch}\varphi$ et $a \operatorname{sh}\varphi$; la tangente en ce point à l'hyperbole H a pour équation

$$x \operatorname{ch}\varphi - y \operatorname{sh}\varphi - a = 0;$$

elle rencontre Ox au point M qui a pour abscisse $\frac{a}{\operatorname{ch}\varphi}$. On en conclut que l'aire S du triangle ABM est

$$S = MI.AI = \left(a \operatorname{ch}\varphi - \frac{a}{\operatorname{ch}\varphi}\right) a \operatorname{sh}\varphi = \frac{a^2 \operatorname{sh}^3\varphi}{\operatorname{ch}\varphi}.$$

D'autre part, un point quelconque de H a pour coordonnées $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$, et l'aire S du segment ANB a pour valeur

$$S' = 2\int_0^{\varphi} y\,dx = 2a^2 \int^{\varphi} \operatorname{sh}^2 t\,dt.$$

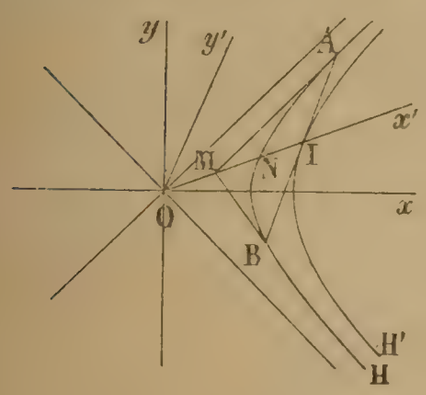
Or

$$2\int \operatorname{sh}^2 t\,dt = \int (\operatorname{ch} 2t - 1)\,dt = \frac{\operatorname{sh} 2t}{2} - t,$$

et

$$S' = \frac{a^2(\operatorname{sh} 2\varphi - 2\varphi)}{2}.$$

Supposons maintenant que AB soit une tangente quelconque à H′, I désignant toujours le point de contact et M le pôle de AB par rapport à H. Les points M et I sont sur le diamètre conjugué Ox' de AB par rapport aux deux hyperboles; par suite, si nous menons Oy' parallèle à AB, Ox' et Oy' constituent un ensemble de deux diamètres conjugués.



En prenant ces droites comme axes de coordonnées, les équations de H et H′ sont respectivement

$$x'^2 - y'^2 - a'^2 = 0, \qquad x'^2 - y'^2 - a'^2 \operatorname{ch}^2\varphi = 0,$$

et l'on a

$$ON = a', \qquad OI = a' \operatorname{ch}\varphi.$$

Si l'on désigne par θ l'angle $x'Oy'$, on trouve facilement, en répétant le calcul précédent,

$$S = \text{aire } ABM = a'^2 \sin\theta . \frac{\operatorname{sh}^3\varphi}{\operatorname{ch}\varphi},$$

$$S' = \text{aire } ABN = \frac{a'^2 \sin\theta}{2}(\operatorname{sh} 2\varphi - 2\varphi).$$

Mais, d'après le second théorème d'Apollonius, on a

$$a'^2 \sin\theta = a^2.$$

On en conclut que S et S′ ont des valeurs constantes quelle que soit la tangente AB.

De plus, on a

$$\frac{S}{S'} = \frac{2\operatorname{sh}^2\varphi}{\operatorname{ch}\varphi(\operatorname{sh}2\varphi - 2\varphi)},$$

et

$$\operatorname{sh}\varphi = \varphi + \mu\varphi^3, \qquad \operatorname{sh}2\varphi = 2\varphi + \frac{(2\varphi)^3}{3!} + \nu\varphi^5,$$

μ et ν restant finis quand φ tend vers zéro.

On en déduit

$$\frac{S}{S'} = \frac{2(1+\mu\varphi^2)^3}{\operatorname{ch}\varphi\left(\frac{4}{3}+\nu\varphi^2\right)},$$

et l'on voit que, lorsque φ tend vers zéro, $\frac{S}{S'}$ a encore pour limite $\frac{3}{2}$.

PAUL BERNARD, à Paris.

Bonnes solutions par MM. L. CHIGANNE, à Strasbourg; G. LACH, à Douai; M., à Guéret; E. LOGEARD, H.-L. MENNESSIER à Évreux; F. MILLOT, à Paris; Pierre ROBERT, école normale supérieure de Saint-Cloud; Gaston SINGIER, professeur au lycée de Valenciennes; Marcel VASSEUR, à Calais.

2303. — *On considère une ligne brisée $A_0A_1 \ldots A_n \ldots$ ayant tous ses sommets sur l'hyperbole $xy = 1$, A_0 étant au sommet $x = 1$, $y = 1$ de cette hyperbole, ses côtés tangents à l'hyperbole $xy = \lambda^2$ et telle que les abscisses de ses sommets successifs soient croissantes. On posera toujours $\lambda = \frac{1}{2}(e^{\varphi} + e^{-\varphi})$. Déterminer les coordonnées x_n et y_n du point A_n et la longueur l_n du côté $A_{n-1}A_n$. Montrer que la série*

$$f(\lambda) = \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \ldots + \frac{1}{l_n} + \ldots$$

est convergente. Trouver en fonction de λ sa valeur principale pour λ infini. Calculer $f\left(\frac{5}{4}\right)$ à 0,0001 près.

N. B. — L'usage des tables de logarithmes est interdit.

L'attention des candidats est attirée sur le fait que les calculs à effectuer sont extrêmement simples, à condition d'utiliser quelques remarques géométriques. Les solutions géométriques, clairement exposées, seront préférées aux solutions purement algébriques.

Soient α, β les abscisses de deux points A, B de l'hyperbole $xy = 1$; les ordonnées de ces points sont $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, et l'équation de la droite AB est $x + \alpha\beta y - (\alpha + \beta) = 0$.

Pour que cette droite soit tangente à l'hyperbole $xy = \lambda^2$, il faut qu'on ait $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\lambda^2 = 0$, ou, en remplaçant λ par $\operatorname{ch}\varphi$,

$$\beta^2 - 2\alpha\beta\operatorname{ch}2\varphi + \alpha^2 = 0.$$

On en tire

$$\frac{\beta}{\alpha} = \operatorname{ch}2\varphi \pm \operatorname{sh}2\varphi.$$

On peut toujours supposer $\varphi > 0$; d'autre part, en supposant $\beta > \alpha$, on a

$$\frac{\beta}{\alpha} = \operatorname{ch}2\varphi + \operatorname{sh}2\varphi = e^{2\varphi} \qquad \text{ou} \qquad \beta = \alpha e^{2\varphi}.$$

Par suite, l'abscisse de A_0 étant égale à 1, celle de A_1 est e^{φ}, celle de A_2 $e^{2\varphi}$, ..., celle de A_n $e^{n\varphi}$, et les coordonnées du point A_n sont

$$x_n = e^{n\varphi}, \qquad y_n = e^{-n\varphi}.$$

Nous poserons, pour simplifier, $\varphi = \ln 2$, et nous aurons $x_n = 2^n$, $y_n = \frac{1}{2^n}$.

Nous en déduisons

$$l_n^2 = (z^n - z^{n-1})^2 + \left(\frac{1}{z^n} - \frac{1}{z^{n-1}}\right)^2 = (z^n - z^{n-1})^2\left(1 + \frac{1}{z^{4n-2}}\right)$$

et

$$l_n = \frac{(z^n - z^{n-1})\sqrt{z^{4n-2}+1}}{z^{2n-1}} = \frac{(z-1)\sqrt{z^{4n-2}+1}}{z^n};$$

le terme général de la série considérée est alors

$$u_n = \frac{1}{l_n} = \frac{z^n}{(z-1)\sqrt{z^{4n-2}+1}}.$$

On en déduit

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = z\frac{\sqrt{z^{4n-2}+1}}{\sqrt{z^{4n+2}+1}} = \frac{1}{z}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{z^{4n-2}}}{1+\frac{1}{z^{4n+2}}}}.$$

Comme z est plus grand que 1, quand n augmente indéfiniment, z^{4n-2} et z^{4n+2} augmentent aussi indéfiniment, et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a pour limite $\frac{1}{z}$, qui est plus petit que 1; par suite, la série est convergente.

Pour calculer la partie principale de $f(\lambda)$, nous pouvons remplacer chaque terme $\frac{1}{l_n}$ par un infiniment petit équivalent. Pour λ infini, φ est infini, ainsi que z. Posons $z = \frac{1}{t}$, nous avons

$$\frac{1}{l_n} = \frac{t^n}{(1-t)\sqrt{1+t^{4n-2}}};$$

ceci est équivalent à t^n. Donc $\Sigma\frac{1}{l_n}$ est équivalent à Σt^n, ou à $\frac{t}{1-t}$, ou encore à t.

Par suite, $f(\lambda)$ a même partie principale que t ou que $\frac{1}{z}$.

Or,

$$(1) \qquad z = \operatorname{ch} 2\varphi + \operatorname{sh} 2\varphi = 2\lambda^2 - 1 + 2\lambda\sqrt{\lambda^2-1} = \lambda^2\left[2 - \frac{1}{\lambda^2} + 2\sqrt{1-\frac{1}{\lambda^2}}\right],$$

et l'on voit que $\frac{z}{4\lambda^2}$ a pour limite 1 pour λ infini; donc $\frac{1}{z}$ a pour partie principale $\frac{1}{4\lambda^2}$.

On en conclut que la partie principale de $f(\lambda)$ est $\frac{1}{4\lambda^2}$.

Pour $\lambda = \frac{5}{4}$, la formule (1) donne $z = 4$; par suite la série devient

$$(2) \qquad \frac{4}{3\sqrt{1+4^2}} + \frac{4^2}{3\sqrt{1+4^6}} + \frac{4^3}{3\sqrt{1+4^{10}}} + \ldots + \frac{4^n}{3\sqrt{1+4^{4n-2}}} + \ldots.$$

Si nous remplaçons dans cette série le terme

$$u_n = \frac{4^n}{3\sqrt{1+4^{4n-2}}}$$

par la quantité

$$v_n = \frac{4^n}{3\sqrt{4^{4n-2}}} = \frac{1}{3.4^{n-1}},$$

nous commettons une erreur par excès qui est égale à

$$v_n - u_n = \frac{1}{3.4^{n-1}} - \frac{4^n}{3\sqrt{1+4^{4n-2}}} = \frac{\sqrt{1+4^{4n-2}} - 4^{2n-1}}{3.4^{n-1}\sqrt{1+4^{4n-2}}}$$

ou

$$v_n - u_n = \frac{1}{3.4^{n-1}\sqrt{1+4^{4n-2}}\left(\sqrt{1+4^{4n-2}} + 4^{2n-1}\right)}$$

En retranchant 1 des quantités placées sous les radicaux, on a

$$v_n - u_n = \frac{1}{3.4^{n-1}.4^{2n-1}.2.4^{2n-1}} = \frac{1}{6.4^{5n-3}}.$$

Par suite, si dans la série (2) nous remplaçons $u_2, u_3, \ldots$ par $v_2, v_3, \ldots$ nous obtenons une nouvelle série

$$(3) \qquad u_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots$$

dont la somme S' est supérieure à la somme S de la série (2), la différence $S' - S$ étant moindre que

$$\frac{1}{6.4^7} + \frac{1}{6.4^{12}} + \frac{1}{6.4^{17}} + \ldots \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{6.4^2(4^5-1)}$$

et ceci est plus petit que $\frac{2}{10^5}$.

Or il est facile de calculer S'; on a

$$S' = \frac{4}{3\sqrt{17}} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{3.4^2} + \frac{1}{3.4^3} + \ldots$$

ou

$$S = \frac{4}{3\sqrt{17}} + \frac{1}{9}.$$

Calculons $\frac{4}{3\sqrt{17}}$ ou $\frac{4\sqrt{17}}{51}$ et $\frac{1}{9}$ à $\frac{1}{10^6}$ près par excès; nous obtenons

$$\frac{4\sqrt{17}}{51} = 0{,}323381, \qquad \frac{1}{9} = 0{,}111112,$$

et en faisant la somme, nous avons $0{,}434493$.

C'est une valeur par excès de S, l'erreur étant moindre que $\frac{2}{10^5} + \frac{2}{10^6}$.

On en conclut que la somme de la série proposée est 0,4344 à $\frac{1}{10^5}$ près par défaut.

M., à Guéret.

Bonnes solutions par MM. Emile Comparot, élève à l'école nationale supérieure des mines; G. Lach, à Douai; H. L. Mennessier, à Evreux; Gaston Singier, professeur au lycée de Valenciennes.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1920)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (*Suite*)

II. — Géométrie analytique à deux dimensions

10319. — Construire les courbes

$y^4 - 3x^2y^2 + x^3 = 0$, $\quad y^3 + 2x^2y^2 + x^3 = 0$, $\quad (x - y)(x^2 - y^2) - ay^2 = 0$, $\quad x^4 + y^4 + a^2(4x^2 - 3y^2) = 0$;

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{Lt}{1+t}, \\ y = \dfrac{L(1+t)}{t}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = aL\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi}{2}\right), \\ y = \dfrac{a}{\cos\varphi}. \end{cases}$$

— **320.** — Construire les courbes

$\rho\cos\omega = a\sin 3\omega$ (aire de la boucle), $\quad \rho = 3\cos\frac{\omega}{2} - \frac{\sqrt{6}}{\cos\omega}$, $\quad \rho = \frac{2\sin^3\omega + 3\cos\omega}{\cos^2\omega}$,

$\rho^2 = a^2\sin 2\omega$ (angle de la tangente avec Ox), $\quad \rho = \frac{a}{\sin^3\frac{\omega}{2}}$ (rayon de courbure), $\quad \rho^2 = \cos\omega + \frac{1}{\cos\omega}$,

$\rho = \sin\omega + \mathrm{tg}\frac{\omega}{2}$, $\quad \rho = \sin\frac{\omega}{2} + \frac{1}{3\cos\frac{\omega}{2}}$, $\quad \rho = \frac{\sin\frac{\omega}{3}}{\cos\frac{\omega}{2}}$, $\quad \rho^3\cos\omega - 2\rho + 4\sin\omega = 0$, $\quad \rho^4\,\mathrm{tg}^3\omega + 2\rho^2\sin\omega + \cos 2\omega = 0$.

10321. — D'un point M on peut mener trois tangentes à la courbe $x = t^2$, $y = t^3$. Déterminer le lieu du point M tel que ces trois tangentes et la parallèle à la première bissectrice des axes menée par M forment un faisceau harmonique.

— **322.** — D'un point $P(x_0, y_0)$ on peut mener trois tangentes à la courbe $x^3 = y^2$; soient A_1, A_2, A_3, les points de contact. Trouver les projections sur les axes de la somme géométrique des vecteurs PA_1, PA_2, PA_3.

— **323.** — On donne deux cercles par leurs équations. Déterminer leur angle. En déduire la condition pour que les deux cercles soient orthogonaux.

— **324.** — La tangente au point A de la courbe $x^3 = a^2(x + y)$ rencontre la courbe en un autre point, B. Lieu du milieu de AB.

— **325.** — Trouver en coordonnées polaires les courbes dans lesquelles la tangente fait avec l'axe polaire un angle égal à $\frac{\omega}{2}$.

— **326.** — Construire la courbe $x(y^2 - x^2) - a^2y = 0$. Lieu des milieux des cordes parallèles à la direction $y = x$.

— **327.** — Construire la courbe $x = \frac{t^3}{t^2 + t - 2}$, $y = \frac{t^2 - 2t}{t - 2}$. Quel est son degré? Par l'origine on mène une sécante qui rencontre la courbe aux points A et B. Lieu du point de rencontre des tangentes en A et B.

— **328.** — Quelle est la courbe dont toutes les normales passent par un point fixe?

— **329.** — Reconnaître les lignes qui correspondent à $X = A$, $Y = B$, quand on fait la transformation $Z = L\frac{\sqrt{z - a} + \sqrt{z - b}}{\sqrt{a - b}}$. $(Z = X + iY,\ z = x + iy)$. Remarques géométriques.

— **330.** — Même question pour $Z = L\frac{z - a}{z - b}$. Montrer que $\frac{z - a}{z - b} = \frac{ma}{mb}e^{i\theta}$, m, a, b étant les points qui correspondent à z, a, b et θ désignant l'angle amb. En déduire le lieu du point m lorsque $X = A$ ou $Y = B$.

— **331.** — On considère la courbe $\rho = ae^{\omega\cot\alpha}$; former l'équation de la tangente, et mettre cette équation sous la forme $x\cos\varphi + y\sin\varphi = g(\varphi)$.

— **332.** — On considère la courbe $x = 3t^2$, $y = 2t^3$. La tangente en un point A rencontre la courbe en un point B. Déterminer le point A de façon que la tangente en B soit perpendiculaire à AB.

— **333.** — Un cercle de rayon donné se déplace de façon que son centre décrive une droite D. Une droite fixe Δ perpendiculaire à D rencontre le cercle au point M. Trouver l'enveloppe de la tangente au point M.

— **334.** — Déterminer les points doubles de la courbe $x = \frac{at^2(t^2 + 3)}{2(t^2 - 1)}$, $y = \frac{3at^3}{2(1 - t^2)}$.

— **335.** — On donne une droite fixe et on considère un cercle de rayon constant qui tourne autour d'un de ses points. Trouver l'enveloppe des tangentes aux points où le cercle rencontre la droite. Lieu du pôle de la droite par rapport au cercle.

— **336.** — Trouver une courbe telle que l'on ait $\rho = \frac{r}{\sin^3 V}$, où ρ désigne le rayon de courbure, r le rayon vecteur et V l'angle de la tangente avec le rayon vecteur.

— **337.** — Construire les deux courbes $(x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2 \pm (x\sin\alpha - y\cos\alpha)^2 = a^2$.

— **338.** — Calculer le périmètre de l'aire limitée par les deux courbes $x^2 - ay = 0$, $x^3 - ay^2 = 0$.

— **339.** — Lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes perpendiculaires à la courbe $x^3 + a^2(y - a) = 0$.

— **340.** — Asymptotes de la courbe $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 + a^2y = 0$.

— **341.** — Existe-t-il sur la courbe $x^4 + y^4 = a^4$ un point tel que le cercle de courbure en ce point passe par l'origine?

— **342.** — On donne un cercle et un point A sur ce cercle; on mène une corde variable AB. Trouver l'enveloppe du cercle qui a pour diamètre AB.

— **343.** — Asymptotes de la courbe

$$xy(x + y - a - b) - k(x + y - a)(x + y - b) - kxy = 0.$$

Construire cette courbe.

— **344.** — On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy et un point P. Par le point P on mène une sécante qui rencontre Ox au point A, et on considère le cercle passant par le point O et tangent en A à PA. Lieu du centre de ce cercle. Par un point M du plan passent deux de ces cercles. Quel lieu doit décrire le point M pour que ces deux cercles soient orthogonaux?

— **345.** — Enveloppe de la droite $x\cos\alpha + y\sin\alpha - a\sqrt{\sin 2\alpha} = 0$.

— **346.** — Un cercle de rayon R roule sur l'axe polaire Ox; du point O on mène une tangente OT. Le diamètre du cercle passant par le point O rencontre le cercle au point I, et la tangente en I rencontre OT en M. Lieu du point M; former l'équation en coordonnées polaires. Trouver géométriquement le degré du lieu et l'asymptote.

— **347.** — Étudier la développée de la courbe $y = x^{n+1}$, $n > 0$.

— **348.** — Déterminer les courbes dont la sous-tangente polaire est constante.

— **349.** — Enveloppe de la droite $x\cos\alpha - y\sin\alpha = 2a(\alpha\cos\alpha - \sin\alpha)$.

10350. — La normale en un point M d'une courbe rencontre Ox au point N. Déterminer la courbe de manière que $\frac{OM}{ON} = k$.

— **351.** — Construire la courbe $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$. Rayon de courbure à l'origine et au point d'ordonnée maximum. Aire limitée par la courbe au-dessus de Ox. Rapport dans lequel cette aire est partagée par l'ordonnée maximum.

— **352.** — On joint le foyer F d'une ellipse à un point variable M sur la courbe. Calculer la valeur moyenne de $\frac{1}{FM}$ en prenant pour variable indépendante l'angle de FM avec l'axe focal.

— **353.** — Étudier l'enveloppe de la droite $x(x - y - 2) + \lambda(x - 2) - y = 0$. Lieu des points d'où l'on peut mener à cette enveloppe deux tangentes rectangulaires.

— **354.** — Étudier la concavité d'une courbe définie par les équations paramétriques $x = f(t)$, $y = g(t)$.

— **355.** — On considère la courbe $y^2(a - x) = x^3$. On lui mène une tangente en A, qui rencontre à nouveau la courbe en B. Lieu du milieu de AB.

— **356.** — D'un point fixe O on abaisse la perpendiculaire OP sur la tangente en un point M d'une courbe; on pose $OM = \rho$, $OP = p$; démontrer que le rayon de courbure au point M est égal à $\rho\frac{d\rho}{dp}$.

— **357.** — Trouver une courbe telle que l'on ait $\frac{s^2}{\rho} + \rho^2 = 1$, s étant l'arc et ρ le rayon de courbure.

— **358.** — Lieu des milieux des cordes inclinées à 30° sur Ox de la courbe $y^2 = x^3$.

— **359.** — Construire la courbe $x = 1 + t^2$, $y = \frac{1 - t^2}{t}$. Soient M et M′ deux points de cette courbe tels que la corde MM′ soit vue de l'origine sous un angle droit. Trouver l'enveloppe de MM′.

— **360.** — En coordonnées polaires on donne un cercle ayant pour centre le pôle, et un autre cercle ayant son centre sur Ox. Calculer l'aire intérieure aux deux cercles.

— **361.** — Un point ayant pour affixe Z décrit le cercle $x^2 + y^2 - R^2 = 0$. Trouver le lieu du point dont l'affixe z a pour valeur $z = Z + \frac{1}{Z}$.

— **362.** — Enveloppe de la droite $x\cos t + y\sin t = 8 + \cos 3t$. Trouver une couronne circulaire ayant son centre à l'origine dans laquelle toute la courbe est comprise. Mener à la courbe deux tangentes parallèles. Calculer ds.

— **363.** — Soit AB une corde d'une parabole passant par le foyer. Démontrer que les normales en A et B se coupent sur la parallèle à l'axe menée par le milieu de AB.

— **364.** — Lieu des centres des cercles tangents à une parabole et passant par le sommet.

— **365.** — Trouver l'enveloppe des ellipses ayant les mêmes axes en direction et telles que la somme des longueurs de ces axes soit égale à une longueur donnée.

— **366.** — On considère une parabole et sa développée. Par un point M de la développée on peut mener deux normales à la parabole. Former l'équation de la droite joignant les pieds de ces normales. Enveloppe de cette droite quand le point M décrit la développée.

— **367.** — On donne deux ellipses homofocales E et E_1, E_1 étant à l'intérieur de E. Par un point P extérieur à E_1 et intérieur à E on mène des tangentes à cette ellipse; l'une de ces tangentes rencontre E aux points M et N, l'autre aux points M′ et N′. Démontrer que l'on a $\frac{1}{PM} + \frac{1}{PN} = \frac{1}{PM'} + \frac{1}{PN'}$.

— **368.** — Déterminer les points de rencontre de la parabole et de sa développée. Calculer l'aire comprise entre les deux courbes et l'arc de la développée entre le point de rebroussement et l'un des points de rencontre avec la parabole.

— **369.** — Lieu des points de rencontre des tangentes communes à une hyperbole et à un cercle concentrique, quand le rayon du cercle varie. Même question dans le cas où le centre du cercle est un point de l'axe focal de l'hyperbole.

— **370.** — Trouver l'enveloppe de la corde commune à une ellipse et à un cercle osculateur quelconque.

— **371.** — On considère une conique $f(x, y) = 0$ et un point M, ayant pour coordonnées x_0, y_0. Par ce point on mène une sécante qui rencontre la courbe aux points P et P′. Former l'équation qui a pour racines MP et MP′. Par un autre point, M_1 (x_1, y_1), on mène une sécante parallèle à la première rencontrant la courbe en P_1 et P_1'. Montrer que le rapport $\frac{\overline{M_1P_1}\cdot\overline{M_1P_1'}}{\overline{MP}\cdot\overline{MP'}}$ est indépendant de la sécante.

— **372.** — On donne une hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ et le cercle qui a pour centre l'origine et qui passe par les foyers. D'un point du cercle on mène les tangentes à l'hyperbole. Montrer que la droite qui joint les points de rencontre des tangentes avec le cercle est parallèle à l'axe focal de l'hyperbole.

— **373.** — Construire une hyperbole équilatère connaissant quatre points. Déterminer le centre et les asymptotes.

— **374.** — On donne une parabole et deux points A et B de la courbe situés d'un même côté de l'axe. Déterminer deux points C et D de l'arc AB tels que les aires des segments paraboliques ayant pour cordes AC, CD, DB soient égales.

(*A suivre.*)

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE

Concours de 1918.

Groupe I.

Mathématiques (première composition).

2478. — Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz, on considère la parabole (P) définie par les équations

$$z = 0, \qquad y^2 - 2px = 0.$$

Une sphère variable (S) a son centre sur la parabole (P) et est tangente à un plan fixe (Π) d'équation $x = h$.

1° Montrer que la sphère (S) est orthogonale à une sphère fixe (T) ayant son centre dans le plan xOy, et est tangente à une infinité de sphères fixes (S'). Montrer que ces sphères sont toutes tangentes à un même plan (Π') et orthogonales à une même sphère (T') ayant son centre dans le plan xOz. Trouver le lieu des centres des sphères (S').

Calculer les coordonnées du point de contact M d'une sphère (S) avec une sphère (S') en fonction des coordonnées des centres de ces deux sphères.

2° Trouver le lieu (C) du point de contact M quand la sphère (S) reste fixe, la sphère (S') variant, ainsi que le lieu (C') du point de contact M quand la sphère (S') reste fixe, la sphère (S) variant. Ces deux lieux sont des courbes planes; trouver leurs plans.

Trouver l'équation de la surface (Σ) lieu des points de contact M des différentes sphères (S) avec les différentes sphères (S').

3° Étudier, suivant les différentes valeurs de h, la forme de la surface (Σ), en la considérant comme engendrée par les courbes (C) ou par les courbes (C'). Déterminer, s'il y a lieu, la portion de la surface (Σ) correspondant aux points M pour lesquels les deux sphères (S) et (S') sont tangentes intérieurement.

4° Montrer que deux courbes (C) sont situées sur une même sphère. Conditions auxquelles doit satisfaire une sphère donnée pour qu'elle contienne deux courbes (C). Quelle relation géométrique existe-t-il entre le centre de cette sphère et les centres des deux sphères (S) correspondant aux deux courbes (C)?

5° On considère une sphère ayant son centre en un point de la parabole (P) et dont le rayon est une fonction donnée de l'ordonnée de ce point. Comment faut-il choisir cette fonction pour que les sphères ainsi définies soient toutes tangentes à deux sphères fixes?

Physique.

I. — Un système absorbe un travail mécanique T (joules) que le milieu extérieur lui fournit; il cède à ce milieu la quantité de chaleur Q (calories). A quelles conditions le rapport $\frac{T}{Q}$ est-il égal à la grandeur constante E appelée *équivalent mécanique de la calorie?* Connaissez-vous une expérience où, ces conditions étant remplies, on peut déduire la valeur de E des valeurs mesurées de T et de Q?

On répète l'expérience du calorimètre à palettes, de Joule (la description de l'appareil de Joule est supposée connue) avec un calorimètre dont les palettes sont d'inclinaison réglable : la valeur constante ω que la vitesse angulaire du système en rotation atteint très vite peut alors, pour des poids moteurs donnés, être réglée à volonté, entre certaines limites. Pendant la période où les vitesses sont pratiquement constantes, l'élévation de température de l'eau du calorimètre est θ_1 degrés par seconde. Pour une hauteur de chute déterminée des poids, l'élévation totale de température est θ degrés.

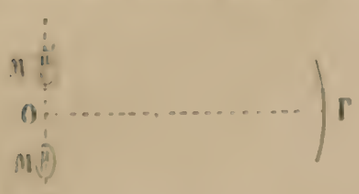
Choisir des valeurs numériques et calculer θ_1 et θ, pour un appareil déterminé et diverses valeurs de ω, le refroidissement étant négligé. Supposant ensuite multipliées par un même nombre λ toutes les dimensions géométriques de cet appareil (y compris celles des poids), calculer θ_1 et θ pour les mêmes valeurs de ω. Y aura-t-il, au point de vue de la précision des mesures, des raisons d'adopter telle ou telle valeur de λ?

II. — Décrire, sans donner beaucoup de détails, le dispositif de Foucault pour la mesure de la vitesse de la lumière dans l'air. On appellera S la source lumineuse, f la fente qu'elle éclaire; M le miroir tournant, n le nombre de tours qu'il exécute par seconde; I' le miroir concave qui renvoie vers M le faisceau lumineux la distance I'M. On prendra : $n = 1\,000$ environ; $r = 15^m$. On supposera que la source S, au

lieu d'être continue, émet une série d'éclairs séparés par des intervalles de temps égaux à θ, chacun d'eux ayant une durée très courte par rapport à θ. On considérera les deux cas suivants :

1° La durée θ est presque exactement égale à un millième de seconde (10^{-3} sec.) et sa valeur est connue avec une précision que l'on juge suffisante. Décrire les phénomènes observés. Comment pourra-t-on mesurer $\frac{1}{n}$ avec une précision comparable à celle que l'on a pour θ? Comment mesurera-t-on la vitesse V de la lumière?

2° La durée θ est égale à un dix-millionième de seconde (10^{-7} sec.). Décrire les phénomènes. Où pourrait-on placer une plaque photographique sur laquelle les images de la fente f éclairée par plusieurs éclairs successifs viendraient se peindre séparées? Comment pourra-t-on mesurer θ et V?



On supposera ensuite que le miroir tournant M est remplacé par un système de deux miroirs égaux M et M' capables de tourner, indépendamment l'un de l'autre, autour d'une même droite Oz. Le centre de courbure O du miroir Γ est à égale distance des deux miroirs, de telle sorte que l'image fournie, par Γ, du centre μ de la surface réfléchissante plane M coïncide avec le centre μ' de M', et réciproquement. La distance μμ' n'excède pas 1^{cm}. Le faisceau venant de la fente f tombe sur le miroir M, et le faisceau renvoyé par Γ tombe sur M'. Les deux miroirs M et M' tournent en sens contraires avec des vitesses angulaires presque exactement égales entre elles en valeur absolue (chacun d'eux fait 1 000 tours par seconde environ).

Dans les deux cas envisagés ci-dessus (1° $\theta = 10^{-3}$ seconde; 2° $\theta = 10^{-7}$ seconde) on rendra compte de la marche de la lumière et de la formation des images et l'on indiquera les grandeurs susceptibles d'être mesurées.

Les contours (circulaires) des miroirs M et M' étant considérés comme des objets éclairés (l'un par la lumière directe, l'autre par la lumière renvoyée par Γ) et tous deux capables de renvoyer la lumière dans toutes les directions, on demande ce que voit un observateur qui regarde ces miroirs. On pourra supposer, pour traiter cette question accessoire, que, dans un même faisceau, le contour de M diffuse beaucoup moins de lumière que le contour de M', de telle sorte que, pendant l'expérience, ces deux contours paraissent diffuser, par seconde, autant de lumière, l'un que l'autre.

Groupe II.

Mathématiques.

On considère la courbe C, lieu du point M dont les coordonnées rectangulaires sont, par rapport aux axes xOy,

$$x = a\cos\varphi . e^{\alpha\varphi}, \qquad y = b\sin\varphi . e^{\lambda\alpha\varphi}.$$

Dans ces formules, a, b, α, λ sont des constantes données, φ représente un paramètre variable, et e désigne la base des logarithmes népériens.

1° Cette courbe C est une spirale (*) comprenant une infinité de spires, que l'on pourra numéroter en prenant comme spire initiale celle qui est décrite par le point M quand le paramètre φ varie de zéro à 2π. En supposant la constante λ égale successivement à $+1$ et à -1, on examinera si deux spires différentes de la courbe peuvent avoir des points communs.

2° Lorsque la constante α est petite, les premières spires (correspondant aux premières valeurs entières, positives ou négatives, de l'indice qu'on a convenu de leur affecter) sont très rapprochées de l'ellipse E, d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Pour préciser davantage, on cherchera à déterminer un nombre α_0 tel que, si l'inégalité $|\alpha| < \alpha_0$ a lieu, on soit assuré que toutes les spires d'indice compris entre $-K$ et $+K$ (ces valeurs limites comprises) ne s'éloignent pas de l'ellipse de plus de ε, ε étant une distance donnée. On remarquera qu'il suffit pour cela que l'on sache associer deux par deux les points de l'ellipse et de chaque spire considérée, de telle manière que la distance mutuelle de deux points associés soit inférieure à ε. Calculer effectivement un tel nombre α_0, dans les hypothèses suivantes :

$$a = 2^{cm},5; \qquad b = 1^{cm}; \qquad \varepsilon = 0^{cm},1; \qquad \lambda = 2; \qquad K = 10.$$

(*) Une fois reconnue la forme générale (à peu près évidente) de la courbe C, on ne perdra pas de temps à en chercher les particularités (telles que points d'inflexion, etc.) au sujet desquelles on ne se posera aucune question.

3° Évaluer l'aire A balayée par le rayon vecteur OM quand M décrit K spires en partant du point $x = a$, $y = 0$. Pour α petit, cette aire diffère peu de $K\pi ab$. Former les premiers termes du développement en série de la différence $A - K\pi ab$, suivant les puissances de α. Que se passe-t-il de particulier dans le cas où la constante λ est égale à -1?

4° Soit M_0 un point de la courbe C, correspondant à la valeur φ_0 du paramètre. En posant $\varphi = \varphi_0 + 2p\pi$, et donnant à p successivement toutes les valeurs entières, positives ou négatives, on obtient une suite de points de la courbe; soit M_p le point qui correspond à la valeur de φ écrite plus haut. En supposant λ positif, examiner comment varie la distance de deux points consécutifs M_p et M_{p+1}. Peut-on choisir les données de la question de telle manière que tous les points de la suite définie à partir du point M_0 soient situés sur une même parabole (variable avec le point M_0)?

Physique.

I. — Fusion. Solidification.

II. — Un miroir plan, circulaire, de $1^m,45$ de diamètre, est disposé verticalement, le point le plus bas touchant le sol, le point le plus haut étant, par suite à $1^m,45$ au-dessus du sol. — Un observateur est debout devant ce miroir; ses yeux sont à $1^m,65$ au-dessus du sol. Il voit dans le miroir l'image d'une partie seulement de son corps. Laquelle? Discuter.

III. — Un observateur examine dans un miroir plan l'image de l'iris de l'un de ses yeux. Indiquer la marche de la lumière et la formation de l'image rétinienne. Indiquer les parties du miroir qui sont utilisées. Le candidat fera plusieurs applications numériques, en choisissant lui-même les valeurs du diamètre de la pupille et de la distance de l'œil au miroir.

IV. — Un observateur examine, dans deux miroirs plans rectangulaires, l'image de sa main droite. Cette main est ouverte, les doigts en haut; la paume en est tournée vers les miroirs. L'image (1) est-elle superposable à l'objet (main droite) ou pourrait-on l'amener à être symétrique de l'objet par rapport à un plan (main gauche)? L'arête d'intersection des miroirs étant *verticale*, comment cette image est-elle disposée? Le pouce est-il à droite ou à gauche? L'image est-elle droite ou renversée? Mêmes questions en supposant l'arête d'intersection *horizontale*.

V. — Même problème avec trois miroirs plans formant un trièdre trirectangle (2). A ce sujet, on démontrera (en peu de lignes) qu'un rayon lumineux tombant sur un système de trois miroirs plans formant un trièdre trirectangle donne, après trois réflexions, un rayon parallèle au rayon incident.

Chimie.

Caractères généraux des alliages.

Propriétés physiques et mécaniques.

Décrivez les principaux alliages qui vous sont connus; indiquez leurs emplois et les procédés qui peuvent être mis en œuvre pour connaître leur composition.

On laissera de côté ce qui a trait à la préparation des alliages.

Sciences naturelles.

LE PARASITISME CHEZ LES VERS

I. — Montrer les modifications graduées introduites par ce genre de vie : 1° chez les Hirudinées ou Sangsues; 2° chez les Trématodes et les Cestodes, par comparaison avec les types parents non parasites, à savoir : 1° les vers annelés; 2° les vers turbellariés.

II. — Complications progressives du cycle vital sous l'influence du parasitisme, dont on trouvera les exemples parmi les Némathelminthes et les Plathelminthes. [Polymorphismes, alternances de vie libre et parasitaire, hôtes multiples, etc.]

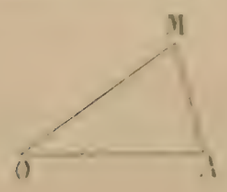
QUESTIONS PROPOSÉES

2479. — Étant donnés deux triangles ABC, A'B'C' inscrits dans une conique K, si par un point P de cette conique on mène une droite quelconque la coupant en un second point, H, et que sur cette droite on prenne un

(1) On ne s'occupera que de l'image fournie par deux réflexions.
(2) On ne s'occupera que de l'image fournie par trois réflexions.

autre point quelconque D, les deux coniques HDABC et HDA'B'C', qui passent par les points H et D, se coupent en deux autres points E et E' situés sur une droite fixe.

Cette droite fixe est la polaire H du point P par rapport à la conique qui a pour triangles conjugués communs ABC et A'B'C'. VAULOT, professeur au lycée Rollin.



2480. — On considère deux points fixes O et A et un nombre positif donné n. Étudier la courbe lieu des points M tels que

$$AM^2 = n.OA.OM.$$

Différentes courbes qui correspondent aux diverses valeurs de n. Cas où $n = 4$.

H. G.

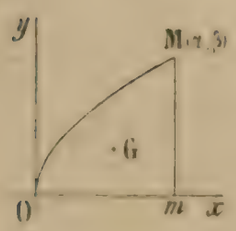
DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

(Cours préparatoires.)

Concours de 1914.

2288. — *On considère en coordonnées cartésiennes rectangulaires la parabole* $y^2 = 2px$, $(p > 0)$; *soient* A *la grandeur de l'aire de cette parabole comprise entre l'axe* Ox *et l'ordonnée* mM *correspondant à* $x = \alpha$, α, β, *les coordonnées de* M, ξ, η *les coordonnées du centre de gravité* G *de l'aire* A.



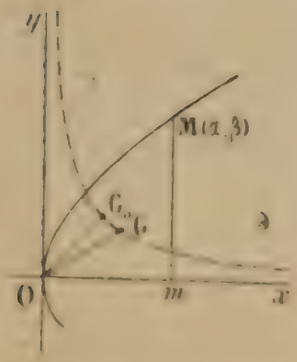
1° *Parmi toutes les paraboles correspondant aux diverses valeurs de* p *et pour lesquelles l'aire* OmM *est égale à* A *donnée, trouver celle pour laquelle la distance* $OG = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ *est maximum ou minimum. On prendra* β *comme variable.*

2° *Quel est le lieu du centre de gravité* G *quand* p *varie? Quelle est l'interprétation corrélative du maximum ou du minimum trouvé?*

3° *Étudier en fonction de* β, *et représenter graphiquement la variation de l'aire* a *engendrée par la révolution de l'arc* OM *autour de* Ox; *la courbe représentative a-t-elle des points d'inflexion?*

1° L'aire du secteur curviligne OmM est connue et donnée par la formule

$$A = \frac{2\alpha\beta}{3}.$$



Pour avoir l'x du centre de gravité, nous prendrons une tranche infiniment mince, parallèle à Oy, $y\,dx$, et nous appliquerons le théorème des moments à un plan perpendiculaire au plan du tableau et passant par Oy; nous aurons ainsi

$$A\xi = \int_0^\alpha yx\,dx = \sqrt{2p}\int_0^\alpha x^{\frac{3}{2}}dx;$$

puis,

$$A\xi = \sqrt{2p}\,\frac{2}{5}\alpha^{\frac{5}{2}} = \frac{\beta^5}{10p^2} \qquad \left(\alpha = \frac{\beta^2}{2p}\right)$$

Nous prendrons de même une tranche infiniment mince, parallèle à Ox,

$$(\alpha - x)\,dy, \qquad \text{ou} \qquad \left(\alpha - \frac{y^2}{2p}\right)dy,$$

et nous appliquerons le théorème des moments à un plan perpendiculaire au plan du tableau et passant par Ox; nous obtiendrons

$$A\eta = \int_0^\beta \left(\alpha y - \frac{y^3}{2p}\right)dy = \frac{\alpha\beta^2}{2} - \frac{\beta^4}{8p} = \frac{\beta^4}{8p}; \qquad \text{puis} \qquad y = \frac{\beta^4}{8Ap}.$$

Les coordonnées du centre de gravité sont donc

$$\xi = \frac{\beta^5}{10Ap^2}, \qquad y = \frac{\beta^4}{8Ap}.$$

Mais, comme $A = \frac{2\alpha\beta}{3}$ et $\alpha = \frac{\beta^2}{2p}$, nous avons $A = \frac{\beta^3}{3p}$, $p = \frac{\beta^3}{3A}$; par conséquent,

$$\xi = \frac{9A^2\beta^5}{10A\beta^6} = \frac{9A}{10\beta}, \qquad \eta = \frac{3A\beta^4}{8A\beta^3} = \frac{3\beta}{8}.$$

Il en résulte donc que

$$\overline{OG}^2 = \xi^2 + \eta^2 = \frac{81A^2}{100\beta^2} + \frac{9\beta^2}{64}, \qquad \overline{OG}^2 = \frac{9}{4}\left(\frac{9A^2}{25\beta^2} + \frac{\beta^2}{16}\right) = \frac{9}{1\,600}\left(\frac{144A^2 + 25\beta^4}{\beta^2}\right),$$

et nous sommes conduits à trouver le minimum ou le maximum de

$$u = \frac{144A^2}{\beta^2} + 25\beta^2.$$

La dérivée est

$$u' = \frac{50\beta^4 - 288A^2}{\beta^3};$$

elle s'annule pour $\beta^2 = \frac{12A}{5}$, $\beta = \sqrt{\frac{12A}{5}}$; elle est négative avant cette valeur, et, positive après; donc cette valeur correspond à un minimum. Le minimum de u a pour valeur

$$60A + 60A = 120A,$$

et celui de $\overline{OG}^2$,

$$\overline{OG}^2 = \frac{9 \times 120A}{1\,600} = \frac{27A}{40}.$$

2° Le lieu du point G a pour équation

$$\xi\eta = \frac{27A}{80};$$

c'est une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes Ox et Oy. Le minimum trouvé précédemment est la longueur du demi-axe transverse.

3° L'aire engendrée par la rotation de l'arc OM autour de Ox a pour valeur

$$a = \int_{OM} 2\pi y ds = \frac{2\pi}{p}\int_0^\beta \sqrt{p^2 + y^2}\, y dy.$$

Prenons pour variable

$$y^2 + p^2 = t^2;$$

nous aurons

$$y dy = t dt,$$

et

$$\int \sqrt{y^2 + p^2}\, y dy = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3};$$

par conséquent,

$$a = \frac{2\pi}{3p}\left[(\sqrt{p^2 + \beta^2})^3 - p^3\right].$$

Remplaçons dans cette expression p par $\frac{\beta^3}{3A}$; nous obtiendrons

$$a = 2\pi A\left[\left(\frac{\beta^4}{9A^2} + 1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\beta^6}{27A^3}\right].$$

Telle est la fonction de β que nous devons étudier :

$$z = \left(\frac{\beta^4}{9A^2} + 1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\beta^6}{27A^3}.$$

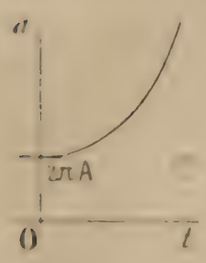
Prenons pour variable $t = \frac{\beta}{\sqrt{3A}}$, nous aurons finalement la fonction plus simple

$$z = (t^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - t^6.$$

La dérivée, z', est

$$z' = 6t^5 (\sqrt{t^2 + 1} - t^2);$$

elle est toujours positive; la fonction z, et, par suite, a, est toujours croissante; elle croît de $2A\pi$ à $+\infty$.



Prenons maintenant la dérivée seconde; nous aurons

$$\frac{z''}{6} = 3t^2(\sqrt{t^2 + 1} - t^2) + t^3\left(\frac{2t}{\sqrt{t^2 + 1}} - 2t\right) = \frac{(\sqrt{t^2 + 1} - t^2)}{\sqrt{t^2 + 1}} t^2 (3\sqrt{t^2 + 1} - 2t^2);$$

cette dérivée est toujours positive aussi; par conséquent, le coefficient angulaire de la tangente croît régulièrement de 0 à $+\infty$; il n'y a pas de point d'inflexion. La courbe représentative est aisée à construire.

Remarque. — Quand β ou t tend vers 0, p tend aussi vers 0, la parabole s'aplatit indéfiniment sur Ox, l'abscisse α grandit indéfiniment, la longueur de l'arc OM aussi et l'aire a tend vers $2\pi A$.

2289. *On donne l'équation*

$$x^3 + 6x^2 - (\alpha - 12)x - (2\alpha - \sin\alpha - 8) = 0.$$

Montrer qu'il existe au moins une valeur réelle de α pour laquelle l'équation a deux racines égales; indiquer avec assez de précision un procédé aussi simple que possible pour calculer la valeur ou les valeurs de α qui correspondent aux racines égales de l'équation proposée.

Les deux dérivées partielles de l'équation

$$x^3 + 6x^2 - (\alpha - 12)x - (2\alpha - \sin\alpha - 8) = 0$$

sont

$$3x^2 + 12x + 12 - \alpha = 0,$$

et

$$6x^2 + 2(12 - \alpha)x - 3(2\alpha - \sin\alpha - 8) = 0.$$

Il faut exprimer que ces deux équations ont une racine commune; à cet effet, multiplions la première par 2 et retranchons-en la seconde; nous obtenons

$$2\alpha x + 4\alpha - 3\sin\alpha = 0;$$

cette équation donne

$$x + 2 = \frac{3}{2}\frac{\sin\alpha}{\alpha},$$

et, en portant cette valeur dans la première dérivée, qui s'écrit

$$3(x + 2)^2 - \alpha = 0,$$

nous obtenons la condition

$$(1) \qquad 27\sin^2\alpha - 4\alpha^3 = 0.$$

Telle est l'équation qui donne α. Elle admet d'abord la racine $\alpha = 0$; pour cette racine, l'équation proposée se réduit à $(x + 2)^3 = 0$; elle a une racine double, la racine $x = -2$, puisque ce nombre est racine triple.

L'équation (1) n'a pas de racine négative. Pour voir si elle a des racines positives, il faut étudier les variations de la fonction $27\sin^2\alpha - 4\alpha^3$; or, pour $\alpha = \varepsilon$, cette fonction est positive; elle est

sûrement négative pour $\alpha = \pi$, et au delà de π; il y a donc au moins une racine entre 0 et π; il n'y en a pas au delà; pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la fonction prend la valeur $27 - \frac{\pi^3}{2}$ ou $\frac{54 - \pi^3}{2}$; elle est sûrement positive encore. La racine est donc comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et π, et, comme la fonction est visiblement décroissante dans cet intervalle, il n'y a qu'une racine dans l'intervalle.

Pour que la discussion soit achevée, il faut être sûr qu'il n'y a pas de racine dans le premier intervalle, de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Pour cela, nous écrivons

$$f(\alpha) = 27 \sin^2 \alpha - 4\alpha^3,$$
$$f'(\alpha) = 27 \sin 2\alpha - 12\alpha^2,$$
$$f''(\alpha) = 54 \cos 2\alpha - 24\alpha,$$
$$f'''(\alpha) = -108 \sin^2 \alpha - 24.$$

La dérivée troisième est négative dans tout l'intervalle: la dérivée seconde décroît depuis 54, jusqu'à $-54 - 12\pi$; elle s'annule donc une fois entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, pour $\alpha = \alpha_0$.

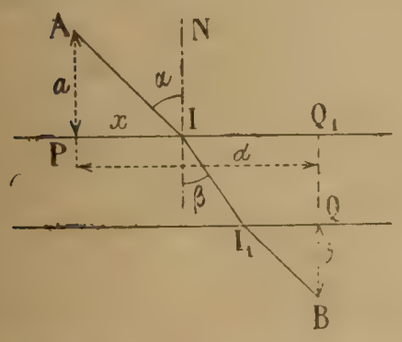
La dérivée première part de 0 et croît jusqu'à un maximum qu'elle prend pour $\alpha = \alpha_0$; elle décroît ensuite jusqu'à $-3\pi^2$, valeur qu'elle prend pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$; elle s'annule donc pour une valeur α_1, comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et plus grande que α_0; elle est positive avant et négative après. Enfin, la fonction part de 0, croît jusqu'à un certain maximum, qu'elle atteint pour $\alpha = \alpha_1$; elle décroît ensuite jusqu'à $27 - \frac{\pi^3}{2}$, valeur qu'elle atteint pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$. La fonction est donc toujours positive dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, et n'a pas d'autre racine que celle qui a été signalée.

Faisons $\alpha = \frac{2\pi}{3}$; nous aurons $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, et $f(\alpha) = \frac{3 \times 27}{4} - \frac{32\pi^3}{27}$; comme $\pi^3 > 27$, cette valeur est sûrement négative, et la racine est comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{2\pi}{3}$. A partir de ce moment, on resserrera l'intervalle par tâtonnements, puis, on appliquera la méthode des parties proportionnelles ou celle de Newton, ou, les deux.

PHYSIQUE ET CHIMIE

École centrale, concours normal de 1919.

2313. — *Deux points* A *et* B, *dans le vide, sont séparés par une lame de verre à faces parallèles d'épaisseur e; leurs distances aux faces sont respectivement* AP $= a$ *et* BQ $= b$; *la distance* PQ$_1$ *des pieds des perpendiculaires* AP *et* BQ$_1$ *est égale à d.*



Écrire l'équation qui fait connaître la distance PI $= x$ *à laquelle un rayon de lumière monochromatique, pour lequel l'indice du verre est* N, *et qui passe par les deux points donnés* A *et* B, *coupe, en partant du point* A, *la première face de la lame.*

Écrire cette équation dans le cas où le point B *vient sur la seconde face de la lame, et, sachant que la lumière passe de* A *à* B *dans le temps minimum, déterminer la relation qui existe entre les vitesses* V *et* V' *de la lumière dans le vide et dans le verre, d'une part, et les angles* α *et* β, *d'incidence et de réfraction au point* I, *d'autre part.*

La loi de Descartes, appliquée au point I, donne

$$\sin\alpha = N \sin\beta.$$

Évaluons ces lignes trigonométriques en fonction de x :

$$\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \qquad \sin\beta = \frac{d - x - I_1Q}{\sqrt{e^2 + (d - x - I_1Q)^2}}.$$

AI et I_1B étant parallèles, on a

$$\frac{I_1Q}{x} = \frac{b}{a} \qquad \text{d'où} \qquad \sin\beta = \frac{ad - (a + b)x}{\sqrt{a^2e^2 + [ad - (a + b)x]^2}}$$

et l'équation demandée peut s'écrire

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = N \frac{ad - (a + b)x}{\sqrt{a^2e^2 + [ad - (a + b)x]^2}}.$$

Si le point B vient sur la seconde face, b s'annule et l'équation devient

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = N \frac{d - x}{\sqrt{e^2 + (d - x)^2}}.$$

Dans ce cas, la durée de la propagation de la lumière suivant le rayon lumineux est représentée par

$$\frac{AI}{V} + \frac{IB}{V'} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{V} + \frac{\sqrt{e^2 + (d - x)^2}}{V'}.$$

Cette durée de propagation étant, par hypothèse, minimum, la dérivée de cette expression par rapport à x doit être nulle, ce qui donne

$$\frac{1}{V}\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{V'}\frac{d - x}{\sqrt{e^2 + (d - x)^2}} = 0$$

ou

$$\frac{\sin\alpha}{V} = \frac{\sin\beta}{V'}.$$

TOPIN, à Grandvilliers.

Bonnes solutions de MM. Yves Bouthillier, école centrale, et Ch. Pace, enseigne de vaisseau.

2314. — *1re opération : Un litre d'oxyde azotique se combine à un volume V_1 d'oxygène pour former de l'anhydride azoteux que l'acide sulfurique en excès absorbe ensuite en produisant du sulfate acide de nitrosyle.*

Formulez les réactions et calculez V_1.

2e opération : Un litre d'oxyde azotique se combine à un volume V_2 d'oxygène pour former du peroxyde d'azote que l'acide sulfurique en excès absorbe ensuite en produisant du sulfate acide de nitrosyle et de l'acide azotique.

Formulez les réactions et calculez V_2.

3e opération : Le liquide obtenu dans la première opération décolore une solution de permanganate de potassium dont le pouvoir oxydant équivaudrait à un demi-litre d'oxygène.

Formulez la réaction et expliquez le résultat numérique.

4e opération : Le liquide obtenu dans la deuxième opération, traité par du mercure à froid, dégage un litre d'oxyde azotique.

Formulez les réactions et expliquez le résultat numérique.

1° Les réactions se formulent

$$2AzO + O = Az^2O^3,$$

$$2SO^4H^2 + Az^2O^3 = H^2O + 2SO^4HAzO.$$

La première équation montre que le volume d'oxygène est le quart du volume d'oxyde azotique : $V_1 = \frac{1}{4}$ litre.

2° Les réactions se formulent

$$2AzO + O^2 = 2AzO^2,$$
$$SO^4H^2 + 2AzO^2 = SO^4HAzO + AzO^3H.$$

La première équation montre que le volume d'oxygène est la moitié du volume d'oxyde azotique : $V_2 = \frac{1}{2}$ litre.

3° Le sulfate de nitrosyle décolore le permanganate par l'acide azoteux auquel il équivaut et qui se trouve transformé en acide azotique. Chaque atome d'azote fixe alors un atome d'oxygène et 2 molécules de permanganate transforment ainsi 5 molécules d'acide azoteux suivant l'équation

$$5SO^4HAzO + 2MnO^4K + 2H^2O = 2SO^4Mn + 2SO^4KH + SO^4H^2 + 5AzO^3H.$$

L'anhydride Az^2O^3, pour se changer en Az^2O^5, exige O^2, donc un volume d'oxygène moitié moindre que le volume de l'oxyde azotique primitif, ce qui fait bien un demi-litre.

4° L'oxyde azotique produit dans la quatrième opération provient de la réduction, par le mercure, de l'acide azotique libre et de l'acide azoteux équivalent au sulfate de nitrosyle. Or AzO^3H équivaut à $\frac{1}{2}Az^2O^5$ qui devra être réduit par $\frac{3}{2}Hg$ et SO^4HAzO équivaut à $\frac{1}{2}Az^2O^3$ qui sera réduit par $\frac{1}{2}Hg$. Il se formera donc $2HgO$ qui passera finalement à l'état de sulfate, le tout suivant l'équation

$$SO^4H^2 + SO^4HAzO + AzO^3H + 2Hg = 2SO^4Hg + 2AzO + 2H^2O.$$

Tout l'oxyde azotique primitif se trouve ainsi régénéré et l'on retrouve le volume initial d'un litre.

Remarquons enfin que, dans la dernière opération, le mercure ne doit pas être attaqué, à froid, par l'excès d'acide sulfurique.

YVES BOUTHILLIER, école centrale.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1914)

ÉCOLE CENTRALE (*Suite.*)

10199. — Mener à la quadrique $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y = 0$ un plan tangent perpendiculaire à la droite

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-4}.$$

— **200.** — Mener à la quadrique $xy - z = 0$ un plan tangent perpendiculaire à la droite $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$.

— **201.** — Mener à la quadrique $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ une normale perpendiculaire au plan $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$.

— **202.** — Mener au cône $x^2 + xy + yz = 0$ un plan tangent passant par le point (1, 3, 5).

— **203.** — Mener du point (x_0, y_0, z_0) un plan tangent à la surface $x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$.

204. — Cône de sommet (x_0, y_0, z_0) circonscrit à la surface $x^2 + 4y^2 - z^2 - a^2 = 0$.

— **205.** — Équation d'un cylindre circonscrit à la quadrique $xy - pz = 0$, parallèlement à une direction α, β, γ.

— **206.** — Lieu des arêtes d'un dièdre droit circonscrit au cône $x^2 + y^2 + 2z^2 = 0$.

— **207.** — Lieu des points d'où on peut mener trois plans tangents rectangulaires à la quadrique $x^2 + y^2 - 2pz = 0$.

— **208.** — Génératrices rectilignes des quadriques :

$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$; $x^2 + y^2 - z^2 - a^2 = 0$; $x^2 - y^2 - z = 0$; $x^2 + y^2 - 2pz = 0$; $x^2 + \frac{y^2}{q} = 2z$.

10209. — Lieu des points d'un paraboloïde $x^2 - 2y^2 - 2pz = 0$ où les génératrices se coupent à angle droit.

— **210.** — Lieu des points dont le rapport des distances à une droite donnée et à un plan donné est constant.

— **211.** — **Lieu des points de l'espace équidistants de deux droites données.**

— **212.** — Surface engendrée par une droite qui s'appuie sur trois droites fixes non situées deux à deux dans un même plan.

— **213.** — Lieu des droites s'appuyant sur trois droites fixes parallèles à un même plan.

— **214.** — Surface engendrée par une droite mobile parallèle à un plan fixe et s'appuyant sur deux droites données.

— **215.** — Lieu des normales à la quadrique $x^2 - y^2 - 2pz = 0$, en tous les points de la génératrice

$$x - y = 0, \qquad z = 0.$$

— **216.** — Contour apparent sur le plan xOy d'une surface $f(x, y, z) = 0$.

Mécanique.

— **217.** — Condition nécessaire et suffisante pour que le moment résultant d'un système de vecteurs soit indépendant du centre de réduction.

— **218.** — Composition des couples.

— **219.** — Discuter le mouvement rectiligne $x = 8t - t^2$.

— **220.** — Mouvements rectilignes définis par les équations : 1° $v^2 = a^2 - x^2$; 2° $v^2 = x^2 - a^2$.

— **221.** — Étudier le mouvement $x = a \operatorname{ch} \omega t$, $y = b \operatorname{sh} \omega t$.

— **222.** — Composer les deux mouvements $x = a \cos^2 \omega t$, $y = a \sin^2 \omega t$.

— **223.** — Quand la distance de deux points reste invariable, les vitesses des deux points ont même projection sur la droite qui les joint.

— **224.** — Soit un axe $x = y = z$ et un point A, qui, à l'instant t a pour coordonnées 2, 3, 4. Ce point tourne autour de l'axe avec une vitesse angulaire $\omega = 4$. Calculer les projections de son accélération au temps t.

— **225.** — Soient trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz et un axe de rotation $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$. Un point M a pour coordonnées, à l'instant t, x, y, z et tourne autour de l'axe avec une vitesse angulaire égale, à l'instant t, à ω; composantes de la vitesse de M à l'instant t.

— **226.** — Étude du mouvement d'un projectile pesant lancé avec une vitesse initiale v_0. Quel est le lieu des sommets des trajectoires quand la direction de la vitesse initiale varie?

227. — Soit dans un plan vertical un cercle; à un instant donné, on lance d'un point M_0 de ce cercle un projectile avec une vitesse v_0 tangente au cercle. Étudier le mouvement du projectile et chercher le lieu à un instant t des mobiles partis de tous les points de la circonférence.

228. — Mouvement d'un projectile pesant lancé avec une vitesse initiale v_0 et soumis à une résistance proportionnelle à la vitesse.

— **229.** — Lois de Kepler. En déduire la loi de Newton.

— **230.** — Mouvement d'un point matériel libre dans le champ $X = -x$, $Y = -y$, $Z = 0$.

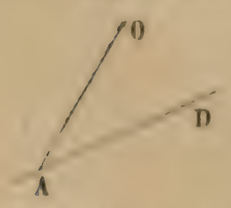
231. — Sur une ellipse rigide, un petit anneau est mobile sans frottement; il est attiré proportionnellement à la distance par les deux extrémités du grand axe; positions d'équilibre.

— **232.** — Équilibre d'un point de la courbe $y^2 - 2px = 0$ sous l'action de la force $X = y$, $Y = x$, sans frottement. L'équilibre est-il stable ou instable?

— **233.** — Étudier le mouvement d'un point pesant sur une parabole dont l'axe est vertical et dirigé vers le haut; ce point est lancé d'un point de la parabole avec une vitesse v_0.

— **234.** — Dans un plan vertical, l'axe des x est horizontal, l'axe des y est dirigé par le bas; étudier le mouvement d'un point pesant sur la cycloïde $x = a(\varphi - \sin\varphi)$, $y = a(1 - \cos\varphi)$.

— **235.** — Mouvement d'un point matériel non pesant, isolé sur un cercle poli, et attiré par un point du cercle proportionnellement à la distance.



— **236.** — Soit une droite D, un point O et une droite OA; déterminer l'inclinaison qu'il faut donner à OA pour que le temps mis par un point matériel pesant pour descendre de O en A soit minimum.

237. — **Mouvement d'un point matériel pesant sur une barre qui tourne autour d'un axe vertical**

— **238.** — Mouvement d'un point pesant assujetti à rester sur une hélice $x = a \cos z$, $y = b \sin z$, $z = kz$, et soumis à une réaction tangentielle constante.

239. — Équilibre d'un point pesant attiré par un centre fixe, sur un plan horizontal rugueux, proportionnellement à la distance.

— **240.** — Équilibre sur un plan incliné rugueux d'un point matériel pesant, sollicité par une force constante dirigée suivant la ligne de plus grande pente du plan.

10241. — Équilibre d'un point matériel non pesant sur un cercle rugueux. Ce point est soumis à une force centrale issue d'un centre fixe situé dans le plan du cercle.

— **242.** — Équilibre d'un point pesant sur une hélice circulaire à axe vertical, avec frottement.

— **243.** — Équilibre d'un point pesant sur une sphère rugueuse.

— **244.** — Équilibre d'un point pesant à l'intérieur d'un cône de révolution dont l'axe est incliné d'un angle α sur le plan horizontal, avec frottement.

— **245.** — Mouvement d'un point pesant lancé sur un plan horizontal rugueux.

— **246.** — Mouvement, sur un plan horizontal rugueux, d'un point pesant soumis à une force horizontale constante en grandeur, direction et sens.

— **247.** — Influence de l'altitude sur le mouvement en chute libre d'un point pesant.

— **248.** — Influence de la rotation de la Terre sur l'intensité de la pesanteur.

— **249.** — Poulie mobile, étude de l'équilibre.

— **250.** — Poulie fixe avec frottement : 1° cordons parallèles; 2° cordons rectangulaires.

— **251.** — Centre de gravité de l'aire d'une zone sphérique.

Géométrie et Géométrie descriptive.

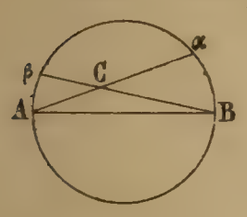
(MM. Malloizel et Tresse.)

Géométrie.

— **252.** — On donne deux circonférences et un segment de droite AB. Placer un segment de droite équipollent à AB et s'appuyant sur les deux circonférences données.

— **253.** — On donne deux cercles; tracer une sécante ABCD, telle que la corde AB soit vue du centre O du premier sous un angle donné α, et la corde CD, du centre O' du second sous un autre angle donné β.

— **254.** — On donne une circonférence O. Tracer deux circonférences de rayons donnés r et r', tangentes entre elles extérieurement et tangentes à la circonférence donnée, sachant que l'une de leurs tangentes communes est parallèle à une direction donnée δ.



— **255.** — On donne une circonférence de diamètre AB, et on mène deux sécantes quelconques $A\alpha$, $B\beta$ se coupant en C. Démontrer que

$$AC.A\alpha + BC.B\beta = C^{te}.$$

— **256.** — On donne une circonférence et un point fixe P. Ce point est le sommet d'un angle droit APB; lieu du milieu I de la corde AB.

— **257.** — On donne deux droites; sur la première trois points a, b, c; sur la seconde quatre points a', b', c', d'. Construire le point d de la première droite, tel que $(abcd) = (a'b'c'd')$.

— **258.** — On considère deux circonférences orthogonales O, O'; on mène par le centre O de la première une sécante $pp'qq'$. Démontrer que $(pqp'q') = -1$.

— **259.** — On donne deux circonférences de même rayon dans un plan; lieu des centres des circonférences tangentes aux deux circonférences données.

— **260.** — Construire un triangle connaissant la base BC, la médiane CD et la surface. Mêmes données, sauf la médiane CD, que l'on remplace par la médiane AE.

— **261.** — Construire un triangle ABC, connaissant l'angle A, la hauteur issue de A et le périmètre. Remplacer la hauteur issue de A par la hauteur issue de B.

— **262.** — Construire un triangle connaissant l'angle A, la bissectrice de cet angle et le périmètre. Condition de possibilité.

— **263.** — Construire un triangle connaissant le côté a, l'angle B et la différence $b - c$.

— **264.** — Faire passer un cercle par un point donné M et par les points de rencontre de deux cercles donnés.

— **265.** — Construire une circonférence tangente à une droite et passant par deux points; tangente à deux droites et passant par un point.

266. — Faire passer par un point A des cercles tangents à deux cercles donnés (les cercles donnés ont même centre et le point A est pris dans la région comprise entre les deux circonférences).

— **267.** — Tracer une circonférence passant par un point A et tangente à deux circonférences d'égal rayon.

— **268.** — Lieu des centres des circonférences orthogonales à deux circonférences données.

— **269.** — Construire une circonférence O, tangente en A à la droite D et orthogonale à la circonférence ω.

— **270.** — Déterminer une circonférence tangente à deux droites et orthogonale à une circonférence donnée; tangente à une droite et orthogonale à deux circonférences données.

— **271.** — Mener par un point donné A une droite rencontrant deux circonférences sous un même angle.

10 272. — Lieu des centres des cercles passant par un point S et coupant une droite sous un angle α. Remplacer la droite par une circonférence.

— **273.** — Inversion : définition; propriétés; figures inverses de deux droites.

— **274.** — Mener par une droite A un plan faisant avec deux droites D, Δ des angles égaux.

— **275.** — Mener par un point de l'espace une droite qui soit à une distance d d'une droite D, et à une distance δ d'une autre droite Δ.

— **276.** — Mener par un point de l'espace une droite qui soit à une distance α d'un point fixe A et à une distance β d'une droite fixe D.

— **277.** — Sur deux arêtes d'un trièdre, on porte des longueurs SA, SB. Par la droite AB, on fait passer un plan variable rencontrant la troisième arête en un point variable C; lieu du centre de gravité du triangle ABC.

— **278.** — On considère deux plans se coupant suivant une droite xy; montrer que tous les plans menés par un point O de xy et également inclinés sur P et P' passent par l'une ou l'autre de deux droites fixes.

— **279.** — On considère un tétraèdre ABCD; on mène le plan bissecteur du dièdre BC, qui coupe l'arête AD en I; démontrer que $\frac{IA}{ID} = \frac{\text{aire ABC}}{\text{aire DBC}}$.

— **280.** — Construire un tétraèdre connaissant la base ABC et les hauteurs issues des sommets A, B, C.

— **281.** — Construire un tétraèdre connaissant les côtés de la base ABC, les arêtes BD et CD et la hauteur AH.

— **282.** — Lieu des centres des sphères inscrites dans un trièdre. Déterminer celles qui passent par un point donné. Faire l'épure en plaçant une face sab dans le plan horizontal; on donne le sommet opposé par sa projection cotée.

— **283.** — Points communs à trois sphères. Trouver une sphère passant par deux points A et B et tangente à deux sphères concentriques.

— **284.** — Tracer une sphère de rayon donné passant par deux points A et B et tangente à une sphère donnée.

— **285.** — Tracer une sphère de rayon donné, tangente à un plan P, et passant par deux points donnés A et B.

— **286.** — Construire une sphère tangente à deux droites (dans un même plan) et passant par deux points donnés.

— **287.** — Construire une sphère tangente à trois droites données A, B, C situées dans un même plan, et tangente à une quatrième droite D de l'espace.

— **288.** — On donne dans un plan une circonférence ω et dans l'espace trois points A, B, C. Faire passer par ces trois points une sphère coupant le plan de la circonférence ω suivant une circonférence orthogonale à la première.

— **289.** — On donne une sphère solide; déterminer son rayon.

— **290.** — Construire une ellipse connaissant trois tangentes et les points de contact de deux de ces tangentes.

— **291.** — Lieu du second foyer des coniques passant par un point M, tangentes à une droite Δ et ayant comme premier foyer le point F.

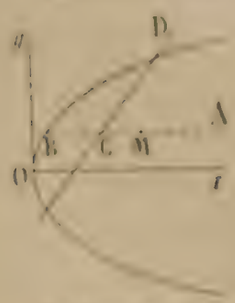
(*A suivre.*)

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

Concours de 1918.

Mathématiques.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE. — **2481.** On donne la parabole $y^2 - 2px = 0$



et la droite D $\qquad ax + by - 1 = 0.$

On construit le diamètre conjugué A de la direction de cordes parallèles à D. Cette droite A coupe la parabole en un point B (x_0, y_0) et la droite D en un point C (x_1, y_1).

A. On demande de déterminer :

1° les coordonnées du point M situé sur la droite A et tel que l'on ait $\frac{MB}{MC} = -\frac{1}{\mu}$;

2° le lieu géométrique de M lorsque la droite D passe par un point fixe.

Ce lieu est une parabole dont on calculera le paramètre ainsi que les coordonnées du sommet;

3° Le lieu géométrique de M lorsque la droite D enveloppe la parabole ayant pour équation

$$(y-b)^2 = 2f(x-a).$$

B) Résoudre le même problème dans le cas où M représente le centre de gravité de l'aire comprise entre la parabole et la droite D.

ALGÈBRE. — Démontrer que la fonction de t

$$f(t) = \frac{e^{-2at} - e^{at}\cos bt + 3\frac{a}{b}e^{at}\sin bt}{9a^2+b^2}$$

vérifie les identités

$$[f'(t)]^2 - f(t)f''(t) \equiv f(-t),$$
$$f'(t)f''(t) - f(t)f'''(t) \equiv -f'(-t).$$

Calcul trigonométrique (tables à cinq décimales).

On donne $x = 2\pi - \frac{\pi}{8}$, $n = 0.10665459$.

Calculer les six quantités, e^{2nx}, e^{-2nx}, $e^{nx}\cos x$, $e^{-nx}\cos x$, $\frac{1+3n^2}{2n}e^{nx}\sin x$, $\frac{1+3n^2}{2n}e^{-nx}\sin x$.

En conclure les valeurs numériques des trois fonctions

$$f(n, x), \qquad f(-n, x), \qquad F(n, x),$$

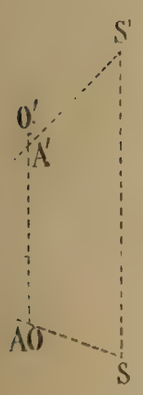
sachant que l'on a

$$f(n, x) = e^{nx} - e^{-nx}\cos x + \frac{1+3n^2}{2n}e^{-nx}\sin x,$$
$$F(n, x) = f(n, x) - f(-n, x).$$

Est-il possible de déterminer avec certitude le signe de $F(n, x)$?

(On a $\pi = 3,14159$, $\log\log e = \bar{1},63778$.)

Épure.



INTERSECTION D'UN CÔNE DE RÉVOLUTION ET D'UNE SPHÈRE. — *Données* : Points A et O confondus. Longueur $AA' = 20^{cm}$. Longueur $A'O' = 1^{cm}$. Point S' à 10^{cm} au-dessus de A' et à 10^{cm} à droite de A'. Point S dans un plan de front situé à 4^{cm} en avant de B.

Le cône C a pour sommet le point (S, S'); il est circonscrit à une sphère de centre (A, A') et dont le rayon est égal à 8^{cm}.

La sphère Σ a son centre en (O, O'); son rayon est de 8^{cm}.

Représenter le solide commun aux deux surfaces C et Σ. Construire un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point.

Physique.

I. — Mesure des indices de réfraction par la méthode de la réflexion totale.

II. — Deux récipients R_1 et R_2 de même volume $V = 1^{dm3}$ sont remplis d'air sec à la température ambiante $t = 20°$ centigrades et sous une pression $H = 1^{kg},21$ par cm^2. Ils sont mis en communication par un tube long et fin dont on négligera le volume. Ce tube peut être fermé par un robinet r.

On effectue les opérations suivantes :

1° Ayant fermé r, on introduit dans le premier récipient, R_1, une petite quantité d'eau $p = 50^{mg}$. On porte le second récipient, R_2, à une température $t' = 5°$;

2° R_2 restant maintenu à la température t', on ouvre le robinet r; on attend que l'équilibre s'établisse, puis on ferme r;

3° On laisse R_2 revenir à la température ambiante t.

On demande de calculer :

a, la masse de l'eau condensée qui se trouve dans le récipient R_2 à la fin de l'expérience ;

b, la pression P dans le récipient R_2 à la fin de l'expérience.

On négligera le volume de l'eau qui n'est pas à l'état de vapeur ainsi que les variations de volume des récipients. On admettra que l'air et la vapeur d'eau suivent les lois de Mariotte et de Gay-Lussac.

On désignera par :

s et s' les tensions maxima de vapeur d'eau aux températures t et t',

$d = 0,62$ la densité de la vapeur d'eau par rapport à l'air,

$a_0 = 1^{gr},293$ la masse à 0° et 760^{mm} de mercure de 1^{m3} d'air.

Application numérique. — $t = 17^{cm},4$, $t' = 6^{cm},5$, en colonne de mercure à 0°, densité du mercure à 0° : 13,6 ; accélération de la pesanteur : $g = 9,806$.

Calculer a en milligrammes et P en dynes par mm² à une unité près.

Chimie

1° On a un sel hydraté cristallisé qui, traité par l'acide chlorhydrique, donne un précipité blanc et dégage une forte odeur d'anhydride sulfureux. On dissout 1^g de ce sel dans l'eau, on ajoute quelques gouttes d'empois d'amidon, et l'on étend à 100^{cm3}. Cela constitue la solution A.

D'autre part, on pèse 1^g d'iode pur, qu'on fait dissoudre dans une solution d'iodure de potassium. On étend à 100^{cm3}. Cela constitue la solution B.

On prend 10^{cm3} de la solution A, et l'on y verse la solution B jusqu'à observer une coloration persistante. Il faut pour cela ajouter 5^{cm3},4 de la solution B.

Trouver la formule chimique du sel hydraté.

2° Une substance contient une certaine proportion de bioxyde de manganèse que l'on se propose de doser. On en pèse 1^g, que l'on traite par l'acide chlorhydrique concentré en chauffant légèrement. On fait passer le gaz qui se dégage dans une solution d'iodure de potassium en excès. Le dégagement terminé, on étend cette solution à 100^{cm3}. Puis on verse cette solution peu à peu dans 10^{cm3} de la solution A, jusqu'à coloration persistante. La coloration s'obtient lorsqu'on a versé 52^{cm3},4.

Trouver la proportion de bioxyde de manganèse contenue dans la substance donnée.

3° L'erreur possible de lecture étant de $\frac{1}{20}$ de cm³, quelle est l'approximation obtenue dans les deux opérations précédentes? **On négligera les autres causes d'erreur.**

Poids atomiques du manganèse : 55 ; de l'iode : 127, du sodium : 23.

QUESTION PROPOSÉE

2482 — On considère un cercle fixe O, et un diamètre fixe de ce cercle, AB. Par le centre O, on mène une droite variable, zz, et de l'extrémité A, du diamètre fixe AB, on abaisse une perpendiculaire, AC, sur zz, qui rencontre le cercle O en C.

Trouver le lieu des points d'intersection de la droite zz avec le cercle variable ayant pour centre le point B et pour rayon BC.

H. G.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

Coulommiers — Imp. Paul BRODARD

31e Année. Janvier 1921. N° 4.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LES MOMENTS DE VECTEURS

par M. **Rech**, professeur de mathématiques élémentaires au lycée Pasteur.

I. — Le petit ouvrage de cinématique théorique de M. Lacaze, publié par la librairie Gauthier-Villars, contient des choses excellentes; il débute, en particulier, par la théorie des moments de vecteurs qu'il présente sous une forme simple, mais où la géométrie analytique laisse bien peu de place à la géométrie pure.

Je me propose d'exposer ici les principes de la méthode purement géométrique que je donne dans mon enseignement depuis plus de vingt ans.

Le principe de la méthode consiste à mettre en évidence les transformations géométriques simples permettant de passer d'un vecteur à son moment par rapport à un point; toutes transformations qui conduisent d'un vecteur à un autre et pour chacune desquelles une somme géométrique reste somme géométrique : ces transformations sont un déplacement (rotation), une homothétie, une projection cylindrique (orthogonale). Toute la théorie découle de là.

Rappelons aussi, en passant, que, si on remplace un axe de rotation par un axe parallèle, un plan de projection par un plan parallèle ou un centre d'homothétie par un autre en gardant même rapport, un vecteur est remplacé par un vecteur équipollent, toutes propriétés importantes que l'on doit connaître.

II. **Premier procédé** (*fig.* 1). — Soit AP un vecteur, OG son moment par rapport à O. Menons par O l'axe (u) parallèle à AP et le plan Q perpendiculaire. Nous désignerons par p la mesure algébrique

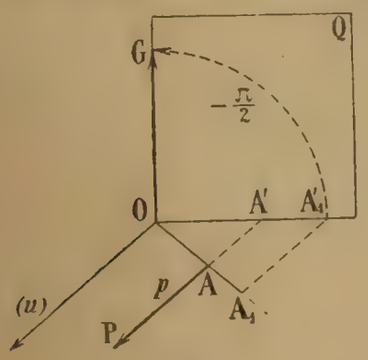


Fig. 1.

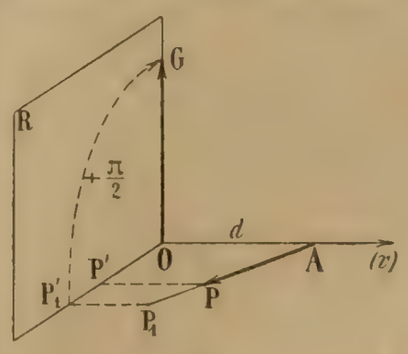


Fig. 2.

de AP sur (u). Soit A′ le point où AP perce le plan Q; prenons $(OA'_1) = p.(OA')$; la longueur de OA'_1 est égale à celle de OG et on peut amener OA'_1 sur OG par la rotation $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ autour de (u); donc, pour obtenir OG, on peut *partir de* OA et effectuer les trois transformations géométriques : 1° projec-

tion orthogonale sur le plan Q perpendiculaire à AP par O; 2° homothétie de centre O, de rapport p, mesure algébrique de AP sur l'axe (u) perpendiculaire à Q; 3° rotation de $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ autour de (u).

Second procédé (*fig.* 2). — Soit AP un vecteur, OG son moment par rapport à O. Prenons sur OA l'axe (v) et menons par O le plan R perpendiculaire à OA; projetons orthogonalement P en P' sur ce plan, et prenons $(OP_1) = d.(OP')$, d étant la mesure algébrique de OA sur l'axe (v); la longueur OP_1 est égale à celle de OG et on peut amener OP_1 sur OG par une rotation de $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$ autour de (v); donc, pour obtenir OG, on peut *partir de* AP et effectuer les trois transformations géométriques : 1° projection orthogonale sur le plan R perpendiculaire à OA par O; 2° homothétie de centre O, de rapport d, mesure algébrique de OA sur l'axe (v); 3° rotation de $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$ autour de (v).

Remarque. — Dans chacun des deux procédés, on peut permuter les trois transformations.

III. **Relation entre les moments d'un vecteur par rapport à deux points de l'espace** (*fig.* 3). — Soient AP le vecteur, O et ω les deux points. Menons $(OP') = (AP)$, puis, par ω, (u) parallèle au vecteur et Q perpendiculaire; on a

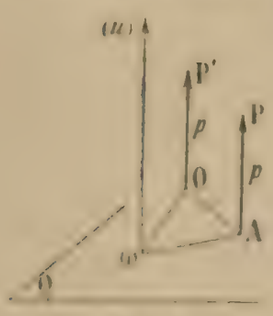


Fig. 3.

$$(\omega A) = (\omega O) + (OA).$$

Effectuons les trois transformations (premier procédé); (ωA) conduit au $M^{\omega}(AP)$, (ωO) au $M^{\omega}(OP')$, (OA) à un vecteur équipollent à $M^{\omega}_{o}(AP)$; pour avoir le $M^{\omega}_{o}(AP)$, il faudrait prendre l'axe et le plan par le point O; on n'a fait que déplacer ces éléments parallèlement à eux-mêmes, donc

$$M^{\omega}_{o}(AP) = M^{\omega}_{o}(AP) + M^{\omega}(OP').$$

IV. **Théorème de Varignon** (*fig.* 4). — Soient P_1, P_2, ..., P_n des vecteurs concourants; nous pouvons supposer l'origine de chacun au point de concours A. Soit P la résultante :

Fig. 4.

$$(P) = (P_1) + (P_2) + \ldots + (P_n).$$

Menons l'axe (v) suivant OA, et le plan R perpendiculaire par O. Effectuons les trois transformations (deuxième procédé); on a

$$M^{v}_{o}(P) = M^{v}_{o}(P_1) + M^{v}_{o}(P_2) + \ldots + M^{v}_{o}(P_n) = M^{v}_{o}(S),$$

(S) étant le système.

Relation entre les moments d'un système de vecteurs par rapport à deux points de l'espace. — Soient P_1, P_2, ..., P_n les vecteurs; P'_1, P'_2, ..., P'_n les vecteurs équipollents par O, P' la résultante; on a

$$M^{v}_{o}(P_1) = M^{v}_{o}(P_1) + M^{v}_{o}(P'_1),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$M^{v}_{o}(P_n) = M^{v}_{o}(P_n) + M^{v}_{o}(P'_n);$$

additionnant et appliquant le théorème précédent, on a

$$M^{v}_{o}(S) = M^{v}_{o}(S) + M^{v}_{o}(P').$$

Conséquence. — La condition nécessaire et suffisante pour que les moments par rapport aux différents points de l'espace soient des vecteurs équipollents est que la somme géométrique soit nulle. En particulier, le cas du *couple*.

V. **Système de vecteurs parallèles de somme géométrique non nulle** (*fig.* 5). — Soit le

système de vecteurs parallèles A_1P_1; A_2P_2; ..., A_nP_n, et un point quelconque O. Menons par O un axe parallèle aux vecteurs et le plan Q perpendiculaire.

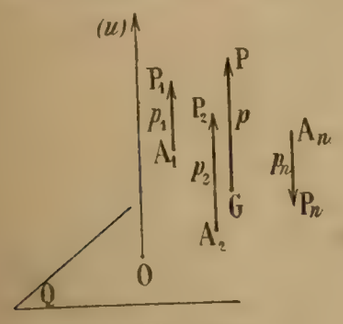


Fig. 5.

Soient $p_1, p_2, \ldots, p_n$ les mesures algébriques des vecteurs sur (u), p la mesure de la somme géométrique; on a

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n \neq 0.$$

Soit G le centre des distances proportionnelles des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ affectés des coefficients respectifs $p_1, p_2, \ldots, p_n$. G est défini par l'égalité géométrique

$$p_1(GA_1) + p_2(GA_2) + \ldots + p_n(GA_n) = 0,$$

d'où $\quad p_1(GO + OA_1) + p_2(GO + OA_2) + \ldots + p_n(GO + OA_n) = 0,$

c'est-à-dire $\quad p_1(OA_1) + p_2(OA_2) + \ldots + p_n(OA_n) = p(OG).$

Projetons orthogonalement sur le plan Q et faisons la rotation $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ autour de (u) (premier procédé, l'homothétie pour chaque vecteur étant déjà effectuée); on aura

$$M_0^t(A_1P_1) + \ldots + M_0^t(A_nP_n) = M^t(GP),$$

GP étant la somme géométrique d'origine G, c'est-à-dire

$$M_0^t(S) = M_0^t(GP);$$

G est appelé le *centre des vecteurs parallèles.*

VI. — On peut maintenant faire facilement et simplement la théorie de l'équivalence des systèmes de vecteurs.

VII. — L'application aux systèmes de forces extérieures agissant sur un corps solide en ce qui concerne l'état extérieur est immédiat.

VIII. **Moment d'un vecteur, d'un système de vecteurs par rapport à un axe** (*fig.* 6). — Soient O et ω deux points quelconques d'une droite (D), et (S) un système quelconque de vecteurs, OP′ étant la somme géométrique d'origine O. On a

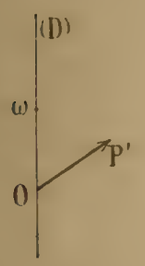


Fig. 6.

$$M_\omega(S) = M_0^t(S) + M_\omega^t(OP');$$

$M_\omega^t(OP')$ est perpendiculaire au plan $P'O\omega$, par suite à $O\omega$; sa projection sur (D) est donc nulle; par suite,

$$pj_D M_\omega^t(S) = pj_D M_0^t(S).$$

On traduit cette propriété importante par l'expression de *moment du système de vecteurs par rapport à la droite.* En choisissant un axe sur (D), le nombre mesurant cette projection est le *moment par rapport à l'axe du système de vecteurs.*

IX. — Ajoutons l'application suivante en vue de l'analytique : Soit (*fig.* 7) le vecteur $AP(x, y, z; X, Y, Z)$. Considérons la composante parallèle a Oz; elle perce xOy en $A'(x, y)$; prenons $(OA'_1) = Z(OA')$; les projections de OA'_1 sur Ox et Oy sont xZ, yZ; effectuons la rotation $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ autour de Oz (premier procédé) : on obtient yZ et $-xZ$ comme projections du nouveau vecteur sur les axes Ox, Oy [c'est la propriété

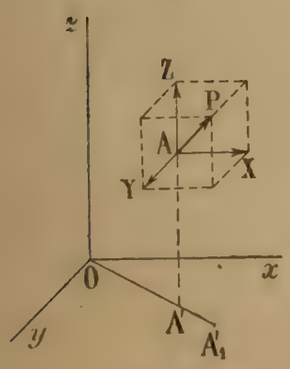


Fig. 7.

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = +\sin\alpha, \qquad \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha,$$

ou, pour les élèves ayant étudié les nombres complexes, le vecteur (a, b), tournant de φ donne le vecteur (a', b') défini par

$$a' + b'i = (a + bi)e^{i\varphi}, \qquad \text{si} \qquad \varphi = -\frac{\pi}{2}; \qquad a' + b'i = (a + bi)(-i) = b - ai].$$

Le vecteur obtenu est le moment de Z par rapport au point O. On a de la même façon, les résultats analogues pour X et Y. D'après le théorème de Varignon,

$$M_0^1(AP) = M_0^1(X) + M_0^1(Y) + M_0^1(Z).$$

Par suite, en désignant la projection de ce moment par la notation habituelle, on a

$$L = yZ - zY, \qquad M = zX - xZ, \qquad N = xY - yX.$$

Remarque de la Rédaction de la Revue. — Le sens positif de rotation dans l'espace adopté par l'auteur est le sens de gauche à droite. En Mathématiques spéciales, on prend aujourd'hui l'autre sens, le sens de rotation de la Terre autour de son axe orienté du Sud vers le Nord. Mais ceci ne modifie en rien les propriétés signalées par l'auteur.

NOTE SUR LA QUESTION 2250

(*École polytechnique*, 1914)*

par M. **Lucien Sueur**, professeur au lycée de Saint-Etienne.

On peut abréger beaucoup le calcul approché de la série $\frac{1}{n^3}$ par la simple remarque suivante : on a obtenu une borne supérieure de $(S - S_n)$ par une considération d'aires, qui en fournit tout aussi bien une borne inférieure, par un simple décalage, dans le sens positif Ox, des rectangles envisagés.

On a ainsi la double inégalité

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3} < S - S_n < \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^3},$$

ou encore

$$\frac{1}{2(n+1)^2} < S - S_n < \frac{1}{2n^2}.$$

On prendra donc $\left[S_n + \frac{1}{2(n+1)^2}\right]$ pour valeur de S, approchée par défaut avec une erreur inférieure à $\left[\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2(n+1)^2}\right]$.

Pour calculer S à $\frac{1}{10^6}$ près, il suffit donc que

$$\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2(n+1)^2} < \frac{1}{10^6}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{2n+1}{2n^2(n+1)^2} < \frac{1}{10^6},$$

ou *a fortiori*

$$\frac{2(n+1)}{2n^2(n+1)^2} < \frac{1}{10^6}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{n^2(n+1)} < \frac{1}{10^6}$$

et, encore *a fortiori*, $\frac{1}{n^3} < \frac{1}{10^6}$, ou $n^3 > 10^6$, c'est-à-dire $n \geqslant 22$.

Il suffit donc de prendre 22 termes dans la série (au lieu de 71), mais à leur somme il faut ajouter $\frac{1}{2 \times 23^2}$.

(*) Voir *Revue*, septembre 1920.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2297. — *Relativement à des axes de coordonnées rectangulaires, une surface* S *a pour équation* $x^2+y^2+\lambda z^2=R^2$ *dans laquelle* λ *et* R *sont des constantes. Une droite* D *tourne autour d'un point* P (a, b, c) *dans le plan* $z=c$. *On considère la droite* D′ *conjuguée de* D *par rapport à* S *et la perpendiculaire commune* Δ *rencontrant les droites* D *et* D′ *respectivement en* M *et* M′.

1° *Trouver les lieux géométriques de* Δ, *de* M *et de* M′.

2° *Examiner le cas particulier où* S *est une sphère.*

Il sera tenu compte des remarques et démonstrations géométriques.

(*École polytechnique, concours de* 1919.)

1° La droite D′ conjuguée de la droite D est l'intersection de tous les plans polaires des points de la droite D. Nous prendrons le point fixe P (a, b, c) et le point à l'infini sur la droite D. Les équations de la droite D sont

$$y-b=m(x-a) \qquad \text{et} \qquad z=c;$$

le point à l'infini est le point de coordonnées 1, m, 0, 0. Les deux plans que nous avons mentionnés sont donc

$$ax+by+c\lambda z-R^2=0,$$
$$x+my=0;$$

le premier est fixe; la droite D′ se meut dans un plan fixe; le second passe par Oz et est perpendiculaire à la droite D. Cette remarque nous servira bientôt.

Pour obtenir les équations de la droite Δ, nous nous appuierons sur ce fait que les deux droites D et D′ sont orthogonales, et que les équations de la droite Δ sont données par deux plans menés respectivement par D et D′ perpendiculairement aux droites D′ et D.

Le second de ces plans est le plan $x+my=0$; le premier est un plan mené par D perpendiculairement à D′; son équation est

$$y-b-m(x-a)+\mu(z-c)=0,$$

et μ sera déterminé en écrivant que sa normale est parallèle à la droite D′. Or les paramètres de celle-ci sont fournis par une solution non nulle des équations

$$ax+by+c\lambda z=0, \qquad x+my=0;$$

une de ces solutions est $-m$, 1, $\dfrac{am-b}{c\lambda}$; nous devons donc avoir

$$\frac{-m}{-m}=\frac{1}{1}=\frac{\mu}{\dfrac{am-b}{c\lambda}};$$

la valeur de μ est $\mu=\dfrac{am-b}{c\lambda}$.

Les deux plans qui déterminent Δ sont

$$y-b-m(x-a)+\frac{am-b}{c\lambda}(z-c)=0,$$
$$x+my=0;$$

nous voyons de suite que cette droite coupe l'axe des z au point fixe de cote $z=c-c\lambda$.

Pour avoir le lieu engendré par cette droite, il faut éliminer m entre les deux équations précédentes; ceci donne

$$(1) \qquad c\lambda[x(x-a)+y(y-b)]-(ax+by)(z-c)=0.$$

Ce lieu est une quadrique réglée; c'est un cône, puisque la droite Δ passe par un point fixe.

Pour le vérifier directement, il suffit de calculer les coordonnées du centre et de vérifier que ce point est sur la surface; nous avons ainsi les équations

$$c\lambda(2x-a)-a(z-c)=0,$$
$$c\lambda(2y-b)-b(z-c)=0,$$
$$ax+by=0;$$

ces équations donnent de suite $z-c+c\lambda=0$, $z=c(1-\lambda)$, puis $x=0$, $y=0$; et il est facile de voir que les coordonnées de ce point vérifient l'équation de la surface. Ce point est le sommet du cône.

Les plans $z=C^{te}$ coupent le cône suivant des cercles; le plan $z=0$ est un plan cyclique.

Le lieu du point M est évidemment la section du cône par le plan $z=c$; c'est le cercle

$$x(x-a)+y(y-b)=0,$$
$$z-c=0.$$

Le lieu du point M′ est la section de ce même cône par le plan $ax+by+c\lambda z-R^2=0$. En portant $ax+by=R^2-c\lambda z$ dans l'équation du cône, nous avons

$$c\lambda[x(x-a)+y(y-b)]+(c\lambda z-R^2)(z-c)=0;$$

cette équation représente une sphère, et le lieu du point M′ est encore un cercle. Le plan

$$ax+by+c\lambda z=0$$

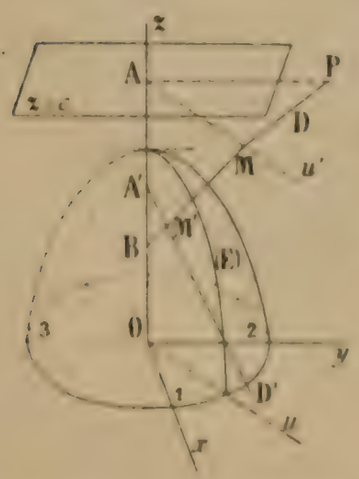
est le second plan cyclique du cône.

2° Si la surface S est une sphère, $\lambda=1$, et l'équation du cône devient

$$c(x^2+y^2)-z(ax+by)=0.$$

Le sommet est à l'origine. Les autres résultats ne sont pas vraiment changés.

Solution géométrique. — La quadrique est une quadrique de révolution autour de Oz; nous la supposerons quelconque et nous prendrons comme méridienne une ellipse ayant pour axe Oz et pour centre le point O. Plaçons le point P dans le plan méridien Oyz, ce qui n'a aucune importance; menons par ce point une droite D, PM, quelconque dans le plan $z=c$, et figurons le plan méridien zOu perpendiculaire à PM et l'ellipse (E) de ce plan méridien; soit M le pied de PM sur le plan zOu. La droite D′ est la polaire du point M par rapport à l'ellipse (E); elle rencontre Oz en un point fixe A′ pôle du plan $z=c$ par rapport à l'ellipsoïde. La perpendiculaire abaissée du point M sur la droite D′ est la droite Δ; elle rencontre Oz en un point fixe B. En effet, les deux droites D′ et Δ sont deux droites conjuguées rectangulaires de l'ellipse (E); les deux points A′ et B sont donc conjugués harmoniques par rapport aux deux foyers de l'ellipse situés sur Oz; le point A′ est fixe, donc le point B est fixe aussi. Il est visible enfin que le lieu du point M est le cercle décrit sur AP comme diamètre dans le plan $z=c$. Le lieu de Δ est donc le cône oblique à base circulaire défini par ce cercle et le sommet B.



Quant au lieu de M′, il est dans le plan polaire du point P par rapport à l'ellipsoïde; c'est un plan perpendiculaire au plan zOy dont la trace est la polaire de P par rapport à l'ellipse principale. C'est bien, par rapport au cône, le plan antiparallèle du plan $z=c$. La section du cône par ce plan est un cercle. — Le cas de la sphère est évident.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

2317. — *Par un point* O, *situé à* 3^{cm} *au-dessus du plan horizontal de projection et à* 9^{cm} *en avant du plan vertical, passe une droite de front* Δ, *qui fait un angle de* 45° *avec la verticale et va en descendant de gauche à droite. Une droite de front* Γ *fait un angle de* 30° *avec* Δ. *La perpendiculaire commune aux droites* Γ *et* Δ *passe par le point* O *et a pour longueur* 3^{cm}. *La droite* Γ, *en tournant autour de* Δ, *engendre un hyperboloïde* H.

Par le point O, *on élève à* Δ, *dans le plan de front, une perpendiculaire* OS *de longueur égale à* 3^{cm}, *au-dessous de* O.

Une droite passant par S *et faisant un angle de* 30° *avec* SO *engendre un cône* C *en tournant autour de* SO.

On limite l'hyperboloïde H *par le plan horizontal de projection et par un plan de profil situé à* 3^{cm} *à gauche du point* O. *Représenter ce qui reste de ce solide lorsqu'on enlève la partie intérieure au cône* C.

(*École polytechnique*, 1919. *Concours spécial.*)

L'hyperboloïde et le cône occupent des positions particulières qui donnent lieu à quelques remarques essentielles.

Le cône S et le cône asymptote de l'hyperboloïde sont égaux, d'après les données, et leurs génératrices de contour apparent vertical sont rectangulaires, ainsi que leurs axes, inclinés à 45°. Il en résulte que ces deux cônes sont coupés par les plans horizontaux et de profil suivant des coniques homothétiques, ce qui permet déjà de constater que la projection verticale de la courbe à représenter est une hyperbole équilatère, dont une asymptote est horizontale et l'autre verticale.

Nous construirons les contours apparents horizontaux des deux cônes au moyen de deux sphères inscrites, ayant leurs centres projetés en τ' et θ' sur le grand axe de la feuille. L'égalité des angles générateurs et la symétrie d'inclinaison des axes sur un plan horizontal mettent en évidence l'identité des projections des deux cônes. D'ailleurs les génératrices dont il s'agit sont inclinées à 45° sur la direction de xy, comme l'indiquent les rayons des sphères, évalués d'après la projection verticale. Le contour apparent horizontal de l'hyperboloïde est donc une hyperbole équilatère, l'axe transverse étant égal au diamètre du cercle de gorge.

Le plan horizontal de projection ne coupe qu'une nappe du cône asymptote; il détermine donc dans l'hyperboloïde une ellipse dont le centre (ω, ω') est donné par le diamètre conjugué des plans horizontaux. Nous le construisons à l'aide du cône asymptote, et nous constatons qu'il fait avec la verticale un angle dont la tangente est égale à 2. On a, en effet,

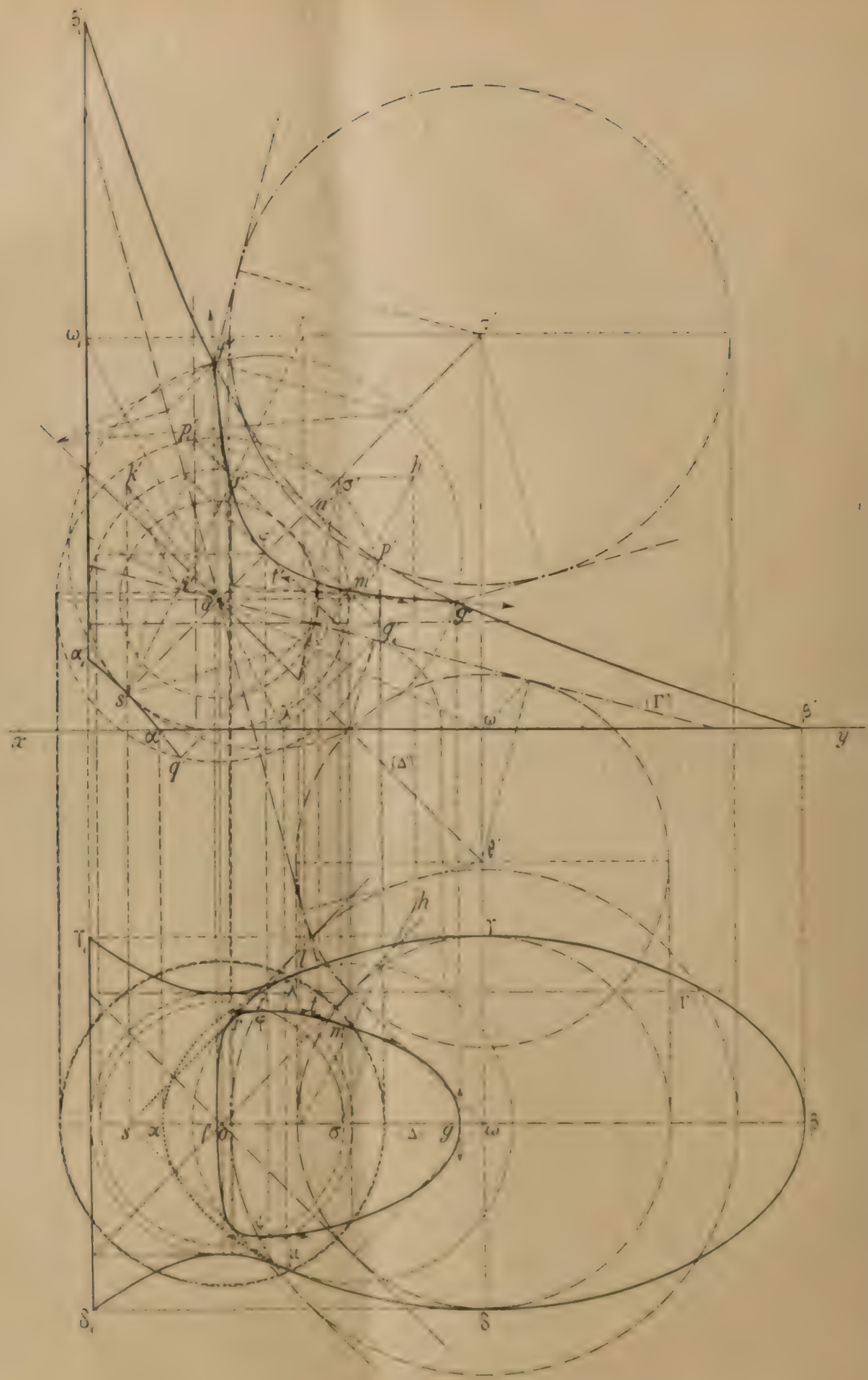
$$\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}+\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}+1}{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=2.$$

La ligne de rappel (ω, ω') coïncide ainsi avec le grand axe de la feuille.

La droite de bout du point (ω, ω') rencontre l'hyperboloïde en deux points qui limitent le petit axe $\gamma\delta$ de l'ellipse située dans le plan horizontal. Inscrivons une sphère suivant le parallèle correspondant; elle sera coupée par le plan horizontal suivant le cercle bitangent à l'ellipse aux sommets cherchés. Le centre de cette sphère sera à la rencontre de l'axe et du plan perpendiculaire à la génératrice principale au point où elle rencontre le parallèle. On constate la coïncidence du cercle trouvé et du contour apparent de la sphère inscrite dans le cône asymptote. Car si on le construit par l'intermédiaire du cercle frontal de la sphère qui rencontre la génératrice principale, la projection verticale de celui-ci ne diffère pas de celle du contour apparent de la sphère inscrite dans le cône asymptote.

Les sommets α et β situés sur le grand axe se déduiront de l'intersection de xy et du contour apparent vertical. On ne manque pas de méthodes rigoureuses; mais le point (α, α') le plus rapproché de (s, s') s'obtiendra avec toute la précision désirable, si l'on substitue à l'hyperbole du plan vertical son cercle osculateur en s'. Le point β s'en déduit par symétrie.

Dans la représentation du solide en projection horizontale, on aura à raccorder l'ellipse précédente avec l'hyperbole de contour apparent, qu'on limitera aux points de contact λ et μ, et à la trace $\gamma_1\delta_1$ du plan de profil donné. La droite $\lambda\mu$ sera la trace du plan du contour apparent horizontal. Sa trace verticale $o'\lambda'$, qui passe par le milieu de la corde verticale $\alpha_1'\beta_1$, symétrique de $\alpha\beta$ par rapport à os, sera symétrique de $o'\omega'$. Au



Echelle : $\frac{2}{3}$.

point (λ, λ'), par exemple, le plan tangent étant vertical, la sphère inscrite correspondante aura son centre dans le plan horizontal de projection; ce sera la trace de l'axe Δ. Le grand cercle horizontal sera bitangent en λ et μ à l'ellipse (ω); nous le construisons, comme celui qui a pour centre ω, au moyen de la génératrice principale Γ.

Construction d'un point de l'intersection. — On pourrait appliquer diverses méthodes, puisque le cône (s, s') a son sommet sur l'autre surface. Un plan passant par une des génératrices de celle-ci qui se croisent au point (s, s') couperait les deux surfaces suivant des droites. Mais l'obliquité des axes complique les tracés, et nous ne procéderons ainsi que dans un cas particulier. Nous nous contenterons de couper par des sphères concentriques à l'hyperboloïde, comme l'indique suffisamment l'épure. Chaque parallèle de l'hyperboloïde est déterminé rigoureusement à l'aide de l'intersection de la sphère correspondante et de la génératrice principale; elle est fournie elle-même par le petit cercle de la sphère situé dans le plan frontal de cette génératrice.

Le rappel horizontal des points trouvés se fait facilement par l'intermédiaire du petit cercle horizontal de la sphère.

Tangente en un point de la courbe. — La tangente en un point (m, m') ainsi construit se détermine aisément par la méthode du plan normal, le centre de la sphère inscrite dans l'hyperboloïde étant toujours déterminé par le plan perpendiculaire à la génératrice principale au point situé sur le même parallèle.

Points remarquables. — 1° *Points fournis par la sphère limite.* — La sphère inscrite le long de l'équateur de l'hyperboloïde donne deux points dont la projection verticale commune φ' est un sommet de l'hyperbole équilatère annoncée, l'autre étant confondu avec s'. La tangente en φ' est perpendiculaire à $o's'$, tandis que les tangentes aux projections horizontales φ et ψ sont parallèles à xy.

On remarque que, d'après l'ouverture du cône S, le point φ' est le milieu du rayon $o'a'$ du cercle de gorge.

2° *Points situés sur les contours apparents verticaux.* — Ces deux contours, étant situés dans le même plan frontal, donnent directement deux points (f, f'), (g, g') dont les tangentes sont perpendiculaires au plan vertical, et les tangentes en f' et g' se construisent par la méthode classique.

Les points f' et g' pourraient déjà être obtenus avec plus de précision par la méthode relative à l'intersection d'un hyperboloïde et d'une droite située dans un plan méridien. Mais nous pouvons utiliser ici une propriété de l'hyperbole équilatère. Le cercle de centre φ' qui passe par s', ayant ainsi pour rayon un diamètre de cette hyperbole, la coupe en trois autres points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral, puisque l'orthocentre est confondu avec le centre du cercle circonscrit. Or, l'un de ces points coïncidant avec s', les autres sont forcément f' et g', puisque les génératrices de contour apparent du cône S font entre elles un angle de 60°. On prendra donc les points de rencontre du cercle (φ') avec ces deux génératrices.

3° *Points situés sur le contour apparent horizontal du cône.* — La courbe est tout entière d'un même côté du plan du contour apparent horizontal de l'hyperboloïde, mais elle rencontre celui du cône. Celui-ci se compose de deux génératrices symétriques que l'on construit au moyen de la sphère inscrite. Soit (sl, $s'l'$) l'une de ces droites; elle rencontre l'hyperboloïde en (s, s') et en un second point que nous construirons par l'intermédiaire du milieu de la corde, déterminé par le plan diamétral conjugué, que nous rattacherons au cône asymptote. La frontale de ce plan menée par (o, o') est le diamètre conjugué du plan de bout $s'l'$. Nous lui adjoindrons le diamètre conjugué du plan vertical sl. Comme le cône asymptote a un plan tangent parallèle à ce dernier, le diamètre est la génératrice de contact, et sa projection verticale est la droite $o'\lambda'$. Coupons alors par le plan vertical sl. Il rencontre la frontale au point (s, k'), et il est parallèle à la seconde droite. La parallèle menée de k' à $o'\lambda'$ rencontre sl au point i', projection du milieu de la corde cherchée. On en déduit l'autre extrémité (r, r').

Ponctuation. — Les seules lignes cachées, sur les deux plans de projection, sont les génératrices de contour apparent du cône creux, et la portion de l'ellipse (ω) située à gauche de la droite $\lambda\mu$.

Remarque. — Dans le voisinage d'un sommet, tel que le point g de la projection horizontale, l'imprécision des tracés ne permet pas toujours de se rendre compte assez exactement de la forme essentielle de la courbe, si l'on ne connaît pas son rayon de courbure. Ici, le cercle osculateur se construit assez facilement à l'aide du théorème de Meusnier, sachant que la trace verticale du plan osculateur est confondue avec la tangente en g' à l'hyperbole équilatère. Connaissant le rayon de courbure dans l'espace, on applique ensuite le même théorème au cylindre projetant.

J. L.

Bonne épure de M. H.-L. Mennessier, à Évreux.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1920)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (*suite*).

10 375. — Trouver dans une ellipse la normale de longueur minimum.

— **376.** — On donne la parabole $y^2 - 4ax = 0$; former l'équation de la normale qui a pour pente m. Calculer l'aire du triangle formé par les normales qui ont pour pentes m_1, m_2, m_3.

— **377.** — On considère la parabole définie par l'équation $\rho = \frac{1}{\cos^2 \frac{\omega}{2}}$; calculer le paramètre. A tout point M de la courbe ayant pour affixe le nombre imaginaire z on fait correspondre le point M′ dont l'affixe z' a pour valeur $z' = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + z\right)$. Lieu du point M′. Ce lieu est un cercle. Points de rencontre de ce cercle et de la parabole

— **378.** — On donne une conique C et un point P. On considère toutes les coniques passant par le point P homothétiques de C et tangentes à C. Lieu des sommets.

— **379.** — On donne deux points P et P′ et on considère les ellipses qui ont P pour foyer et P′ pour sommet d'axe non focal. Lieu des sommets de ces ellipses.

— **380.** — Lieu des foyers des paraboles tangentes à une droite en un point donné et passant par un autre point donné.

— **381.** — Trouver un triangle inscrit dans une ellipse donnée et ayant son centre de gravité au centre de l'ellipse. Cas où l'ellipse devient un cercle.

— **382.** — Lieu des points de contact des tangentes issues d'un point donné aux coniques tangentes aux quatre côtés d'un carré.

— **383.** — La tangente en un point d'une ellipse rencontre les axes en P et Q; trouver le minimum de la longueur PQ.

— **384.** — On donne l'hyperbole équilatère $xy = k^2$ et un cercle ayant son centre sur Ox. Une droite Δ parallèle à Oy rencontre l'hyperbole en A et le cercle en B. Lieu du milieu de AB. Étude géométrique. Déterminer les points de rencontre du lieu avec une parallèle à Ox. Asymptote.

— **385.** — Trouver le foyer de la courbe $y = x^2 - 3x + 2$.

— **386.** — Équation générale des coniques dont on donne le centre, tangentes à une droite donnée et semblables à une conique donnée.

— **387.** — La normale en un point M d'une ellipse rencontre les axes de la courbe en P et Q; soit OH la distance du centre à la tangente au point M. Démontrer que le produit PQ × OH a une valeur indépendante de la position du point M. Même question pour l'hyperbole.

— **388.** — Lieu des foyers des paraboles qui ont une directrice donnée et qui passent par un point donné.

— **389.** — On considère l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, le sommet $A(a, 0)$ et un point $M(x_0, y_0)$ de la branche passant au point A. Calculer l'aire u du secteur limité par les droites OA, OM et l'arc AM. Exprimer x_0, y_0 en fonction de u.

— **390.** — Enveloppe des cercles ayant pour diamètres des cordes focales d'une parabole.

— **391.** — Par un point M d'une parabole on mène des cordes perpendiculaires MA, MB. Lieu du centre du cercle circonscrit au triangle MAB.

— **392.** — Par un point M d'une parabole, on mène des cordes MA, MB, symétriques par rapport à la normale en M. Trouver l'enveloppe de AB.

— **393.** — On considère toutes les paraboles tangentes à une droite donnée en un point donné A et passant par un autre point donné B. Trouver le lieu du point de rencontre de la courbe et du diamètre conjugué de AB. Solution géométrique.

— **394.** — On donne une parabole et un cercle ayant son centre sur l'axe de la parabole. La tangente au cercle au point M rencontre la parabole en deux points A et B. Lieu du conjugué harmonique de M par rapport à A et B.

— **395.** — On considère la conique $\frac{p}{\rho} = 1 + e\cos\omega$. Former l'équation de la droite joignant les points de cette courbe qui ont pour angles polaires α et β. Conditions pour que les tangentes en α et β soient parallèles.

— **396.** — Lieu des points d'où l'on peut mener à une parabole deux tangentes faisant un angle donné. Solution analytique et géométrique.

— **397.** — Lieu des foyers des paraboles passant par deux points donnés A et B et normales en A à la droite AB.

— **398.** — Par un point de l'axe d'une parabole on mène une sécante qui rencontre la courbe en deux points. Trouver le lieu du point de rencontre des normales en ces deux points.

10399. — Par un point M d'une parabole on peut mener deux normales à la courbe dont les pieds sont A et B. Lieu de la projection du point M sur la droite AB.

— **400.** — Équation générale des hyperboles ayant une asymptote donnée et un sommet donné. Lieu des foyers; enveloppe de la deuxième asymptote.

— **401.** — On donne une ellipse, un point P et on considère l'hyperbole d'Apollonius relative au point P. Par les points de rencontre de l'ellipse et de l'hyperbole passent deux paraboles. Trouver le lieu du point de rencontre des axes de ces paraboles, quand le point P décrit une droite.

— **402.** — On donne trois points A, B, C sur une parabole; démontrer que les tangentes en A, B, C rencontrent respectivement les droites BC, CA, AB en trois points en ligne droite.

— **403.** — On donne une hyperbole équilatère $xy = k^2$ et deux points A et B de cette courbe. On joint A et B à un point M variable de la courbe, MA et MB rencontrent l'hyperbole en A′ et B′. Lieu du centre du cercle circonscrit au triangle MA′B′.

— **404.** — Lieu des points de rencontre des tangentes communes à une parabole fixe et à un cercle variable tangent à la parabole en un point donné.

— **405.** — Une ellipse de grandeur constante tourne autour de son centre. Lieu du pôle d'une droite fixe.

— **406.** — Trouver le minimum de l'aire limitée par une parabole et une normale.

— **407.** — On donne deux paraboles ayant même foyer et leurs axes rectangulaires. Une de leurs tangentes communes passe par un point fixe; trouver le lieu des points de contact de cette tangente avec l'une des paraboles.

— **408.** — On donne une ellipse et une corde AB passant par l'un des foyers F; par ce foyer on mène une corde CD parallèle au diamètre conjugué de AB. Calculer la somme AB + CD.

— **409.** — On donne une ellipse et un triangle inscrit $M_1M_2M_3$; la tangente en M_1 rencontre le côté M_2M_3 au point P_1 et on prend le milieu N_1 de M_1P_1. Démontrer que les trois points analogues à N_1 sont en ligne droite.

— **410.** — Trouver l'enveloppe des cordes d'une ellipse dont les milieux sont sur une droite donnée. Trouver l'équation tangentielle et l'équation ponctuelle de l'enveloppe.

— **411.** — On donne une parabole et un cercle tangent à cette courbe au point A. Outre la tangente en A, les deux courbes admettent deux autres tangentes communes qui se coupent au point B. Trouver la polaire du point B par rapport à la parabole.

— **412.** — On considère toutes les paraboles admettant une tangente donnée et une directrice donnée. Lieu du foyer et du sommet.

— **413.** — Lieu du centre d'une ellipse de grandeur constante tangente en un point donné à une droite donnée. Aire limitée par le lieu.

— **414.** — Courbe définie par les équations $x = at^2 + 2bt + c$, $y = a't^2 + 2b't + c' = 0$. C'est une parabole. Relation qui lie les t de quatre points situés sur un cercle. En déduire le sommet de la courbe.

— **415.** — On considère l'ellipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ et l'hyperbole $x^2 - 7y^2 = 14$. Montrer que ces deux courbes sont homofocales. Elles se rencontrent en quatre points qui sont les sommets d'un rectangle. De même, les asymptotes de l'hyperbole rencontrent le cercle homographique de l'ellipse en quatre points qui sont les sommets d'un autre rectangle. Démontrer que ces deux rectangles ont deux côtés communs parallèles à Oy.

— **416.** — On donne trois points sur une ellipse; trouver les conditions pour que les normales en ces points concourent en un point de l'ellipse.

— **417.** — On donne une parabole et trois points A, B, C sur la courbe. Le côté AB rencontre l'axe en un point C′. On prend sur l'axe un point C″ tel que $\overline{OC'}.\overline{OC''} = -\overline{OF}^2$, O désignant le sommet et F le foyer. Démontrer que la droite CC″ et les droites analogues AA″, BB″ se coupent sur la parabole.

— **418.** — Déterminer les normales communes à deux paraboles qui ont même sommet et leurs axes perpendiculaires.

— **419.** — On donne une parabole $y^2 - 2px = 0$. Par le sommet O on mène deux droites parallèles à deux diamètres conjugués de la conique $x^2 - 6xy + 2y^2 - 4ax = 0$. Ces droites rencontrent la parabole en M et M′. Trouver l'enveloppe de la droite MM′.

— **420.** — On considère une hyperbole de centre O et l'une des branches de cette courbe de sommet A. Une droite Δ rencontre cette branche aux points C et D et les asymptotes en E et F. Calculer le rapport de l'aire du triangle OEF à celle du segment CAD. Quelle est la limite de ce rapport lorsque la sécante se déplace parallèlement à elle-même en s'éloignant indéfiniment?

— **421.** — On donne deux paraboles ayant même sommet et leurs axes perpendiculaires. On mène une tangente à chacune de ces paraboles. Lieu du point de rencontre de ces tangentes lorsqu'elles sont rectangulaires.

— **422.** — On donne deux points A et A′; on considère les hyperboles ayant pour diamètre commun AA′ et telles que le diamètre conjugué de AA′ dans l'hyperbole conjuguée ait une longueur donnée $2l$. Trouver l'enveloppe de ces hyperboles.

— **423.** — On donne une ellipse de foyers F et F′, et un point S extérieur à la courbe. La droite SF rencontre la courbe en M et N, la droite SF′ en M′ et N′; démontrer que les expressions $\left|\frac{1}{SM} - \frac{1}{SN}\right|$ et $\left|\frac{1}{SM'} - \frac{1}{SN'}\right|$ sont égales.

— **424.** — D'un point P on mène les trois normales à une parabole, et on considère le triangle formé par les tangentes aux pieds de ces normales. Démontrer que le point P, le foyer de la parabole et le centre du cercle circonscrit au triangle sont en ligne droite.

10425. — La tangente en un point d'une ellipse rencontre le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre aux points P et P'. Les diamètres conjugués de OP, OP' rencontrent la tangente PP' aux points Q et Q'. Lieux des points Q et Q'.

— **426.** — Trouver les foyers de la conique $y^2 = 2px + qx^2$.

— **427.** — Lieu des points d'où l'on peut mener à une ellipse des tangentes parallèles à deux diamètres conjugués de la conique $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$.

— **428.** — D'un point M on mène les tangentes MT et MT' à l'ellipse $4x^2 + 9y^2 = 1$. Lieu du point M tel que l'on ait $MT + MT' = 4$.

— **429.** — Quelles relations doit-il exister entre les abscisses de quatre points de l'hyperbole $xy = a^2$ pour que ces quatre points soient sur un cercle passant par l'origine? Déterminer les cercles passant par l'origine et tangents à l'hyperbole.

— **430.** — On donne deux ellipses égales tangentes à l'axe des y à l'origine, d'un même côté de Ox, l'une au sommet du grand axe, l'autre au sommet du petit axe. Ces ellipses varient de façon que ab soit constant. Trouver le lieu de leurs points de rencontre.

— **431.** — Lieu des centres des coniques bitangentes à la courbe $xy = 2ay + 2bx - 2ab$, et tangentes en outre aux axes de coordonnées.

— **432.** — D'un point M on mène une normale MA à une hyperbole, A étant le pied; puis, du centre O on abaisse la perpendiculaire OH sur la tangente en A. On fait de même pour les quatre normales issues du point A. Démontrer que la somme $\Sigma(MA \times OH)$ est constante.

(*A suivre.*)

SUJETS DE CONCOURS

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Session normale de 1920.

Mathématiques élémentaires (*).

1° Étant donnés deux segments rectilignes AB et A'B', portés par deux droites qui se coupent en O, on prend sur la première droite un point variable M et sur la seconde un point M' tel que $\frac{\overline{M'A'}}{\overline{M'B'}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$. Trouver le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle OMM'.

2° Étant donnés deux segments rectilignes AB et A'B', portés par deux droites Δ et Δ', on prend sur Δ deux points M, M_1, et sur Δ' deux points M', M'_1, tels que $\frac{\overline{M'A'}}{\overline{M'B'}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$, $\frac{\overline{M_1A'}}{\overline{M_1B'}} = \frac{\overline{M_1A}}{\overline{M_1B}}$.

Trouver le lieu du centre de la sphère passant par les quatre points M, M_1, M', M'_1, quand M_1 et M'_1 varient M et M' restant fixes.

Trouver l'enveloppe de ce lieu quand M et M' varient.

Trouver le lieu du centre de la sphère tangente à Δ en M, et à Δ' en M', quand M et M' varient.

3° Étant données trois droites Δ, Δ', Δ'', on fixe trois points, A sur Δ, A' sur Δ' et A'' sur Δ''. On fait passer par ces trois points une sphère variable, qui rencontre les trois droites en de nouveaux points M, M', M''. Étudier le déplacement du plan MM'M'', en supposant que deux au moins des droites données sont dans un même plan.

Trouver le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle MM'M'' dans tous les cas où le plan de ce triangle reste parallèle à un plan fixe.

4° Étant données trois droites Δ, Δ', Δ'', on fixe trois points, A sur Δ, A' sur Δ' et A'' sur Δ''. On mène par ces trois points une sphère variable Σ. Trouver le lieu géométrique des points communs à trois des plans perpendiculaires à Δ, Δ' ou Δ'', aux points où ces droites sont rencontrées respectivement par Σ.

5° Étant données deux sphères S et S_1, et trois tangentes communes à ces sphères, on suppose que les six points de contact sont sur une sphère. Que peut-on dire des positions relatives des trois droites, ou des sphères qui leur sont tangentes?

(*) Des solutions étudiées de la question sont publiées dans le *Journal de Mathématiques élémentaires*.

Mathématiques spéciales.

2483. — 1° Dans un plan orienté on considère deux segments de droite AB, A'B'. Le lieu des points M du plan tels que l'on ait

$$\text{angle AMB} + \text{angle A'MB'} = 0$$

est en général une cubique passant par A, B, A', B'. Pour que ce lieu devienne une conique (celle-ci est alors une hyperbole équilatère), il faut et il suffit que les segments AA', BB' aient le même milieu.

Réciproquement, si (A, A'), (B, B') sont deux couples de points diamétralement opposés sur une hyperbole équilatère, on a $\widehat{AMB} + \widehat{A'MB'} = 0$ lorsque M décrit la courbe.

2° Étant donnés quatre points ABA'B' dans un plan, le lieu des points M de ce plan tels que

$$MA.MB = MA'.MB' \qquad (1)$$

est en général une cubique. Pour que ce lieu devienne une conique (celle-ci est alors une hyperbole équilatère), il faut et il suffit que les segments AB, A'B' aient le même milieu.

Réciproquement, étant donnée une hyperbole équilatère (H) ayant pour équation $x^2 - y^2 - a^2 = 0$, il existe une infinité de couples (A, B), (A', B') tels que, M décrivant (H), on ait la relation (1). Le point A étant choisi arbitrairement, il lui correspond des points *réels* B, A', B' déterminés sans ambiguïté par l'intersection de l'hyperbole (H') passant par A ayant pour asymptotes Ox, Oy et de l'ovale de Cassini (Γ) passant par A ayant pour foyers $x = \pm a$, $y = 0$. Où doit se trouver A pour que A', B' viennent se confondre avec A et B? Déduire de ce cas et de la relation (1) appliquée à la limite que, A et B étant deux points de (H) diamétralement opposés, on peut leur associer une direction Δ telle que, en désignant par α, β les angles de MA, MB avec Δ, on ait $\frac{MA}{\cos\alpha} = \frac{MB}{\cos\beta}$ lorsque M décrit (H). Vérifier ensuite directement cette propriété.

3° L'hyperbole (H') et la cassinienne (Γ) se coupent en quatre points réels A, B, A', B', et quatre points imaginaires A_1, B_1, A_2, B_2 deux à deux symétriques par rapport au centre O de (H). Montrer que les quatre droites AB, A'B', etc., passant par O sont deux à deux rectangulaires. Exprimer explicitement en fonction des coordonnées (α, β) du point A celles de B, A', B'.

Quel est le lieu des points A', B' lorsque A décrit une droite Δ issue de O? Quels sont les arcs utiles de ce lieu? Quel est le lieu de A', B' lorsque A décrit un cercle de centre O?

4° Soient AB, A'B' deux segments ayant O pour milieu. On désigne par Γ_A, Γ_B deux cercles centrés en A et B orthogonaux au cercle

$$x^2 + y^2 - K = 0,$$

par $\Gamma_{A'}$, $\Gamma_{B'}$ deux cercles centrés en A' et B' orthogonaux au cercle $x^2 + y^2 - K' = 0 (K' \neq K)$. Déterminer les points A, B, A', B' de sorte que, M décrivant (H), on ait la relation $\varpi_A \varpi_B = \varpi_{A'} \varpi_{B'}$, en désignant par ϖ_A, ϖ_B, etc. les puissances du point M par rapport aux cercles Γ_A, Γ_B, etc.

Les lieux de A, B, A', B' sont deux hyperboles conjuguées et AB, A'B' en sont des diamètres conjugués.

5° Étant donnée une quadrique (Q), peut-on trouver deux couples de points (A, B), (A', B') tels que, M décrivant (Q), on ait $MA.MB = MA'.MB'$? Montrer que (Q) doit être un hyperboloïde à deux nappes dont une hyperbole principale est équilatère. Cette condition étant remplie et, en outre, une certaine inégalité étant vérifiée, il existe une infinité de couples (A, B), (A', B') de points *réels*. Leur lieu est une ellipse (E) et AB, A'B' forment un faisceau harmonique avec les diagonales du rectangle construit sur les axes de (E).

On considère une biquadratique sphérique, supposée réelle, ayant pour équations : $ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$ $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$. Existe-t-il des points A, A', B, B' tels que, M décrivant cette courbe, on ait

$$MA.MB = MA'.MB'?$$

Trouver tous les couples tels que les segments AB, A'B' aient pour milieu le centre O de la sphère.

Nota. — Il sera commode d'employer les coordonnées polaires pour la recherche des lieux des 4e et 5e parties.

Calcul différentiel et intégral.

PREMIÈRE PARTIE

Étant donné un système de trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz :

1° On considère la famille de courbes Γ_λ du plan des xy dont l'équation générale est

$$\cos x + \cos y = \lambda,$$

où λ est un paramètre réel arbitraire. On demande d'étudier la forme de ces courbes et leur position relative quand λ varie.

2° On considère la surface S dont l'équation est

$$\cos x + \cos y + \cos z = 1,$$

avec $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, $-\pi \leqslant y \leqslant \pi$, $-\pi \leqslant z \leqslant \pi$ et on demande d'en indiquer la forme.

3° Déterminer les lignes de plus grande pente de la surface S quand on considère xOy comme le plan horizontal.

4° Déterminer complètement chacune des lignes asymptotiques réelles de la surface S.

5° Déterminer les ombilics de la surface S.

6° Former l'équation différentielle des projections sur xOy des lignes de courbure de S.

7° Donner quelques indications sur la configuration du système de lignes de courbure de S et signaler les plus simples d'entre elles.

DEUXIÈME PARTIE

Soient $f(x, y)$ une fonction développable en série de Taylor au point (x_0, y_0), Δf l'accroissement qu'elle prend quand x, y augmentent respectivement de Δx, Δy à partir des valeurs x_0, y_0 et df sa différentielle

$$f'_x \Delta x + f'_y \Delta y$$

au point (x_0, y_0).

1° En supposant que f'_x et f'_y ne sont pas nuls, le rapport $\frac{\Delta f}{df}$ est en général déterminé. Montrer que sous des conditions très générales il tend vers l'unité quand Δx et Δy tendent simultanément vers zéro.

2° Peut-il arriver cependant que $\frac{\Delta f}{df}$ ait une limite finie différente de l'unité quand Δx et Δy tendent simultanément vers zéro d'une façon spéciale?

3° Cette circonstance n'a-t-elle lieu que pour des fonctions $f(x, y)$ très particulières?

(On suppose, bien entendu, dans 1°, 2°, 3°, que Δx, Δy convergent vers zéro de sorte que le dénominateur du rapport $\frac{\Delta f}{df}$ tende vers zéro par valeurs non nulles.)

Mécanique rationnelle.

On considère le système matériel formé d'un corps solide pesant (S) assujetti par des liaisons sans frottement à la condition qu'une droite Δ invariablement liée à (S) reste dans un plan horizontal fixe (P), cette droite pouvant du reste se déplacer librement dans ce plan et le corps (S) pouvant tourner librement autour de Δ.

1° Former les équations différentielles du mouvement du système et montrer qu'elles peuvent s'intégrer par des quadratures. Indiquer, sans faire les calculs, quelle méthode on pourrait employer pour trouver les réactions du plan fixe (P).

On pourra prendre un trièdre trirectangle invariablement lié au corps (S), ce trièdre ayant pour origine le centre de gravité G du corps, l'axe Gy étant parallèle à Δ et l'axe Gx perpendiculaire au plan formé par le point G et la droite Δ. On désignera par c la distance de G à la droite Δ, par θ l'angle de Gz avec la verticale ascendante, par ψ l'angle de Δ avec une direction horizontale fixe. Enfin on désignera par ξ, η, ζ les coordonnées de G par rapport à des axes fixes convenablement choisis.

2° Déterminer, parmi tous les mouvements possibles du système, ceux qui se réduisent à une rotation autour d'un axe vertical fixe. Ces mouvements sont-ils compatibles avec une position initiale arbitraire du système? Examiner en particulier le cas où cette position initiale serait une position d'équilibre.

3° On supposera dans tout ce qui va suivre que le plan perpendiculaire à Δ mené par le centre de gravité G est un plan de section circulaire pour l'ellipsoïde d'inertie relatif au point G. Étudier et discuter les mouvements du système.

4° Est-il possible que le système admette un pendule simple *synchrone*, c'est-à-dire que les fonctions du temps qui donnent l'angle θ dans les différents mouvements du système soient les mêmes que celles qui donnent l'angle d'écart avec la verticale d'un certain pendule simple? Énoncer, autant que possible sous une forme géométrique, les conditions d'existence d'un pendule simple synchrone et trouver la longueur de ce pendule.

Le corps (S) étant donné, montrer qu'il est toujours possible, et de plusieurs manières, de choisir la position de la droite Δ par rapport à ce corps de sorte que le système ainsi déterminé admette un pendule simple synchrone. Effectuer les calculs pour une plaque rectangulaire homogène de dimensions $2a$ et $2b$ $(a > b)$.

5° On suppose que le système admette un pendule simple synchrone et on applique au corps (S), supposé au repos dans une position d'équilibre, une percussion dont la ligne d'action rencontre la verticale du point G.

Montrer que l'angle aigu que font entre elles les deux positions de la droite Δ à deux instants quelconques du mouvement produit ne peut dépasser 1 radian. Cette limite peut-elle être atteinte et pour quelle forme du corps (S)?

La propriété énoncée s'étend-elle au cas où le système n'admet pas de pendule simple synchrone?

6° Le système, admettant un pendule simple synchrone, est supposé en mouvement. A un moment donné on lui applique une certaine percussion horizontale. A quelle condition doit satisfaire la ligne d'action de cette percussion pour que les deux mouvements du système, l'un antérieur, l'autre postérieur à la percussion, correspondent au même mouvement du pendule simple synchrone?

N. B. — On prendra l'équation de l'ellipsoïde d'inertie relatif au point G sous la forme

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy = 1.$$

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE CENTRALE

Concours de 1915.

Géométrie analytique.

2324. — *Soient* Ox *et* Oy *deux axes de coordonnées rectangulaires; on considère les coniques* (C) *qui touchent* Ox *au point* O *et ont une directrice fixe* (D) *dont l'équation est* $x + y - a = 0$, *a désignant une longueur positive donnée. Cette droite* (D) *coupe* Ox *au point* A.

1° *Démontrer que le lieu du foyer* F *de* (C) *qui correspond à la directrice* (D) *est la circonférence* (Δ) *du cercle décrit sur* OA *comme diamètre.*

2° *Discuter le genre de* (C) *lorsque* F *décrit* (Δ).

3° *Trouver et construire le lieu du second foyer* F′ *de* (C).

L'équation générale des coniques admettant pour directrice la droite $x + y - a = 0$ est

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \frac{e^2}{2}(x + y - a)^2 = 0,$$

en désignant par α et β les coordonnées du foyer F et par e l'excentricité.

En écrivant que ces coniques touchent Ox au point O, on obtient les deux conditions suivantes :

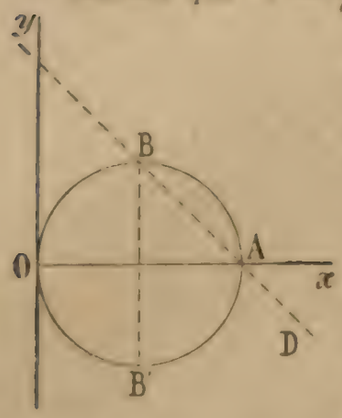
$$-2\alpha + ae^2 = 0$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - \frac{e^2}{2}a^2 = 0.$$

on tire de la première $e^2 = \frac{2\alpha}{a}$ et portant dans la seconde, on obtient l'équation du lieu du foyer F, savoir :

$$\alpha^2 + \beta^2 - a\alpha = 0.$$

Ce lieu est bien la circonférence (Δ) du cercle décrit sur OA comme diamètre; cela résulte d'ailleurs de ce que la portion de tangente OA comprise entre le point de contact O et le point de rencontre A avec la directrice D est vue sous un angle droit du foyer F qui correspond à cette directrice.



Suivant que $e^2 = \frac{2\alpha}{a}$ est inférieur, égal, ou supérieur à l'unité, la conique (C) est une ellipse, une parabole ou une hyperbole. La droite $x = \frac{a}{2}$ est le diamètre BB′ du cercle, perpendiculaire à Ox; lorsque le point F est situé en B ou B′, la conique (C) est du genre parabole ; s'il est sur l'arc BOB′, la conique est du genre ellipse et s'il est sur l'arc B′AB la conique est du genre hyperbole.

Si le point F vient se placer sur la directrice D, la conique (C) se décompose. Or, la directrice D passe par les points A et B; quand le point F est en A, la conique (C), qui est du genre hyperbole, se réduit à deux droites réelles et distinctes, savoir l'axe des x et la parallèle à Oy menée par le point A; quand le point F est en B, la conique (C), qui est du genre parabole, se réduit à deux droites confondues avec OB. Enfin, quand le point F vient se placer en O, $\alpha = 0$, $e^2 = 0$, la conique (C) se réduit à un cercle point $x^2 + y^2 = 0$, ou, si on préfère, aux droites isotropes menées par le point O.

On peut d'ailleurs retrouver tous ces résultats au moyen de l'équation de la conique (C). Le point F étant un point sur Δ, ses coordonnées sont de la forme

$$\alpha = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos\varphi = a\cos^2\frac{\varphi}{2}, \qquad \beta = \frac{a}{2}\sin\varphi = a\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2},$$

et on a

$$e^2 = \frac{2\alpha}{a} = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

L'équation de la conique (C) peut alors s'écrire

$$x^2\sin^2\frac{\varphi}{2} - 2xy\cos^2\frac{\varphi}{2} + y^2\sin^2\frac{\varphi}{2} + 2a\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\right)y = 0,$$

d'où

$$\delta = \sin^4\frac{\varphi}{2} - \cos^4\frac{\varphi}{2} = \sin^2\frac{\varphi}{2} - \cos^2\frac{\varphi}{2} = -\cos\varphi$$

et

$$\Delta = -a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot\cos^2\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\right)^2 = -\frac{a^2}{4}\sin^2\varphi(1 - \sin\varphi).$$

Pour étudier le lieu du second foyer, F′, nous remarquerons qu'il peut se déduire du foyer F par la construction suivante : mener par le point F la perpendiculaire à la directrice D, on obtient ainsi l'axe focal FF′ ; joindre le point O au symétrique G de F par rapport à la tangente Ox; on obtient le rayon vecteur qui joint le point O au second foyer F′ ; nous en déduirons à la fois l'équation du lieu de F′ et sa construction par points.

Soit $y = tx$, l'équation de la droite OF $\left(t = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)$; le point F a pour coordonnées

$$\alpha = \frac{a}{1+t^2}, \qquad \beta = \frac{at}{1+t^2}.$$

La droite FF′ (coefficient angulaire 1) a pour équation

$$x - \frac{a}{1+t^2} = y - \frac{at}{1+t^2},$$

ou

$$(1+t^2)(x-y) - a(1-t) = 0,$$

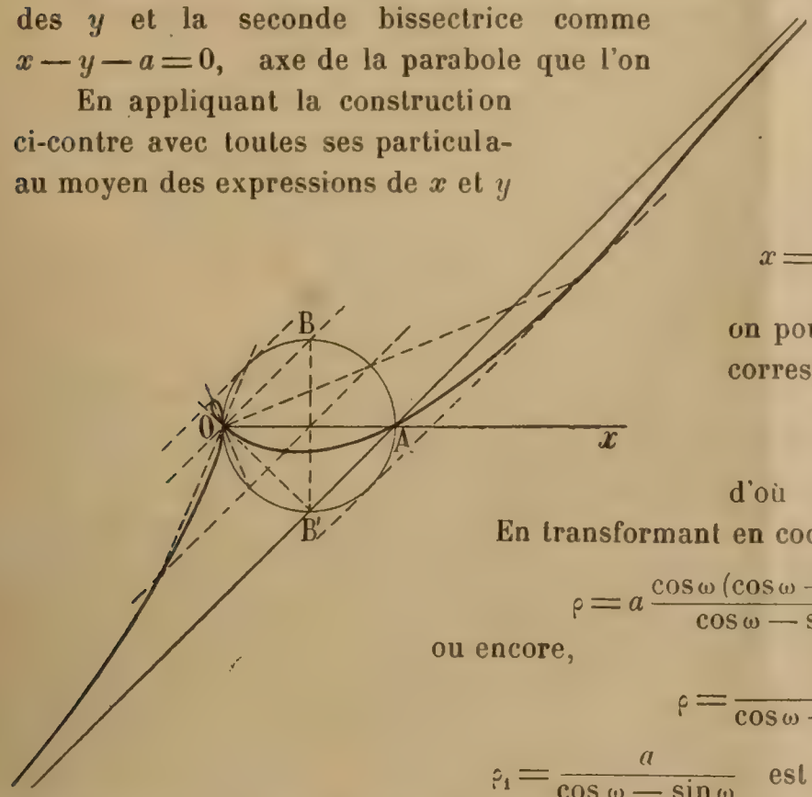
et la droite OG, symétrique de OF par rapport à Ox, $y = -tx$.

On en déduit l'équation du lieu du point F′ :

$$(x^2+y^2)(x-y) - ax(x+y) = 0.$$

Ce lieu est une cubique circulaire unicursale, ayant le point O comme point double avec l'axe des y et la seconde bissectrice comme tangentes; son asymptote est la droite $x-y-a=0$, axe de la parabole que l'on obtient en amenant le point F en B'.

En appliquant la construction indiquée plus haut, on obtient la courbe ci-contre avec toutes ses particularités. On peut d'ailleurs la discuter aisément au moyen des expressions de x et y en fonction du paramètre :



$$x=a\frac{1-t}{(1+t)(1+t^2)},\qquad y=a\frac{t(t-1)}{(1+t)(1+t^2)};$$

on pourra ainsi déterminer le point d'inflexion qui correspond à la racine réelle de l'équation

$$t^3-3t^2+3t+3\equiv(t-1)^3+4=0,$$

d'où $t=1-\sqrt[3]{4}$.

En transformant en coordonnées polaires, on obtient l'équation

$$\rho=a\frac{\cos\omega(\cos\omega+\sin\omega)}{\cos\omega-\sin\omega}=a\frac{1-\sin^2\omega+\cos\omega\sin\omega}{\cos\omega-\sin\omega},$$

ou encore,

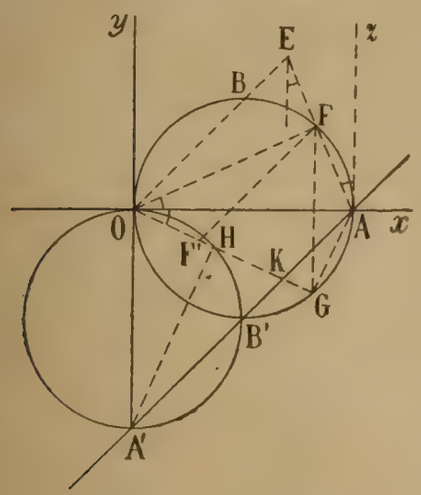
$$\rho=\frac{a}{\cos\omega-\sin\omega}+a\sin\omega.=\rho_1-\rho_2.$$

$\rho_1=\dfrac{a}{\cos\omega-\sin\omega}$ est l'équation de la droite AB', qui est l'asymptote de la cubique; $\rho_2=-a\sin\omega$ est l'équation d'un cercle de diamètre $OA'=OA$, qui se déduit du cercle Δ par rotation de $-\frac{\pi}{2}$ autour du point O. On a donc

$$\overline{OF'}=\overline{OK}-\overline{OH}=\overline{HK},$$

propriété connue des cubiques circulaires unicursales.

Nous pouvons d'ailleurs retrouver cette relation par des considérations géométriques; remarquons, en effet, que le trapèze OKAE est un trapèze isocèle, car l'angle $EOK=EOA+AOG$; or, l'angle



$$EOA=\frac{\pi}{4},\qquad AOG=AOF=FAz,$$

de sorte que

$$EOK=\frac{\pi}{4}+FAz;$$

il en est de même de l'angle OEA; il en résulte que

$$OF'=EF=AE-AF.$$

D'autre part, le triangle rectangle OHA' est égal au triangle rectangle AGO (même hypoténuse et côtés perpendiculaires) et, par suite, égal au triangle rectangle AFO; il en résulte

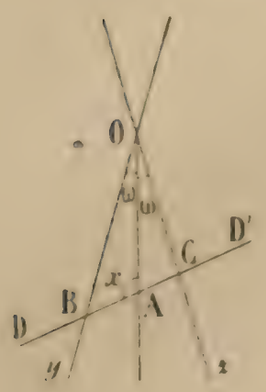
$$OH=AF\qquad\text{et}\qquad \widehat{HOA'}=\widehat{FAO}.$$

Enfin, le triangle OKA' est égal au triangle AEO $\left(OA'=OA,\ \widehat{KOA'}=\widehat{EOA},\ \widehat{OA'K}=\widehat{AOE}=\frac{\pi}{4}\right)$; on a donc $OK=AE$. Finalement $OF'=OK-OH=HK$, c'est ce qu'on voulait démontrer.

P. L.

Solutions de MM. J. Albault, E. N. E. T.; Ch. Bernard, à Tanger (Maroc); P. Bernard, à Paris; Yves Bouthillier, élève de l'école centrale; L. Chiganne, 155e R. A. P. E. M., Strasbourg; A. Hetinel, à Cannes; E. Logeard; A. Le Marchand, à Paris; H.-L. Mennessier, à Évreux; Ch. Pacé, à bord de la *Ville d'Ys*; Topin, à Grandvilliers.

2326. — *On donne un angle yOz égal à 2ω et un point A sur la bissectrice de cet angle. On désigne par a la distance OA.*



On mène par A une sécante variable DAD', qui rencontre les côtés de l'angle ou leurs prolongements en B et en C; on désigne par x l'angle OAD que fait la sécante avec AO.

1° *Étudier la variation de $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ quand on fait varier x de 0 à π.*

2° *Déterminer l'angle x de façon que*

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{k^2},$$

en désignant par k une longueur donnée.

Discuter, puis calculer l'aire du triangle OBC et le côté BC en fonction des données ω, a et k.

La figure correspond au cas où x est compris entre ω et $\pi - \omega$; pour $0 < x < \omega$, le point C serait sur le prolongement de Oz et pour $\pi - \omega < x < \pi$ le point B serait sur le prolongement de Oy; nous considérerons AB et CA comme des vecteurs dont la direction positive est D'D et nous aurons, dans tous les cas,

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\omega} = \frac{a}{\sin(\omega + x)}, \qquad \text{d'où} \qquad AB = \frac{a\sin\omega}{\sin(\omega + x)},$$

$$\frac{\overline{CA}}{\sin\omega} = \frac{a}{\sin(x - \omega)}, \qquad \text{d'où} \qquad CA = \frac{a\sin\omega}{\sin(x - \omega)}.$$

1. Nous avons donc à étudier la fonction

$$y = AB^2 + AC^2 = a^2\sin^2\omega\left[\frac{1}{\sin^2(\omega + x)} + \frac{1}{\sin^2(x - \omega)}\right].$$

Si on remplace x par $\pi - x$, $\overline{AB}$ et $\overline{CA}$ s'échangent, ce qui résulte de la symétrie de la figure; il suffira de faire varier x de 0 à $\frac{\pi}{2}$; la fonction est continue pour toute valeur de x dans cet intervalle, sauf pour $x = \omega$; la dérivée est

$$y' = -2a^2\sin^2\omega\left[\frac{\cos(x + \omega)}{\sin^3(x + \omega)} + \frac{\cos(x - \omega)}{\sin^3(x - \omega)}\right],$$

ou

$$y' = -2a^2\sin^2\omega\,\frac{\cos(x + \omega)\sin^3(x - \omega) + \cos(x - \omega)\sin^3(x + \omega)}{\sin^3(x + \omega)\,.\,\sin^3(x - \omega)},$$

ou, enfin,

$$y' = -2a^2\sin^2\omega\,\frac{2\sin x\cos x\,[\sin^2 x\cos^2\omega(\cos^2\omega + 3\sin^2\omega) + \cos^2 x\,.\,\sin^2\omega(3\cos^2\omega + \sin^2\omega)]}{\sin^3(x + \omega)\sin^3(x - \omega)}.$$

x variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$, y' ne peut changer de signe que pour $x = \omega$ en devenant infinie; elle passe de $+\infty$ à $-\infty$; la fonction y est croissante pour $0 < x < \omega$ et décroissante pour $\omega < x < \frac{\pi}{2}$; elle part de la valeur $2a^2$ pour $x = 0$, croît jusqu'à $+\infty$ (pour $x = \omega$) et décroît ensuite de $+\infty$ à $2a^2\operatorname{tg}^2\omega$ $\left(\text{pour } x = \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Cherchons maintenant à déterminer x de façon que $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{k^2}$. L'équation du problème est la suivante :

$$\sin^2(x + \omega) + \sin^2(x - \omega) = \frac{a^2}{k^2}\sin^2\omega,$$

ou

$$2\sin^2 x\cos^2\omega + 2\sin^2\omega\cos^2 x = \frac{a^2}{k^2}\sin^2\omega.$$

On peut tirer de là soit $\operatorname{tg}^2 x$, soit $\cos 2x$. En décrivant l'équation sous la forme

$$2\cos^2\omega\sin^2 x + 2\sin^2\omega\cos^2 x = \frac{a^2}{k^2}\sin^2\omega(\cos^2 x + \sin^2 x),$$

on obtient

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{(a^2 - 2k^2)\sin^2\omega}{2k^2\cos^2\omega - a^2\sin^2\omega} = \frac{a^2 - 2k^2}{2k^2\operatorname{cotg}^2\omega - a^2}.$$

On voit ainsi que le problème n'est possible que si k^2 est compris entre $\frac{a^2}{2}$ et $\frac{a^2}{2}\operatorname{tg}^2\omega$. En remplaçant $2\sin^2 x$ et $2\cos^2 x$ par leurs expressions en fonction de $\cos 2x$, on obtient

$$\cos^2\omega(1 - \cos 2x) + \sin^2\omega(1 + \cos 2x) = \frac{a^2}{k^2}\sin^2\omega,$$

d'où

$$\cos 2x = \frac{k^2 - a^2\sin^2\omega}{k^2\cos 2\omega}.$$

Supposant $0 < x < \frac{\pi}{2}$, on prendra $\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{a^2 - 2k^2}{2k^2\operatorname{cotg}^2\omega - a^2}}$. Pour reconnaître à quel cas de figure correspond cette valeur, il suffit d'étudier le signe de la différence $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\omega$, ou, ce qui revient au même,

$$\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2\omega = \frac{a^2 - 4k^2\cos^2\omega}{\cos^2\omega\,(2k^2\operatorname{cotg}^2\omega - a^2)}.$$

a) $\operatorname{tg}\omega < 1$: on a la disposition $\frac{a^2}{2}\operatorname{tg}^2\omega < \frac{a^2}{4\cos^2\omega} < \frac{a^2}{2}$; pour $\frac{a^2}{2}\operatorname{tg}^2\omega < k^2 < \frac{a^2}{4\cos^2\omega}$, $\operatorname{tg} x > \operatorname{tg}\omega$, les points B et C sont respectivement sur Oy et Oz; pour $\frac{a^2}{4\cos^2\omega} < k^2 < \frac{a^2}{2}$, $\operatorname{tg} x < \operatorname{tg}\omega$, le point B est sur Oy et le point C sur le prolongement de Oz.

b) $\operatorname{tg}\omega > 1$: on a, au contraire, $\frac{a^2}{2} < \frac{a^2}{4\cos^2\omega} < \frac{a^2}{2}\operatorname{tg}^2\omega$; pour $\frac{a^2}{2} < k^2 < \frac{a^2}{4\cos^2\omega}$, $\operatorname{tg} x < \operatorname{tg}\omega$, B est sur Oy, C sur le prolongement de Oz, et pour $\frac{a^2}{4\cos^2\omega} < k^2 < \frac{a^2}{2}\operatorname{tg}^2\omega$, $\operatorname{tg} x > \operatorname{tg}\omega$, B est sur Oy et C sur Oz.

Reste à calculer l'aire du triangle OBC et le côté BC, pour la valeur trouvée de x; désignant par S la valeur algébrique de l'aire, par $\overline{OB}$ et $\overline{OC}$ les valeurs algébriques des vecteurs OB et OC évalués suivant Oy et Oz, nous aurons

$$\overline{OB} = a\frac{\sin x}{\sin(x+\omega)}, \qquad \overline{OC} = a\frac{\sin x}{\sin(x-\omega)}.$$

$$S = \frac{1}{2}\overline{OB}\,.\,\overline{OC}\sin 2\omega = \frac{1}{2}a^2\frac{\sin^2 x\,.\sin 2\omega}{\sin(x+\omega)\sin(x-\omega)} = \frac{1}{2}a^2\frac{\sin^2 x\,.\sin 2\omega}{\sin^2 x\,.\cos^2\omega - \sin^2\omega\cos^2 x};$$

il suffira d'y remplacer $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$ par les quantités proportionnelles $a^2 - 2k^2$ et $2k^2\operatorname{cotg}^2\omega - a^2$ pour obtenir l'expression cherchée :

$$S = \frac{1}{2}a^2\frac{(a^2 - 2k^2)\sin 2\omega}{(a^2 - 2k^2)\cos^2\omega - \sin^2\omega(2k^2\operatorname{cotg}^2\omega - a^2)} = \frac{1}{2}\frac{a^2(a^2 - 2k^2)\sin 2\omega}{a^2 - 4k^2\cos^2\omega}.$$

On constate que S est négatif ou positif suivant que k^2 est compris dans l'intervalle $\frac{a^2}{2}$, $\frac{a^2}{4\cos^2\omega}$ ou extérieur à cet intervalle, ce qui est conforme aux résultats précédents.

Enfin, nous aurons, sur l'axe D'D,

$$\overline{CB} = \overline{CA} + \overline{AB} = a\sin\omega\left[\frac{1}{\sin(x-\omega)} + \frac{1}{\sin(x+\omega)}\right] = a\sin\omega\frac{2\sin x\,.\cos\omega}{\sin^2 x\,.\cos^2\omega - \sin^2\omega\cos^2 x};$$

d'autre part,

$$\frac{\sin^2 x}{a^2 - 2k^2} = \frac{\cos^2 x}{2k^2\operatorname{cotg}^2\omega - a^2} = \frac{1}{2k^2(\operatorname{cotg}^2\omega - 1)} = \frac{\sin^2\omega}{2k^2\cos 2\omega},$$

d'où

$$\sin x = \frac{\sin\omega}{k\sqrt{2}}\sqrt{\frac{a^2-2k^2}{\cos 2\omega}}, \qquad \sin^2 x = \frac{(a^2-2k^2)\sin^2\omega}{2k^2\cos 2\omega}, \qquad \cos^2 x = \frac{(2k^2\operatorname{cotg}^2\omega - a^2)\sin^2\omega}{2k^2\cos 2\omega},$$

$$\overline{CB} = 2ak\sqrt{2}\cos\omega\sqrt{\frac{a^2-2k^2}{\cos 2\omega}}\cdot\frac{\cos 2\omega}{a^2-4k^2\cos^2\omega},$$

et, par suite,

$$BC = 2ak\sqrt{2}\cos\omega\cdot\sqrt{\frac{(a^2-2k^2)\times\cos 2\omega}{(a^2-4k^2\cos^2\omega)}}.$$

Comme vérification, on peut retrouver cette valeur en partant de la relation évidente

$$S = \frac{1}{2}.BC.a\sin x.$$

P. L.

Solutions de MM Paul Bernard, à Paris; G. Lach, instituteur à Douai; H.-L. Mennessier, à Évreux; R. J., à Clermont-Ferrand; M. Roux, instituteur au Creusot.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1914)

ÉCOLE CENTRALE (*suite.*)

10292. — Lieu du second foyer des coniques tangentes à une droite D, dont le premier foyer est F et dont on connaît l'excentricité.

— **293.** — Construire une conique connaissant sa directrice, deux points et la tangente en l'un de ces points.

— **294.** — Construire une ellipse, connaissant le centre, la longueur du grand axe, un point et une tangente.

— **295.** — Construire les asymptotes d'une hyperbole dont on connaît les deux foyers et la longueur de l'axe transverse $2a$.

— **296.** — On considère une hyperbole dont on donne l'axe transverse $2a$ et les deux foyers F et F'. Une circonférence a son centre sur l'axe Oz; déterminer les points d'intersection en ramenant à l'intersection d'un hyperboloïde et d'une sphère.

— **297.** — Construire une parabole, connaissant deux points et la tangente en chacun d'eux; déterminer le cercle osculateur en un point.

— **298.** — Déterminer une parabole connaissant son axe et deux points.

— **299.** — Une parabole est définie par sa directrice et son foyer F; on définit une conique par son cercle directeur et le second foyer qui coïncide avec F; leur mener des tangentes communes.

— **300.** — Perspective, définition de la ligne d'horizon. On donne une ellipse qui est la perspective d'une circonférence située dans un plan horizontal; on donne en outre la ligne d'horizon H H. Trouver la perspective du centre.

Géométrie cotée.

— **301.** — On donne une droite ab, de pente 1 et une autre droite cd, de pente $\frac{1}{2}$. Trouver leur angle.

— **302.** — Angle de deux plans P et Q donnés par leur échelle de pente.

— **303.** — On donne une droite dont la pente est $\frac{1}{2}$; mener par cette droite un plan de pente 2.

— **304.** — Distance d'un point à une droite; le point est c de cote 2 et la droite est donnée par deux points : a (3), b (8).

— **305.** — Mener d'un point C de cote 2 la perpendiculaire à la droite a (2) b (5).

— **306.** — Mener de b (5) une droite coupant une autre droite a (2) d (7) sous un angle de 60°.

— **307.** — Perpendiculaire commune à une horizontale h (0) et à une droite a (5) b (10).

— **308.** — Perpendiculaire commune à deux droites a (2) b (5) et c (1) d (6).

— **309.** — On considère deux droites D et Δ d'égale pente. Mener leur perpendiculaire commune.

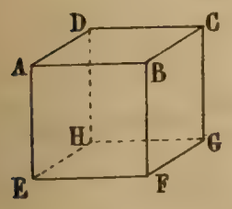
10310. — On donne un segment de droite *a* (1) *b* (4) qui est la diagonale d'un carré et la ligne de pente du plan de ce carré. Construire le carré, puis la pyramide régulière qui a ce carré pour base et dont le sommet a une cote donnée.

— **311.** — On donne un segment de droite *a* (2) *b* (8); construire les projections d'un tétraèdre régulier dont *ab* est un côté et dont un autre côté est situé dans le plan horizontal du point *a*.

— **312.** — Construire un tétraèdre dont la base est un triangle *abc* du plan horizontal, connaissant en outre la longueur des arêtes *sa*, *sb* et sachant que *sc* fait un angle de 60° avec le plan horizontal.

— **313.** — Construire un tétraèdre régulier sachant que *a* (2) *b* (6) est une arête et tel que l'on connaît la direction des horizontales d'une face qui passe par *ab*.

— **314.** — Construire un cube, connaissant un sommet *a* (0), la diagonale d'une face passant par *a* étant portée par la droite *b*(1) *c*(3).



— **315.** — Dans un cube ABCDEFGH, on donne A en position, ainsi que la droite qui porte l'arête EF. Déterminer le cube, faire l'épure; le point A a pour cote 4 et la droite EF est dans le plan horizontal de projection.

— **316.** — Établir les projections d'un cube dont une arête est *a* (3) *b* (7), sachant que les deux faces adjacentes sont également inclinées sur le plan horizontal.

— **317.** — On donne un octaèdre régulier ABCDEF; on connaît la diagonale *a* (2) *f* (7); construire sa projection sachant que l'arête ED est horizontale.

— **318.** — Construire une parabole située dans un plan donné par son échelle de pente, connaissant le foyer et le sommet.

— **319.** — Mener par une droite donnée des plans faisant avec deux droites données Δ, Δ' des angles donnés. Épure en géométrie cotée, en prenant la droite Δ horizontale.

— **320.** — Un cône a pour sommet le point *s* (10) et pour base un limaçon de Pascal, dans le plan horizontal. Mener à ce cône des plans tangents par la droite *a* (3) *b* (11).

— **321.** — Déterminer un cône de révolution ayant pour axe une droite donnée et tangent à un plan donné. Déterminer son angle.

— **322.** — Mener la normale commune à une droite *a*(3) *b*(8) et à un cylindre dont la base est un cercle de centre O dans le plan horizontal et qui a O*g* pour direction de génératrices.

— **323.** — On considère un cône de sommet *s* (8) dont la base est un cercle situé dans le plan horizontal de cote 0. Déterminer la section par un plan P défini par son échelle de pente. Tangente en un point. Points sur le contour apparent. Les sections planes ont-elles des éléments communs lorsqu'on fait varier arbitrairement le plan sécant?

— **324.** — Un cône de sommet *s* a pour base dans le plan horizontal une parabole; un cylindre a pour base dans le même plan une hyperbole; les deux surfaces ont une génératrice commune *sa*. Trouver leur intersection. Points remarquables.

— **325.** — Deux cylindres ont pour bases, dans le plan horizontal, l'un une hyperbole de centre *o*, l'autre une hyperbole de centre ω. Les génératrices du premier sont parallèles à *oc* (*c* a pour cote 2) et celles du second parallèles à ω*c*. Déterminer l'intersection. Branches infinies.

— **326.** — Un cylindre a sa base dans le plan vertical V suivant un cercle *o* (4); ses génératrices sont horizontales. Un cône de sommet *s* (8) a pour base un cercle ω (2) dans le plan vertical T. Intersection.

— **327.** — Dans un plan vertical V, on considère une circonférence de centre *o* (5), dont les génératrices sont des horizontales de direction δ; de même ω (5) est le centre d'un cercle dans le plan vertical T, base d'un cylindre dont les génératrices sont des horizontales de direction γ; les rayons R et R' des deux circonférences *o* et ω sont donnés. Déterminer un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point.

— **328.** — On donne un tétraèdre *sabc* défini par le triangle *abc* dans le plan horizontal et la cote du sommet. Un cylindre a pour base le cercle inscrit dans la face *sab* et ses génératrices sont parallèles à *sc*; un autre cylindre a pour base le cercle inscrit dans la face *sbc* et ses génératrices sont parallèles à *sa*; déterminer l'intersection.

— **329.** — Branches infinies dans l'intersection d'un cône et d'un cylindre.

— **330.** — Un tétraèdre a pour arêtes un segment de droite *ab* (de cote 0) et un autre segment *cd*, horizontal (de cote 4). Établir la ponctuation et déterminer le rayon de la sphère circonscrite.

— **331.** — Déterminer la sphère circonscrite à un tétraèdre dont les sommets sont *a* (8), *b* (5), *c* (4), *d* (7).

— **332.** — Construire une sphère passant par trois points *a* (4), *b* (4), *c* (2) et tangente à une droite donnée (l'horizontale *h* de cote 0).

— **333.** — Déterminer une sphère tangente à un plan P donné en un point *a* (3) et tangente à une horizontale de cote 6.

— **334.** — Mener par un point donné une droite tangente à deux sphères de rayons donnés. Épure en géométrie cotée : le point *a* (5), les centres des deux sphères *o* (2), ω (7).

— **335.** — On considère une sphère ω, un cône de révolution à axe vertical dont le demi-angle au sommet est de 45°. On donne un point A dans le plan horizontal du centre de la sphère. Mener par ce point une droite tangente à la sphère et au cône; faire l'épure en géométrie cotée : *a* (5), ω (5), *s* (8).

— **336.** — On donne une sphère de centre *o* (2) et de rayon donné, et une droite *a* (2) *b* (5). Intersection de la droite et de la sphère.

10337. — Intersection de deux sphères données : o (2), ω (5). Axes de la projection.

— **338.** — Dans le plan horizontal, on donne une ellipse qui en tournant autour de son axe z engendre un ellipsoïde. Un point lumineux s, dont la cote est quatre fois le rayon du cercle d'équateur, donne une ombre propre. Déterminer la courbe d'ombre.

— **339.** — Mener par l'horizontale h (6) un plan tangent à un hyperboloïde de révolution à axe vertical o, engendré par la rotation d'une droite a (3) b (6).

— **340.** — Un tétraèdre dont le sommet est s (10) a sa base abc dans le plan horizontal : 1° déterminer les hauteurs de ce tétraèdre ; 2° on considère trois hauteurs, trouver la trace de la surface engendrée par une droite s'appuyant sur ces trois hauteurs.

— **341.** — On donne une droite a (8) b (0) ; on mène ensuite cd, telle que sa pente soit le double de celle de ab. Construire la projection horizontale du paraboloïde hyperbolique défini par les horizontales s'appuyant sur les deux droites données.

Géométrie descriptive.

— **342.** — On donne une droite de profil $(ab, a'b')$ et un point (c, c'). Une droite a cd pour projection horizontale ; déterminer sa projection verticale $c'd'$, sachant qu'elle est perpendiculaire à $(ab, a'b')$.

— **343.** — On donne une droite dans le plan horizontal et une droite dans le plan vertical ; trouver leur normale commune.

— **344.** — Construire un angle dièdre d'un tétraèdre régulier, d'un octaèdre régulier.

— **345.** — Faire l'épure d'un cube ABCDEFGH, dont on connaît le sommet E, situé dans le plan horizontal, la cote de F, la longueur du côté, et dont on assujettit l'arête FB à être de front.

— **346.** — Étant donnés deux plans PQ', RS', faire un changement de plan vertical, de manière à rendre leurs traces verticales parallèles.

— **347.** — Dans un plan $P\alpha Q'$, on considère une droite (d, d') (directrice) et un point (f, f'), foyer d'une parabole. Mener à cette parabole des tangentes par un point quelconque (s, s') du plan.

— **348.** — On donne dans un plan $P\alpha Q'$ un point (a, a'), centre d'un cercle de rayon donné, qui est la base d'un cylindre de génératrices parallèles à (δ, δ'). Trouver les contours apparents horizontal et vertical du cylindre.

— **349.** — Un cône a pour base un cercle du plan horizontal et pour sommet (s, s') : déterminer l'intersection avec une droite de profil $(ab, a'b')$.

(A suivre.)

SUJETS DE CONCOURS

ÉCOLE NAVALE

Concours de 1920.

Algèbre, analyse et trigonométrie.

2484. — On considère la relation

$$y = \sin(4 \arcsin x),$$

où l'on désigne par $\arcsin x$ l'un quelconque des arcs dont le sinus est x.

1° Si l'on se donne une valeur de x, combien lui correspond-il de valeurs de y et quelles relations y a-t-il entre elles ? Réciproquement, si l'on se donne une valeur de y, combien lui correspond-il de valeurs de x ?

2° Tracer la courbe (C) représentant la variation des diverses fonctions y de x, définies par la relation précédente (ou, si l'on préfère, la variation des « diverses branches de la fonction multiforme » définie par la relation). Indiquer notamment les symétries de la courbe (C), ses points de rencontre avec l'axe des x et les tangentes en ces points.

3° Former la relation algébrique

$$F(x, y) = 0,$$

(F polynome en x, y) qui existe entre x et y.

4° Chercher les aires des boucles de la courbe (C).

2485. — On considère la fonction

$$f_0(x) = e^{x^2} x^2 + x,$$

et on forme ses dérivées successives qu'on désigne par

$$f_1(x), \quad f_2(x), \ \ldots, \quad f_i(x), \ \ldots.$$

1° Montrer que $f_i(x)$ est le produit de e^x par un polynome du second degré en x :

$$f_i(x) = e^x[x^2 + P(i).x + Q(i)];$$

$P(i)$ et $Q(i)$ sont des fonctions simples de l'entier i (positif ou nul) dont on indiquera les expressions.

2° En désignant par i un entier quelconque (positif ou nul), on forme la série

$$Q(i) + \frac{Q(i+1)}{1}.x + \frac{Q(i+2)}{2!}.x^2 + \ldots + \frac{Q(i+p)}{p!}.x^p + \ldots.$$

Montrer qu'elle est convergente quel que soit x et calculer sa somme. On pourra examiner d'abord le cas de $i = 0$.

3° Calculer les intégrales successives :

$$f_{-1}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_0(x).dx, \qquad f_{-2}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{-1}(x).dx, \ \ldots \qquad f_{-i}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{-i-1}(x).dx, \ \ldots.$$

et montrer que $f_{-i}(x)$ peut être mis sous la forme

$$f_{-i}(x) = e^x[x^2 + P(-i).x + Q(-i)].$$

Résoudre les questions du précédent paragraphe (n° 2) pour un entier i négatif.

NOTE. — On désigne par $p!$, suivant une notation usuelle, le produit des p premiers nombres entiers.

Géométrie analytique.

2486. — On donne, en coordonnées rectangulaires, une ellipse (E) ayant pour équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. On choisit dans son plan un point A non situé sur les axes de coordonnées, ayant pour coordonnées (p, q) et l'on considère la droite variable (D) ayant pour équation $2qx(t+1) - 2py(t-1) = pq(t^2-1)$, où t désigne un paramètre variable, le point A restant fixe.

1° Sur la droite (D) il y a un point M (en général unique) tel que sa polaire par rapport à (E) est perpendiculaire à (D). Lieu de ce point M lorsque (D) varie.

2° Montrer qu'il y a, en général, deux positions de la droite (D), différentes des axes de coordonnées, qui sont des normales à l'ellipse (E). Former l'équation qui donne les deux valeurs de t correspondant à ces deux droites que l'on désignera par (D_1) et (D_2). Discuter la réalité de ces droites suivant le choix du point A. Quelle est l'équation de la droite qui joint les pieds de ces deux normales à l'ellipse?

3° Soit B le point de rencontre des droites (D_1) et (D_2) supposées distinctes. Calculer les coordonnées de B en fonction de p et q. Quel lieu doit décrire le point A pour que le point B se déplace sur une normale donnée à l'ellipse (E)? (Ce lieu se décompose.)

Mécanique.

2487. — Un corps solide est formé par une calotte sphérique invariablement liée à une tige rectiligne. La calotte sphérique, homogène, d'épaisseur négligeable, a une hauteur de 30^{cm}; elle est limitée par une circonférence (C) de 90^{cm} de diamètre et pèse 200^g. La tige rectiligne OS est fixée au sommet S de la calotte et passe par le centre de la circonférence (C): elle est homogène, a une longueur de 90^{cm} et un poids de 300^g. Le corps est en équilibre sur un plan horizontal poli qu'il touche par l'extrémité O de la tige et par un point A de la circonférence (C).

Calculer les réactions du plan.

2488. — Un point matériel M dont la masse est égale à l'unité est attiré par un centre fixe O; l'intensité de la force attractive est mesurée par le même nombre que la distance OM. Le milieu dans lequel se déplace le point M oppose une résistance tangente à la trajectoire, de sens opposé à celui du vecteur vitesse et dont l'intensité est mesurée par le même nombre que la vitesse. A l'instant initial, le point M est lancé de la position M_0 et l'extrémité V_0 du vecteur vitesse initiale forme avec les points O et M_0 un triangle équilatéral.

1° Étudier le mouvement du point M.

2° Calculer le travail de la résultante des forces agissant sur le point M lorsque ce point va de M_0 au point O sur sa trajectoire.

3° Désignons par $\mathcal{A}$ l'aire balayée par le rayon vecteur OM à partir de la position initiale OM_0. Montrer que l'on peut trouver une constante C telle que le logarithme de la différence $C - \mathcal{A}$ varie proportionnellement au temps. Démontrer que ce résultat subsiste dans le mouvement curviligne d'un point soumis à une force

centrale quelconque et à une résistance représentée par un vecteur proportionnel au vecteur vitesse et de sens opposé, les conditions initiales étant arbitraires.

Calcul.

Résolution de l'équation

$$f(x) = x^3 + x^2 - 10x - 8 = 0.$$

On pose $x = \frac{ay - 1}{3}$, $a = 2\sqrt{31}$, et on obtient l'équation en y

$$y^3 - \frac{3}{4}y - \frac{d}{4} = 0, \qquad d = \frac{124}{2\sqrt{31^3}}.$$

En posant, enfin, $d = \cos\alpha$, les racines de l'équation en y sont

$$y_1 = \cos\frac{\alpha}{3}, \qquad y_2 = \cos\frac{\alpha + 2\pi}{3}, \qquad y_3 = \cos\frac{\alpha + 4\pi}{3}.$$

1° Calculer y_1, y_2, y_3 et les racines correspondantes de l'équation proposée : x_1, x_2, x_3.

2° Vérifications : calculer $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$;

$$x_1 + x_2 + x_3, \qquad x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2, \qquad x_1x_2x_3.$$

Épure.

Prendre comme ligne de terre le petit axe de la feuille.

On désigne par (H) et (V) le plan horizontal et le plan vertical de projection.

On donne dans (H) une circonférence (C). Son centre O est sur le grand axe de la feuille, à 7cm en avant de (V); son rayon a pour longueur 6cm. On désigne par A l'extrémité du rayon OA de cette circonférence incliné à 45° sur la ligne de terre, A étant à droite de O et plus près que O de la ligne de terre. On considère le cône ayant pour base (C) et pour sommet le point (S) qui est situé à 10cm au-dessus de (H), à 10cm en avant de (V) et qui se projette à 3cm à gauche du grand axe de la feuille. Soit (P) le plan mené par O parallèlement au plan tangent au cône suivant la génératrice SA et soit (Q) le plan de front mené par le point le plus en avant de la section du cône par le plan (P). Représenter la portion solide du cône située au-dessus de (H), au-dessous de (P) et en arrière de (Q).

Physique.

Pour projeter sur un écran l'image *agrandie* d'un objet qui en est situé à une distance donnée D, on dispose de deux lentilles minces convergentes dont les distances focales sont respectivement égales à f et f', et qu'on place l'une derrière l'autre de manière que leurs axes optiques coïncident.

1° Montrer qu'à chaque valeur de la distance e entre les deux lentilles correspond au plus une valeur déterminée du grandissement G de l'image *agrandie* et que cette valeur est indépendante de l'ordre dans lequel les lentilles sont placées.

2° Montrer que, si l'image est droite par rapport à l'objet, son grandissement est maximum lorsque la distance e entre les deux lentilles est égale à la moitié de la distance D entre l'objet et l'écran. Trouver la condition à laquelle doivent satisfaire D, f et f' pour que la formation d'une image droite soit possible.

3° Montrer que, si l'image est renversée, son grandissement est maximum en valeur absolue lorsque la distance entre les lentilles est nulle. Trouver la condition pour que la formation d'une image renversée soit possible.

4° Pour quelle valeur de la distance D (les distances focales étant données) le grandissement maximum est-il le même pour l'image droite et pour l'image renversée?

5° Déterminer comment varient ces deux grandissements maxima en fonction de la distance D supposée grande par rapport à f et f'.

6° Dans le cas où f et f' sont égaux, déterminer les positions des lentilles qui fournissent ces grandissements maxima, les positions correspondantes des éléments principaux (foyers et plans principaux) du système centré constitué par l'ensemble des deux lentilles ainsi que les valeurs des grandissements maxima.

Examiner le cas particulier où $D = 9f$.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

Coulommiers. — Imprimerie PAUL BRODARD.

31e Année. Février 1921. N° 5.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LES HÉLICES CYLINDRIQUES

par M. **Anzemberger**, professeur au lycée de Besançon.

Définition. — Étant donnée une courbe plane (Γ), considérons le cylindre qui admet (Γ) pour section droite; à chaque point m de (Γ) faisons correspondre le point M de la génératrice de m tel que mM soit porportionnel à l'abscisse curviligne de m. Le lieu du point M est une *hélice cylindrique* (C) de base (Γ).

Prenons pour plan xOy le plan de la courbe (Γ), pour direction Oz la direction des génératrices du cylindre. Nous définirons la courbe (Γ) par les expressions des coordonnées d'un de ses points en fonction de l'arc σ

$$\xi = f(\sigma), \qquad \eta = g(\sigma);$$

f, g sont liés par des relations que nous allons établir.

1°
$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 = (f'^2 + g'^2)\, d\sigma^2,$$
d'où
$$f'^2 + g'^2 = 1. \tag{1}$$

2° Soient α_1, β_1 les cosinus directeurs de la demi-tangente correspondant au sens des arcs croissants, α'_1, β'_1 ceux de la demi-normale faisant avec la demi-tangente précédente l'angle $+\frac{\pi}{2}$.

$$\alpha_1 = \frac{d\xi}{d\sigma} = f', \qquad \beta_1 = \frac{d\eta}{d\sigma} = g',$$

d'où

$$f'' = \frac{d\alpha_1}{d\sigma} = \frac{\alpha'_1}{\rho}, \qquad g'' = \frac{d\beta_1}{d\sigma} = \frac{\beta'_1}{\rho},$$

ρ étant le rayon de courbure de la base. Mais

$$\alpha'_1 = -\beta_1 = -g', \qquad \beta'_1 = \alpha_1 = f'.$$

et les relations précédentes deviennent

$$f'' = -\frac{g'}{\rho}, \qquad g'' = \frac{f'}{\rho}, \tag{2}$$

d'où

$$f'g'' - g'f'' = \frac{1}{\rho}. \tag{3}$$

Les coordonnées d'un point de l'hélice (C) sont alors

$$x = f(\sigma), \qquad y = g(\sigma), \qquad z = k\sigma, \tag{4}$$

k étant une constante, et f, g liés par les relations (1), (2), (3).

Longueur d'arc. — D'après (1),

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (f'^2 + g'^2 + k^2)d\sigma^2 = (1 + k^2)d\sigma^2,$$
$$ds = \sqrt{1 + k^2}\, d\sigma;$$

en faisant correspondre sur (C) et (Γ) les origines et les sens positifs des arcs, on voit que

$$s = \sqrt{1 + k^2}\,\sigma; \tag{5}$$

l'arc d'hélice est proportionnel à l'arc correspondant de la base.

Réciproquement, cherchons les courbes qui satisfont à la propriété précédente. Définissons une telle courbe par les équations

$$x = f(\sigma), \qquad y = g(\sigma), \qquad z = \lambda(\sigma);$$

toujours d'après (1),

$$ds^2 = (f'^2 + g'^2 + \lambda'^2)d\sigma^2 = (1 + \lambda'^2)d\sigma^2;$$

pour que s soit proportionnel à σ, il faut et il suffit que λ' soit constant, d'où, par un choix convenable de l'origine des arcs, $\lambda = k\sigma$, et la courbe est une hélice.

Remarque. z est proportionnel à σ, donc, d'après ce qui précède, à s :

$$\sigma = \frac{s}{\sqrt{1 + k^2}}, \qquad z = \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}}\, s;$$

la cote d'un point de l'hélice est proportionnelle à l'arc correspondant. Réciproquement, définissons la courbe comme précédemment :

$$ds^2 = (1 + \lambda'^2)d\sigma^2, \qquad dz = \lambda' d\sigma;$$

pour que z soit proportionnel à s, il faut et il suffit que

$$\frac{dz}{ds} = h, \qquad \frac{\lambda'^2}{1 + \lambda'^2} = h^2,$$

donc que λ' soit constant, et, comme précédemment, la courbe est une hélice.

(*A suivre.*)

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2304. — *Une ligne droite et une circonférence tournent chacune d'un mouvement uniforme avec des vitesses respectives v et w autour d'un point fixe O commun aux deux lignes.*

1° *Chercher le lieu décrit par le point de rencontre M des deux lignes.*

Le construire dans l'hypothèse où $m = \frac{v}{w} = -1$. *On déterminera le rayon de courbure aux points*

remarquables, l'aire d'une boucle fermée de cette courbe, et le volume décrit par cette boucle tournant autour de son axe de symétrie.

Montrer qu'il existe deux droites qui interceptent sur la perpendiculaire au rayon OM *en* M *une longueur constante.*

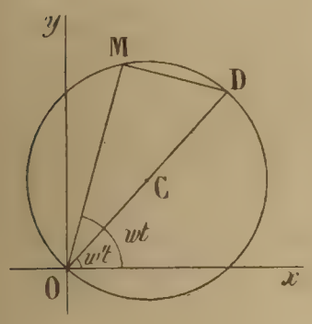
2°. *Toujours dans l'hypothèse* $m = -1$, *déterminer les composantes de la vitesse et de l'accélération du point* M *suivant le rayon vecteur et la perpendiculaire à ce rayon dans le sens des arcs croissants.*

Porter sur le vecteur OM *une longueur* OP *égale à la vitesse du point* M ; *construire le lieu du point* P.

(*École nationale supérieure des mines, concours de* 1919.)

1. Nous prenons pour origine des temps l'instant où la droite passe par le centre du cercle, et pour axe polaire la position de la droite à cet instant, le point O étant le pôle.

A l'instant t, la droite OM et le diamètre OCD du cercle font respectivement avec Ox les angles wt et $w't$; par suite, si ρ et ω sont les coordonnées polaires du point M, on a



$$\rho = \mathrm{OD}\cos\mathrm{MOD} = 2\mathrm{R}\cos(w - w')t, \qquad \omega = wt,$$

R désignant le rayon du cercle.

En éliminant t entre ces deux relations, nous obtenons l'équation polaire du lieu du point M,

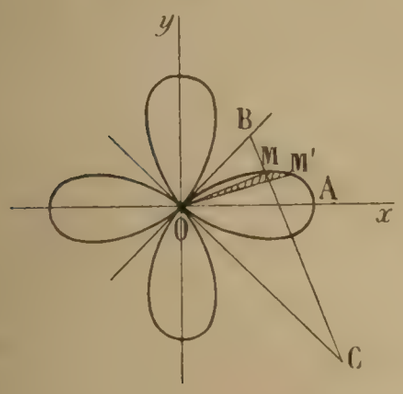
$$\rho = 2\mathrm{R}\cos\left(1 - \frac{w'}{w}\right)\omega.$$

Si $\frac{w'}{w} = -1$, cette équation devient

$$\rho = 2\mathrm{R}\cos 2\omega.$$

Elle représente une courbe symétrique par rapport aux deux axes et aux bissectrices de ces axes. Pour la construire, on fait varier ω de 0 à $\frac{\pi}{4}$; ρ décroît de 2R à 0, et on obtient l'arc de courbe AMO, qui est normal à Ox au point A (OA = 2R) et qui est tangent en O à la bissectrice de l'angle xOy.

En achevant par symétrie par rapport aux axes et aux bissectrices nous obtenons la courbe ci-contre, bien connue sous le nom de *rosace à quatre branches*.



Le rayon de courbure est donné par la formule

$$r = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}.$$

On a $\rho = 2\mathrm{R}\cos 2\omega$, $\rho' = -4\mathrm{R}\sin 2\omega$, $\rho'' = -8\mathrm{R}\cos 2\omega$; on en déduit aisément

$$\rho^2 + \rho'^2 = 4\mathrm{R}^2(1 + 3\sin^2 2\omega),$$
$$\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = 4\mathrm{R}^2(5 + 3\sin^2 2\omega),$$

et

$$r = 2\mathrm{R}\cdot\frac{(1 + 3\sin^2 2\omega)^{\frac{3}{2}}}{5 + 3\sin^2 2\omega}.$$

Au point A($\omega = 0$) on a $r = \frac{2\mathrm{R}}{5}$, et au point O $\left(\omega = \frac{\pi}{4}\right)$, $r = 2\mathrm{R}$.

L'aire S d'une boucle est égale au double de l'aire limitée par l'arc AMO et l'axe polaire. On a donc

$$\mathrm{S} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2\, d\omega = 4\mathrm{R}^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\omega\, d\omega = 2\mathrm{R}^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 4\omega + 1)\, d\omega,$$

ou

$$\mathrm{S} = 2\mathrm{R}^2 \left| \frac{\sin 4\omega}{4} + \omega \right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\mathrm{R}^2}{2}.$$

Calculons maintenant le volume V engendré par l'aire OAM tournant autour de Ox. Nous décomposons cette aire en secteurs infiniment petits tels que OMM ; d'après le théorème de Guldin, le volume engendré par cette aire est égal à la valeur de l'aire, soit $\frac{1}{2}\rho^2 d\omega$, multipliée par la circonférence que décrit le centre de gravité de l'aire. Ce centre de gravité est sur OM, à la distance $OG = \frac{2}{3}OM = \frac{2}{3}\rho$; sa distance à Ox est $\frac{2}{3}\rho \sin\omega$, et la circonférence décrite est $2\pi \cdot \frac{2}{3}\rho \sin\omega$.

Le volume engendré par l'aire OMM′ est donc

$$\frac{1}{2}\rho^2 d\omega . 2\pi . \frac{2}{3}\rho \sin\omega \qquad \text{ou} \qquad \frac{16\pi R^3}{3}\cos^3 2\omega \sin\omega\, d\omega,$$

et, par suite, le volume demandé est

$$V = \frac{16\pi R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 2\omega \sin\omega\, d\omega.$$

En utilisant la relation $4\cos^3\theta = \cos 3\theta + 3\cos\theta$, on a

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 6\omega \sin\omega + 3\cos 2\omega \sin\omega)\, d\omega.$$

et, en transformant les produits en sommes au moyen de la formule

$$2\sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b),$$

on obtient

$$V = \frac{2\pi R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 7\omega - \sin 5\omega + 3\sin 3\omega - 3\sin\omega)\, d\omega.$$

On en déduit

$$V = \frac{2\pi R^3}{3}\left[-\frac{\cos 7\omega}{7} + \frac{\cos 5\omega}{5} - \cos 3\omega + 3\cos\omega\right]_0^{\frac{\pi}{4}},$$

ou

$$V = \frac{16\pi R^3}{105}(8\sqrt{2} - 9).$$

La perpendiculaire en M à la droite OM rencontre les bissectrices des axes aux points B et C et l'on a, dans les triangles rectangles OMB, OMC,

$$MB = \rho\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \omega\right), \qquad MC = \rho\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \omega\right).$$

et, en ajoutant,

$$BC = \rho\left[\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \omega\right) + \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \omega\right)\right] = \rho\left[\frac{1 - \mathrm{tg}\,\omega}{1 + \mathrm{tg}\,\omega} + \frac{1 + \mathrm{tg}\,\omega}{1 - \mathrm{tg}\,\omega}\right],$$

ou

$$BC = 2R\cos 2\omega . \frac{2(1 + \mathrm{tg}^2\omega)}{2 - \mathrm{tg}^2\omega} = 4R,$$

ce qui démontre la proposition énoncée. Les droites cherchées sont les bissectrices des axes.

On déduit de là que la rosace à quatre branches est la podaire de l'hypocycloïde à quatre rebroussements par rapport à son centre.

2. Nous avons trouvé au début

$$\rho = 2R\cos(w - w')t, \qquad \omega = wt;$$

pour $w' = -w$, les formules deviennent

$$\rho = 2R\cos 2wt, \qquad \omega = wt.$$

Les composantes de la vitesse suivant le rayon vecteur et la perpendiculaire à ce rayon dans le sens des arcs croissants sont

$$v_R = \frac{d\rho}{dt}, \qquad v_P = \rho\frac{d\omega}{dt}.$$

On en déduit

$$v_R = -4Rw\sin 2wt, \qquad v_P = 2Rw\cos 2wt.$$

Les composantes de l'accélération sont

$$\gamma_R = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2, \qquad \gamma_P = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\omega}{dt}\right),$$

ou

$$\gamma_R = -10Rw^2\cos 2wt, \qquad \gamma_P = -8Rw^2\sin 2wt.$$

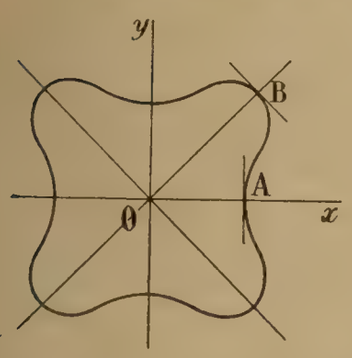
La grandeur de la vitesse est

$$v = \sqrt{v_R^2 + v_P^2} = 2Rw\sqrt{1 + 3\sin^2 2wt};$$

par suite, le lieu du point P a pour équation polaire

$$\rho = 2Rw\sqrt{1 + 3\sin^2 2\omega}.$$

Cette équation représente une courbe symétrique par rapport aux axes et par rapport aux bissectrices de ces axes. Pour la construire nous faisons varier ω de 0 à $\frac{\pi}{4}$; ρ croît de $2R\omega$ à $4R\omega$, et nous avons l'arc de courbe AB. Il n'y a plus qu'à achever par symétrie.



Comme on a

$$\rho' = 2Rw\cdot\frac{6\sin 2\omega\cos 2\omega}{\sqrt{1 + 3\sin^2 2\omega}},$$

on en tire

$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{1 + 3\sin^2 2\omega}{6\sin 2\omega\cos 2\omega},$$

et ceci montre que les tangentes en A et B sont perpendiculaires aux rayons vecteurs correspondants.

GASTON SINGIER, professeur au lycée de Valenciennes.

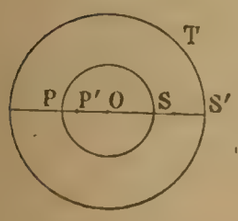
Bonnes solutions par MM. G. LACH, à Douai; M., à Guéret; M. ROUX, au Creusot; TOPIN, à Grandvilliers; Marcel VASSEUR, à Calais.

Note de la Rédaction. — Nous avons à signaler de nombreuses solutions de la question 2297 : MM. G. LACH, à Douai; A.-O. GUIBERT, à Nantes; R. FROYER; J. BOUCHARY, étudiant; G. SINGIER; L. HERMITTE; L. CHIGANNE; M., à Guéret; F. MILLON; L. LONG; H. DUMAS.

PHYSIQUE ET CHIMIE

École polytechnique, concours de 1919.

2300. — 1° *Un tube de verre* T, *dont la section est formée de deux cercles de centre* O, *a pour diamètre extérieur* $2OS' = 4^{mm}$. *Il porte un repère* P *sur sa paroi intérieure. Parmi les rayons lumineux issus de* P, *on considère ceux qui, de part et d'autre du diamètre* POSS', *forment une lame plane perpendiculaire à l'axe du tube et d'angle au sommet très petit. Ils donnent lieu, pour un observateur placé quelque part sur le prolongement de* POSS', *à une image* P'. *Calculer le rayon intérieur* x *du tube sachant que la distance* PP' *a pour valeur* $PP' = \frac{x}{5}$ *et que l'indice* n *du verre est égal à* $\frac{3}{2}$.



On précisera les conventions adoptées pour les signes des segments dans la formule des foyers conjugués.

2° On introduit dans ce tube une goutte G d'un liquide pesant 23^{mg} et mouillant parfaitement le verre. Elle y occupe, à la température ambiante, une longueur $l = 28^{mm},95$ comptée entre les plans tangents aux sommets des deux ménisques supposés sphériques. Calculer la densité ϱ du liquide.

3° Sachant que, dans l'expérience de Jurin effectuée à la même température, avec le même liquide et le même tube, le volume du liquide soulevé est égal à celui de la goutte G, calculer en unités C. G. S., la tension superficielle A du liquide à la température de l'expérience.

4° Exprimer ϱ et A dans le système d'unités admettant pour grandeurs fondamentales le millimètre, le milligramme-force et la minute.

1° On peut appliquer la formule des dioptres, car les rayons considérés se propagent comme dans le plan méridien d'une lentille épaisse. Le point P donne par rapport au premier dioptre une image P_1 qui donne à son tour dans le second dioptre l'image P'.

Posons $SO = R$, $SO = R'$, $OP = m$, $OP_1 = m_1$, $OP' = m'$. Prenons pour origine le point O et comme sens positif le sens inverse de la lumière incidente. On a, en appliquant successivement aux deux dioptres l'équation aux distances conjuguées,

$$\frac{1}{m_1} - \frac{n}{m} = \frac{1-n}{-R} \quad \text{et} \quad \frac{n}{m'} - \frac{1}{m_1} = \frac{n-1}{-R'}, \quad \text{d'où} \quad \frac{n}{m'} - \frac{n}{m} = (n-1)\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right).$$

Or $n = \frac{3}{2}$, $m = x$, $m' = \frac{4}{3}x$, $R = x$, $R' = 2$, et le calcul donne

$$x = 0^{mm},5.$$

2° Le volume de la goutte est égal au volume d'un cylindre de rayon x et de longueur $l + 2x$, diminué du volume d'une sphère de rayon x, soit

$$\pi x^2(l + 2x) - \frac{4}{3}\pi x^3 = \frac{\pi x^2}{3}(3l + 2x).$$

En remplaçant les lettres par les nombres qu'elles représentent, on trouve presque exactement 23^{mm^3}, donc

$$\varrho = 1.$$

3° Dans l'expérience de Jurin, le poids du liquide soulevé est équilibré par la tension superficielle qui règne le long du pourtour du ménisque, $2\pi x$. Le poids est de 23^{mg}. On aura donc, en unités C. G. S.,

$$2\pi \times 0{,}05 \times A = 0{,}023 \times 981,$$
$$A = 71{,}8.$$

4° Les dimensions de la densité en fonction de la longueur, du temps et de la force sont

$$\Delta = FL^{-4}T^2.$$

Désignons par les lettres non accentuées les unités C. G. S. et par les lettres accentuées les unités du nouveau système; on a

$$\frac{\Delta}{\Delta} = \frac{F}{F}\left(\frac{L}{L}\right)^{-4}\left(\frac{T}{T}\right)^2.$$

Or, $\frac{F}{F}$ représente la nouvelle unité de force évaluée en dynes, soit $0{,}001 \times 981$.

De même $\frac{L}{L} = 0{,}1$ et $\frac{T}{T} = 60$. On en déduit

$$\frac{\Delta}{\Delta} = 2{,}83 \times 10^{-4}.$$

Or, les nombres qui mesurent une même grandeur sont dans un rapport inverse de celui des unités. Donc, si ρ' est la nouvelle évaluation de la densité, $\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\Delta}{\Delta'}$,

$$\rho' = 2,83 \times 10^{-8}.$$

De même, les dimensions de la tension superficielle sont

$$B = FL^{-1}.$$

On a donc

$$\frac{B}{B'} = \frac{F}{F'}\left(\frac{L}{L'}\right)^{-1} = \frac{1}{0,001 \times 981} \times 0,1 = \frac{100}{981},$$

$$A' = 71,8 \times \frac{100}{981} = 7,32.$$

On peut encore raisonner de la manière suivante. Cherchons la valeur en grammes de la nouvelle unité de masse M' : c'est la masse à laquelle le poids du milligramme, qui vaut en dynes $0,001 \times 981$, donne une accélération d'un millimètre par minute, soit $\frac{0,1}{3\,600}$ C. G. S. Donc

$$M' = 0,001 \times 981 \times 36\,000.$$

La masse d'un millimètre cube de liquide est $0^g,001$ et elle contient M' un nombre de fois

$$\rho' = \frac{0,001}{0,001 \times 981 \times 36\,000} = 2,83 \times 10^{-8}.$$

De même, la nouvelle unité de force valant en dynes $0,001 \times 981$, une dyne vaut dans le nouveau système $\frac{1}{0,001 \times 981}$; $71^d,8$ valent $\frac{71,8}{0,001 \times 981}$, ce qui fait, par millimètre,

$$A' = \frac{7,18}{0,981} = 7,32.$$

JEAN BOUCHARY.

Bonne solution de M. A.-O. GUIBERT, à Nantes.

2301. — *Étant donnée une solution très étendue de potasse qui a été additionnée d'une certaine quantité de chlorure de potassium, on y dirige à froid un courant de chlore jusqu'à ce qu'il cesse d'être absorbé et l'on admet qu'à ce moment il n'y a pas un excès de chlore libre dissous et que le volume de la solution n'a pas été modifié.*

Après avoir constaté que le liquide ainsi obtenu a des propriétés nettement oxydantes, on en prend 10^{cm3} *que l'on étend d'eau de façon à en faire un litre et l'on cherche, au moyen d'une solution titrée d'acide arsénieux, quel est le pouvoir oxydant du liquide dilué. On constate ainsi que* 10^{cm3} *d'une solution normale d'acide arsénieux exigent, pour leur oxydation,* $44^{cm3},64$ *du liquide dilué.*

D'autre part, on prend 500^{cm3} *de ce même liquide dilué; on les évapore lentement à siccité et l'on chauffe progressivement le résidu jusqu'à la température du rouge. Le résidu de cette calcination est repris par l'eau et la solution additionnée d'azotate d'argent. On obtient un précipité dont le poids est de* $2^g,87$.

Déduire de ces données les quantités de potasse KOH *et de chlorure de potassium contenues dans* 100^{cm3} *de la solution initiale.*

On indiquera les réactions auxquelles donnent lieu les diverses opérations mentionnées et l'on dira au moyen de quels réactifs on pourra vérifier que le liquide provenant de l'action du chlore sur le mélange initial est doué de propriétés oxydantes.

Poids atomiques : $H = 1$; $Cl = 35,5$; $O = 16$; $K = 39$; $Ag = 108$.

On entend par solution normale d'acide arsénieux une solution telle qu'elle exige, pour son oxydation, un volume de chlore égal au sien, dans les conditions normales de température et de pression.

On prendra pour volume moléculaire celui de l'oxygène, calculé dans les conditions normales, avec la densité de ce gaz égale à **1,105** *et la masse du litre d'air égale à* **1g,293**.

Soient x et y les nombres de millimolécules de potasse et de chlorure de potassium contenus respectivement dans 100^{cm3} de la solution initiale, de telle sorte que la composition de ces 100^{cm3} sera représentée par

$$xKOH + yKCl.$$

Le chlore agit exclusivement sur la potasse suivant l'équation

$$\frac{x}{2}(2KOH + Cl^2 = KCl + ClOK + H^2O).$$

Les 10^{cm3} prélevés et étendus à un litre contiennent seulement la dixième partie de ce qui se trouvait dans les 100^{cm3}, c'est-à-dire

$$\frac{x}{20}ClOK + \left(\frac{x}{20} + \frac{y}{10}\right)KCl,$$

et les $44^{cm3},64$ prélevés sur ce litre représentent

$$\frac{44,64}{1\,000}\left(\frac{x}{20}ClOK + \left(\frac{x}{20} + \frac{y}{10}\right)KCl\right).$$

Or, l'hypochlorite réagit sur l'acide arsénieux suivant l'équation

$$ClOK + AsO^3H^3 = KCl + AsO^4H^3,$$

c'est-à-dire exclusivement par l'oxygène qu'il contient et qui équivaut à un volume double de chlore. L'hypochlorite employé, équivalant à 10^{cm3} de chlore, contient donc 5^{cm3} d'oxygène.

D'autre part, le volume millimoléculaire est égal, d'après les données, à

$$\frac{32}{1,105 \times 1,293} = 22,4.$$

Le volume d'un milliatome d'oxygène en est la moitié, donc

$$\frac{44,64}{1\,000} \times \frac{x}{20} \times 11,2 = 5, \qquad \text{d'où} \qquad \underline{x = 200}.$$

Les 500^{cm3} évaporés contiennent

$$\frac{500}{1\,000}\left(\frac{x}{20}ClOK + \left(\frac{x}{20} + \frac{y}{10}\right)KCl\right).$$

Sous l'action de la chaleur, l'hypochlorite subit successivement les transformations représentées par les équations suivantes :

$$3ClOK = ClO^3K + 2KCl,$$
$$2ClO^3K = 2KCl + 3O^2.$$

Le résidu contient donc

$$\frac{500}{1\,000}\left(\frac{x}{10} + y\right)KCl = \frac{1}{20}(x + y)KCl.$$

Ce chlorure est précipité par l'azotate d'argent :

$$KCl + AzO^3Ag = AgCl + AzO^3K.$$

Or $AgCl = 143,5$, donc

$$\frac{1}{20}(x + y)143,5 = 2\,870 \qquad \text{d'où} \qquad \underline{y = 200}.$$

Les poids moléculaires de la potasse et du chlorure de potassium étant respectivement 56 et 74,5, on en déduit, pour les quantités demandées, évaluées en grammes,

11,2 de potasse et 14,9 de chlorure de potassium.

Enfin, les principaux réactifs qui permettent de constater les propriétés oxydantes de l'hypochlorite sont : l'indigo, qui est décoloré; l'iodure de potassium, dont l'iode est libéré; les sels ferreux, qui sont changés en sels ferriques; le sulfure de plomb, qui est transformé en sulfate blanc.

Bonnes solutions de MM. Jean Bouchary et Gaston Roy.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1920)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (*Suite*)

III. — Géométrie analytique à trois dimensions.

10433. — Trouver les équations d'une droite passant par le point (1, 2, 3) et rencontrant les deux droites

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{4} \qquad \text{et} \qquad x+y+z=2, \qquad x+y-z=4.$$

— **434.** — Perpendiculaire commune à l'axe des z et à la droite $x=az+p$, $y=bz+q$. Plus courte distance.

— **435.** — Transformation de coordonnées dans l'espace. Déduire la formule $a=b'c''-c'b''$ de la formule $L=yZ-zY$.

— **436.** — Trouver l'angle des deux droites sections du cône $yz+zx+xy=0$ par le plan $x+y+z=0$.

— **437.** — Que représentent les équations $x=\frac{2t}{1+t^2}$, $y=\frac{1-2t^2}{1+t^2}$, $z=\frac{1+2t}{1+t^2}$? Montrer que c'est une ellipse, trouver son plan et son aire.

— **438.** — Normales issues d'un point (α, β, γ) à la surface $z=\frac{axy}{x^2+y^2}$.

— **439.** — Étudier la surface $z=e^{x+y}$.

— **440.** — Trouver la surface engendrée par la projection d'une droite fixe sur un plan qui tourne autour d'une autre droite fixe.

— **441.** — On donne un cône de révolution dont le demi-angle au sommet est égal à 45° et une droite Δ rencontrant l'axe et parallèle à l'une des génératrices. Trouver la surface engendrée par les perpendiculaires communes à Δ et aux génératrices.

— **442.** — Équation du cône circonscrit à la sphère $x^2+y^2+z^2=R^2$ et ayant pour sommet le point $M(x_0, y_0, z_0)$. Quel lieu doit décrire le point M pour que ce cône coupe le plan des xy suivant une hyperbole équilatère?

— **443.** — Trouver l'aire du cylindre $x(x^2+y^2)-a(x^2-y^2)=0$ limitée par le paraboloïde $ay=zx$.

— **444.** — On considère la surface de révolution définie par l'équation $f(S, P)=0$, où l'on pose

$$S \equiv x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz, \qquad P \equiv ux+vy+wz+h.$$

Former l'équation de la méridienne de la surface rapportée à deux axes de son plan.

— **445.** — On considère la courbe C, $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$, et une sphère ayant son centre à l'origine. Un plan tangent à la sphère rencontre la courbe en trois points. Trouver le lieu du centre de gravité de ces trois points.

— **446.** — Lieu des points tels que le rapport de leurs distances à deux droites fixes soit constant.

— **447.** — Trouver le lieu engendré par une droite s'appuyant sur les courbes $y^2-4px=0$, $z=0$ et $x^2-4py=0$, $z=p$, de telle manière que les plans tangents à la surface lieu, aux points où la droite rencontre les paraboles, soient confondus.

— **448.** — On considère la courbe $x=\sin^2 t-\cos^2 t$, $y=2t-2\sin t\cos t$, $z=4\sin t$. Calculer les cosinus directeurs a, b, c de la tangente. Vérifier que $a^2+b^2+c^2=1$. Différentielle de l'arc. Rayon de courbure.

— **449.** — On donne un cône de révolution et une droite parallèle à une génératrice. Trouver le lieu des pieds des perpendiculaires communes à la droite et aux génératrices du cône.

— **450.** — On fait tourner la courbe $x=\frac{a(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$, $y=\frac{2at}{(1+t^2)^2}$, $z=\frac{b}{(1+t^2)^2}$ autour de Oz. Déterminer l'aire engendrée par cette courbe entre les deux plans $z=z_0$ et $z=z_1$.

— **451.** — On considère la sphère $x^2+y^2+z^2=36$ et le cylindre $x^2+y^2=6x$, et on demande de calculer la surface du cylindre comprise entre la sphère et le plan $z=0$.

10452. — On donne la parabole $y^2 - 2px = 0$, $z = 0$, les axes étant rectangulaires, et le point $A(0, 0, p)$. Du point A on abaisse AT perpendiculaire sur la tangente en un point de la parabole. Trouver l'équation du cône engendré par AT quand la tangente varie.

— **453.** — On coupe un tore de collier nul par un plan parallèle au deuxième bissecteur. Trouver l'aire de la section.

— **454.** — Un tore à axe vertical est coupé par un plan de front touchant le collier. Aire de la courbe intersection.

— **455.** — On donne une droite D et un cercle C qui rencontre la droite D en un point O et tel que D se projette sur le plan du cercle suivant un diamètre de ce cercle. Équation de la surface engendrée par les droites perpendiculaires à D et qui rencontrent le cercle. Volume compris entre la surface et le cercle.

— **456.** — On donne une surface de révolution autour de Oz. Trouver la ligne d'ombre propre, les rayons lumineux étant parallèles à la direction α, β, γ. Projection de cette courbe sur le plan des xy; tangente en un point.

— **457.** — Trouver le volume engendré par la rotation de la courbe $y = \frac{x^2}{e^x}$ autour de Ox, de 0 à x.

— **458.** — On considère la courbe définie par les équations $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$, $x^2 + y^2 - ax = 0$, et on demande le lieu des traces des tangentes à cette courbe sur le plan des xy.

— **459.** — On donne un cercle et une droite perpendiculaire au plan du cercle et rencontrant le cercle. Trouver la surface engendrée par une droite variable s'appuyant sur le cercle et la droite donnée et faisant avec le cercle et cette droite des angles égaux.

(*A suivre.*)

SUJETS DE CONCOURS

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

(**Cours spéciaux.**)

Concours de 1920

Algèbre et analyse.

I. — **2489.** On donne la figure ABFCD formée par le carré ABCD de côté 2R diminué du demi-cercle BFCE de rayon R, et dont le centre est en E, milieu de BC. Cette figure, en tournant autour de AD, engendre un volume de révolution dont on demande le moment d'inertie par rapport à AD pris pour axe des z.

II. — **2490.** 1° Intégrer l'équation différentielle du premier ordre, où $y' = \frac{dy}{dx}$,

$$y - xy'^2 + \frac{e^{2y}}{2}(2y'^2 - 2y' + 1) - 3 = 0,$$

en dérivant, et prenant comme variables x et $y' = p$ (e est la base des logarithmes népériens).

2° La solution générale étant mise sous la forme $x = F(p)$, $y = f(p)$, trouver la solution particulière qui prend la valeur $x = 1$ quand $p = 0$; étudier pour cette solution la variation de y en fonction de x, et la représenter graphiquement.

3° Calculer, pour cette solution particulière, $\int_0^1 y^2 dx$.

(*Durée : 4 h.*)

Géométrie et mécanique.

I. — Construire la courbe $(x^2 + y^2)x - ay^2 = 0$ (a étant un nombre positif). Chercher ses asymptotes et ses branches à l'origine.

On considère en particulier la courbe obtenue en faisant $a = 2$ et on mène la tangente au point d'abscisse 1 et d'ordonnée positive.

On demande à $\frac{1}{100}$ près les coordonnées du point d'intersection autre que le point de contact de cette tangente avec la courbe.

II. — Une tige homogène, pesant 5^{kg} et de 3^m de longueur, peut osciller dans un plan vertical autour d'une de ses extrémités O qui est fixe. En prenant pour simplifier $g = 10$, les unités étant le mètre et la seconde :

Fig. 1. Fig. 2.

1° On demande, à $\frac{1}{100}$ de seconde près, la durée des petites oscillations du pendule ainsi constitué;

2° On suspend à l'extrémité A une petite sphère de dimensions négligeables et pesant 5^{kg} et l'on demande la durée des oscillations du nouveau système ainsi constitué ;

3° On demande avec quelle vitesse angulaire, exprimée en tours par seconde, à $\frac{1}{100}$ près, il faudrait lancer le système tige-sphère à partir de la position verticale OA, A étant vers le bas, pour que la barre arrive sans vitesse à la position verticale symétrique OA', A' étant vers le haut; On appliquera pour cela le théorème des forces vives ;

4° On considère à nouveau à part la tige et la sphère. La tige occupe la position OA. La sphère lancée horizontalement avec une vitesse de 5 m. : sec. vient heurter la tige au point A et reste à partir de ce moment attachée à la tige. On demande, en appliquant le théorème de Carnot, la vitesse angulaire (exprimée en tours par seconde à $\frac{1}{100}$ près) de l'ensemble du système immédiatement après le choc.

(*Durée : 4 h.*)

Épure de géométrie descriptive.

On trace les deux axes de la feuille, qui se coupent au point O : le petit axe constitue la ligne de terre xy.

On considère le point (S, S') dont les projections horizontale et verticale sont sur le grand axe de la feuille respectivement à 120^{mm} au-dessous et au-dessus de xy, et la droite de front (D, D') qui passe par le point (S, S'), fait avec le plan horizontal un angle de 60° et a sa trace horizontale t à droite du point S.

La droite (D, D'), en tournant autour de la verticale du point S, engendre un cône de révolution, C.

Un deuxième cône, K, a son sommet sur la droite (D, D'), au point situé à 80^{mm} au-dessus du plan horizontal. Sa base, dans le plan horizontal, est un cercle passant par le point t, coupant orthogonalement en ce point le cercle trace horizontale du cône C et ayant même rayon que lui; son centre est entre la droite D et xy.

On demande de déterminer :

1° la partie non rectiligne, L, de l'intersection des deux cônes C et K;

2° l'ombre portée par cette courbe L sur le plan horizontal, lorsqu'elle est éclairée par des rayons lumineux parallèles à son asymptote réelle.

Ces courbes seront tracées à l'encre de Chine. Les contours apparents des cônes C et K, et les lignes de construction seront tracés à l'encre rouge.

(*Durée : 3 h.*)

QUESTION PROPOSÉE

2491. — Trouver l'équation du cône de révolution autour de l'axe

$$y = 1, \qquad x = a + pz - p^2,$$

et ayant la génératrice

$$y = 1, \qquad z = p.$$

Déterminer p par la condition que ce cône passe à l'origine des axes de coordonnées rectangulaires.

Démontrer que la courbe (P) d'intersection de ce cône avec le plan xOy est la parabole $y^2 + 2x - 2y = 0$, dont on demande le foyer et la directrice.

Trouver l'équation du faisceau de coniques (C), ayant avec la parabole (P) trois points confondus à l'origine et qui passent encore par le point d'intersection de cette courbe avec la droite $y = mx$ du plan xOy.

Déterminer le lieu des centres des coniques (C), m ayant une valeur donnée.

Démontrer que pour chaque valeur de m, on trouve, parmi les coniques (C), une parabole (P') et une hyperbole équilatère (H). Trouver, m étant variable, les lieux des foyers, du centre et l'enveloppe des axes de l'hyperbole (H).

Trouver, parmi les coniques (C), le cercle osculateur à l'origine à la parabole (P).

N. Abramesco.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE CENTRALE

Concours de 1919.

2308. — *On considère la cubique* $y^3(m+1)^3 - m(m+1)^3y^2x - m^2(m-1)^2ax^2 + 2a^2(m-1)y = a^3$, *rapportée à deux axes rectangulaires* Ox *et* Oy; a *désigne une longueur positive donnée et* m *un paramètre variable.*

On demande :

1° *de former l'équation de l'asymptote rectiligne de cette cubique;*

2° *de trouver, reconnaître et construire l'enveloppe de cette asymptote, lorsque* m *varie;*

3° *de trouver, reconnaître et construire le lieu du point où la cubique est coupée par cette asymptote.*

1. Écrivons l'équation de la cubique sous la forme

$$(m+1)^3y^2(y-mx) - m^2(m-1)^2ax^2 + 2a^2(m-1)y - a^3 = 0;$$

nous mettons ainsi en évidence une première direction asymptotique (double), $y^2 = 0$, qui correspond à une branche parabolique et une seconde direction asymptotique (simple), $y = mx$; pour avoir l'asymptote correspondante, coupons par la sécante $y = mx + \lambda$ et écrivons que l'équation aux x des points de rencontre,

$$(m+1)^3(mx+\lambda)^2.\lambda - m^2(m-1)^2ax^2 + 2a^2(m-1)(mx+\lambda) - a^3 = 0,$$

a une racine infinie; il vient

$$(m+1)^3m^2\lambda - m^2(m-1)^2a = 0,$$

d'où $\lambda = \dfrac{a}{m-1}$ et l'équation de l'asymptote est

$$y = mx + \frac{a}{m-1}, \qquad (1)$$

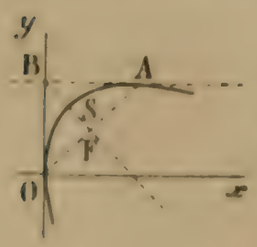
ou, en ordonnant par rapport à m,

$$m^2x + m(x-y) - (y-a) = 0.$$

2. Cette droite a pour enveloppe la parabole

$$(x-y)^2 - 4x(y-a) = 0, \qquad (2)$$

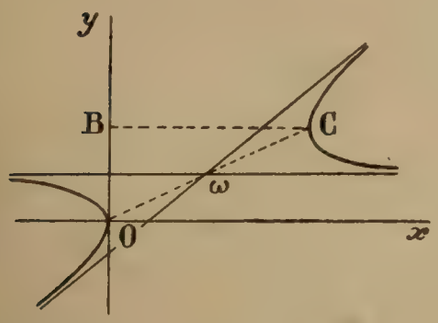
tangente aux droites $x = 0$, $y = a$ en leurs points de rencontre O et A avec la première bissectrice. En ordonnant l'équation (2), on obtient



$$(x+y)^2 - 4ax = 0;$$

on en déduit aisément que la parabole enveloppe admet pour axe la parallèle à la seconde bissectrice menée par le point B ($x = 0$, $y = a$); ce point B est d'ailleurs un point de la directrice (tangentes rectangulaires), le foyer est le pied F $\left(x = \frac{a}{2},\ y = \frac{a}{2}\right)$ de la perpendiculaire abaissée du point B sur la corde des contacts OA et le sommet est le milieu S de la droite OB $\left(x = \frac{a}{4},\ y = \frac{3a}{4}\right)$.

3. L'asymptote rencontre la cubique en un point dont les coordonnées sont



$$x = -\frac{a}{2m(m+1)}, \qquad y = \frac{a}{2(m+1)}; \qquad (3)$$

ce point est situé sur la droite $y + mx = 0$ $\left(\text{d'où } m = -\frac{y}{x}\right)$; son lieu, quand m varie, est l'hyperbole

$$2xy - 2y^2 - ax = 0$$

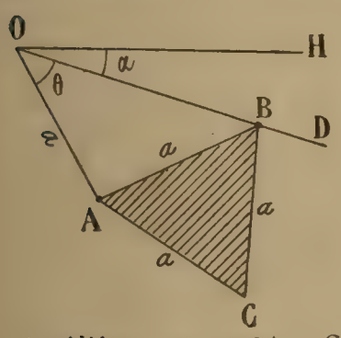
ayant pour centre le point $\left(x = a, \quad y = \frac{a}{2}\right)$, et pour asymptotes les droites $y = \frac{a}{2}$, $x - y - \frac{a}{2} = 0$. On peut la construire aisément au moyen des expressions paramétriques de x et y, ou encore en résolvant l'équation par rapport à x ou à y.

P. L.

Bonnes solutions de MM. : P. Abadie, sous-lieutenant au 81e R. A. L., Metz; Auguste Berlande, à Lyon; Yves Bouthillier, élève de l'École centrale; L. Chiganne, 155e R. A. P. E. M., Strasbourg; Louis Gauthier, conducteur des Ponts et Chaussées à Craponne, Haute-Loire; A. Hutinel, à Cannes; Paul Labat, élève de l'École polytechnique; G. Lach, à Douai; E. Logeard; A. Le Marchand, à Paris; H.-L. Mennessier, à Évreux; M., à Guéret; M. Roux, au Creusot; Gaston Singier, professeur adjoint au lycée de Valenciennes; Topin, à Grandvilliers.

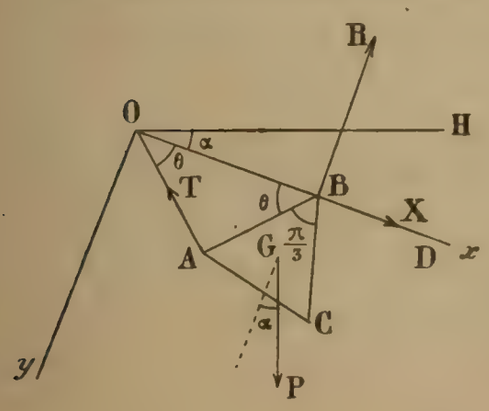
Autres solutions : MM. Paul Bernard, à Paris; Jean Bouchary, étudiant; L. Long, à Châtellerault; Ch. Pacé, à bord de la *Ville d'Ys*; Robert Pierre, école normale de Saint-Cloud.

2309. — *On considère une tige rectiligne* OD, *fixe, non déformable, d'épaisseur négligeable, faisant un angle donné* α *avec l'horizon* OH, *et en dessous; et une plaque* ABC *de poids donné* P, *homogène, non déformable, d'épaisseur négligeable et ayant la forme d'un triangle équilatéral de côté donné* a. *Au sommet* A *est attaché un fil flexible,* OA, *de poids négligeable, de longueur invariable égale au côté* a, *et dont l'extrémité* O *est fixe. Un autre sommet,* B, *de la plaque, est assujetti à glisser sans frottement sur la tige* OD, *dont la longueur est supérieure à* $2a$.



On demande de calculer la tangente trigonométrique de l'angle AOB, *ou* θ, *correspondant à la position d'équilibre de la plaque* ABC, *et de reconnaître si cet équilibre est stable. Calculer la réaction de la tige et la tension du fil pour cette position d'équilibre.*

Prenons comme axes Ox, suivant la tige rectiligne OD et Oy suivant la perpendiculaire à OD; représentons le poids du triangle par le vecteur P passant par le centre de gravité G du triangle (et qui fait l'angle α avec la direction de Oy); soit R la réaction (normale) de la tige et T la tension du fil. Désignons par X la valeur algébrique de la force tangentielle qu'il faudrait appliquer au point B pour maintenir le système en équilibre dans une position quelconque, correspondant à un angle θ donné.



Calculons d'abord les coordonnées du point G; le point A a pour coordonnées $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$;

le point B, $x = 2a\cos\theta$, $y = 0$,

et le point C, $x = 2a\cos\theta + a\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right)$, $y = a\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right)$. On en déduit, pour le point G,

$$x = \frac{1}{3}\left[5a\cos\theta + \frac{a}{2}(\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta)\right] = \frac{1}{6}\left[9a\cos\theta + a\sqrt{3}\sin\theta\right],$$

$$y = \frac{1}{3}\left[a\sin\theta + \frac{a}{2}(\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta)\right] = \frac{1}{6}\left[3a\sin\theta + a\sqrt{3}\cos\theta\right].$$

Le poids P a pour composantes $P\sin\alpha$, $P\cos\alpha$ et son moment par rapport au point O est

$$\frac{Pa}{6}\left[\cos\alpha(9\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta) - \sin\alpha(3\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)\right].$$

Les quantités analogues pour les vecteurs R, T et X seront

$$\begin{array}{lll} 0, & -R, & -2aR\cos\theta; \\ -T\cos\theta, & -T\sin\theta, & 0; \\ X, & 0, & 0; \end{array}$$

d'où les trois équations d'équilibre

$$P\sin\alpha - T\cos\theta + X = 0,$$

$$P\cos\alpha - R - T\sin\theta = 0,$$

$$\frac{P}{6}\left[\cos\alpha(9\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta) - \sin\alpha(3\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)\right] - 2R\cos\theta = 0.$$

De la dernière on tire

$$R = \frac{P}{12}\left[\cos\alpha(9 + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\theta) - \sin\alpha(3\,\mathrm{tg}\,\theta + \sqrt{3})\right];$$

portant dans la seconde, il vient

$$T = \frac{P}{12\sin\theta}\left[\cos\alpha(3 - \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\theta) + \sin\alpha(3\,\mathrm{tg}\,\theta + \sqrt{3})\right].$$

d'où

$$X = \frac{P}{12\sin\theta}\left[\cos\alpha(3\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta) + \sin\alpha(-9\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)\right],$$

c'est-à-dire

$$X = \frac{P(3\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha)}{12}\left(\mathrm{cotg}\,\theta - \frac{1 + 3\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{3} + \mathrm{tg}\,\alpha}\right).$$

Posant $\mathrm{tg}\,\theta_0 = \frac{\sqrt{3} + \mathrm{tg}\,\alpha}{1 + 3\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha}$, l'expression de X devient

$$X = \frac{P(3\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha)}{12}(\mathrm{cotg}\,\theta - \mathrm{cotg}\,\theta_0).$$

On voit donc que, pour $\theta = \theta_0$, $X = 0$, le système est en équilibre; pour $\theta < \theta_0$, $X > 0$, le point B est à droite de la position d'équilibre et il faut, pour l'empêcher d'y revenir, lui appliquer une traction positive; enfin pour $\theta > \theta_0$, $X < 0$, le point B est à gauche de la position d'équilibre et pour l'y maintenir il faut lui appliquer une traction dirigée vers le point O; la position d'équilibre est donc stable.

Pour $\theta = \theta_0$, on trouve

$$R = P\frac{\cos^2\alpha + 2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha}{\cos\alpha + 3\sqrt{3}\sin\alpha}, \qquad T = 2P\sin\alpha.\frac{\sqrt{\cos^2\alpha + 2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha + 7\sin^2\alpha}}{\cos\alpha + 3\sqrt{3}\sin\alpha}.$$

On peut remarquer que la position d'équilibre correspond au passage du point G au point le plus bas de sa trajectoire. Appelant X et Y les coordonnées d'un point par rapport à l'horizontale OH et à la verticale du point O dirigée vers le bas, nous aurons

$$X = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \qquad Y = x\sin\alpha + y\cos\alpha,$$

ce qui nous donne, pour le point G,

$$X = \frac{1}{6}(9a\cos\theta + a\sqrt{3}\sin\theta)\cos\alpha - \frac{1}{6}(3a\sin\theta + a\sqrt{3}\cos\theta)\sin\alpha,$$

$$Y = \frac{1}{6}(9a\cos\theta + a\sqrt{3}\sin\theta)\sin\alpha + \frac{1}{6}(3a\sin\theta + a\sqrt{3}\cos\theta)\cos\alpha.$$

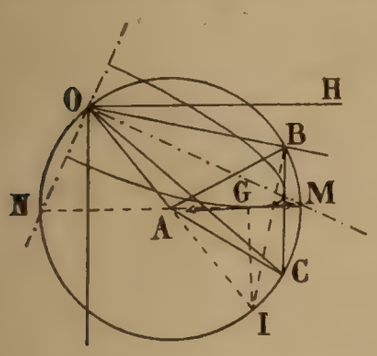
Prenant la dérivée de Y par rapport à θ, on trouve

$$Y' = \frac{a\sqrt{3}}{6}[(\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha)\cos\theta - (3\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha)\sin\theta];$$

elle s'annule bien pour $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sqrt{3} + \operatorname{tg}\alpha}{1 + 3\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}$ en passant du positif au négatif, et Y passe par un maximum. Dans cet ordre d'idées, on lira avec intérêt la solution géométrique ci-dessous.

P. L.

Solution géométrique. — Le lieu de C est une droite(*) passant par O et faisant un angle de 30° avec OB et au-dessous de cette droite. On en déduit que les extrémités B, C du côté BC de longueur constante glissent sur deux droites fixes et que le centre de gravité G de ABC, invariablement lié à BC, décrit une ellipse (G) dont les axes sont dirigés suivant les bissectrices de l'angle BOC, le grand axe selon la bissectrice interne. Les valeurs des demi-axes sont faciles à déterminer en traçant le cercle circonscrit (A) au triangle OBC, dont le centre est A et le rayon a; le diamètre de ce cercle passant par G coupe les bissectrices de $\widehat{BOC}$ en M, N :



$$\text{demi-grand axe} = GN = a + \frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3} = a\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\text{demi-petit axe} = GM = a - \frac{a}{\sqrt{3}} = a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Soit maintenant ABC la position d'équilibre cherchée. Les directions de la tension T du fil et de la réaction R normale en B à OB se coupent en I, centre instantané de rotation de la position de ABC; leur résultante fait équilibre au poids P de ABC et la direction de cette force passe par I. Or, la droite IG est normale au lieu géométrique du centre de gravité G invariablement lié à ABC. On en déduit aisément que la tangente en G au lieu de G est horizontale, puisque IG est verticale; par suite, G est l'extrémité la plus basse du diamètre de l'ellipse (G) conjugué de la direction OH.

On est ainsi ramené à un problème connu : mener, à une ellipse dont les axes sont connus (et par suite les foyers), une tangente parallèle à une direction donnée.

Il y aura toujours une solution et une seule, telle que $\widehat{ABO} = \widehat{AOB} = \theta$.

Si l'on remarque enfin que

$$\widehat{BIG} = \alpha, \qquad \widehat{OIG} = \frac{\pi}{2} - (\theta + \alpha),$$

on obtiendra sans peine la construction de R et T dont la résultante appliquée en I a pour intensité P et est dirigée vers le haut.

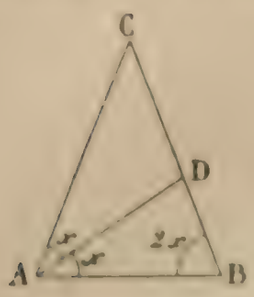
H.-L. MENNESSIER, à Évreux.

Bonnes solutions de MM. : A. Berlande, à Lyon; P. Bernard, à Paris; Yves Bouthillier, élève de l'École centrale; L. Chiganne, E. M. du 155e R. A. P., à Strasbourg; R. Gaugain, à Dijon; Louis Gauthier, à Craponne (Haute-Loire); A. Hutinel, à Cannes; G. Lach, à Douai; M., à Guéret; Ch. Pacé, à bord de la *Ville d'Ys*; M. Roux, au Creusot; Gaston Singier, professeur adjoint au lycée de Valenciennes; Topin, à Grandvilliers.

(*) On a $\widehat{OAC} = 180° - 2\theta + 60° = 240° - 2\theta$,

$\widehat{AOC} = \widehat{ACO} = \frac{1}{2}(2\theta - 60°) = \theta - 30°$, d'angle $\widehat{BOC} = 30°$.

2310. — *Dans un triangle isocèle* ABC *où* AC = BC, *on désigne par* $2x$ *la valeur commune des angles* A *et* B, *et par* D *le point de rencontre de la bissectrice intérieure de l'angle* A *avec le côté opposé. On donne la longueur* l *de la bissectrice* AD *et la longueur* m *de la moyenne géométrique entre les segments* BD *et* DC *que cette bissectrice détermine sur le côté opposé :*



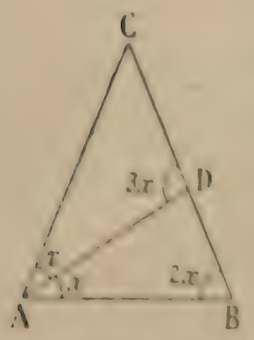
$$AD = l, \qquad BD \,.\, DC = m^2.$$

Calculer $\cos x$ *en fonction des données, et trouver la condition qui doit exister entre ces données pour que le problème soit possible.*

Application numérique : $l = 3^m$ *et* $m = 4^m$. *Calculer dans ce cas, à un centimètre près, les rayons du cercle circonscrit, du cercle inscrit, et des cercles exinscrits au triangle* ABC.

Nota. — Les considérations géométriques seront favorablement appréciées.

Solution sommaire. — Les deux triangles ABD et ADC donnent



$$\frac{BD}{\sin x} = \frac{AD}{\sin 2x}, \qquad \frac{CD}{\sin x} = \frac{AD}{\sin 4x},$$

et, comme $AD = l$, $\quad BD = \dfrac{l \sin x}{\sin 2x}, \qquad CD = \dfrac{l \sin x}{\sin 4x}.$

D'ailleurs,

$$BD \,.\, DC = m^2,$$
$$l^2 \sin^2 x = m^2 \sin 2x \sin 4x,$$
$$8m^2 \cos^2 x \cos 2x - l^2 = 0,$$
$$8m^2 \cos^2 x (2 \cos^2 x - 1) - l^2 = 0,$$
$$16m^2 \cos^4 x - 8m^2 \cos^2 x - l^2 = 0.$$

La racine positive de cette équation du second degré en $\cos^2 x$ est seule acceptable :

$$\cos^2 x = \frac{4m^2 + \sqrt{16m^4 + 16m^2 l^2}}{16m^2},$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{l^2}{m^2}}\right).$$

Condition de possibilité : $x > 0$, $x < \frac{\pi}{4}$; $\cos^2 x < 1$ et $> \frac{1}{2}$. La seconde condition est toujours satisfaite ; la première donne

$$l^2 < 8m^2, \qquad \text{ou} \qquad l < 2m\sqrt{2}.$$

C'est l'unique condition de possibilité.

Application numérique : $l = 3$, $m = 4$. Alors

$$\frac{l^2}{m^2} = \frac{9}{16}, \qquad 1 + \frac{l^2}{m^2} = \frac{25}{16}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{5}{4}\right) = \frac{9}{16}, \qquad \cos x = \frac{3}{4}.$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{7}}{4}, \qquad \sin 2x = 2 \times \frac{3}{4} \times \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{8}.$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = \frac{1}{8}, \qquad \sin 4x = \frac{3\sqrt{7}}{32};$$

$$AB = \frac{l \sin 3x}{\sin 2x} = l\,\frac{4\cos^2 x - 1}{2\cos x} = \frac{8}{2};$$

$$AC = \frac{l \sin 3x}{\sin 4x} = 10$$

$$2p = 10 + 10 + \frac{8}{2} = \frac{48}{2}, \qquad p = \frac{48}{4}.$$

Calcul de R.
$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{AC}{\sin 2x} = \frac{10}{\frac{3\sqrt{7}}{8}} = \frac{40 \times 2}{3\sqrt{7}},$$
$$R = \frac{40\sqrt{7}}{21}$$

$\frac{40}{21} < 2$; il suffit de calculer $\sqrt{7}$ à une demi-unité près du second ordre décimal; c'est 2,65 par excès; nous prendrons ensuite R par défaut ce qui atténue l'erreur; nous trouvons ainsi
$$R = 5{,}04.$$

Calcul de r.
$$S = pr = \frac{45}{4} r, \qquad r = \frac{4S}{45};$$
$$2S = CA.CB.\sin 4x = \overline{CA}^2.\sin 4x = \frac{300\sqrt{7}}{32},$$
$$r = \frac{300\sqrt{7}}{45 \times 16} = \frac{30\sqrt{7}}{72}.$$

Il suffit de prendre ici $\sqrt{7}$ avec deux décimales par défaut;
$$r = \frac{30 \times 2{,}64}{72} = \frac{26{,}4}{24},$$
$$r = 1{,}10, \quad \textit{par défaut.}$$

Calcul de r_c.
$$S = (p - c) r_c = \left(\frac{45}{4} - \frac{5}{2}\right) r_c.$$
$$S = \frac{35}{4} r_c, \qquad r_c = \frac{4S}{35} = \frac{300\sqrt{7}}{16 \times 35} = \frac{30\sqrt{7}}{56},$$
$$r_c = \frac{30 \times 2{,}64}{56} = \frac{79{,}2}{56},$$
$$r_c = 1{,}41, \quad \textit{par défaut.}$$

Calcul de r_a.
$$S = (p - a) r_a = \left(\frac{45}{4} - 10\right) r_a,$$
$$S = \frac{5}{4} r_a, \qquad r_a = \frac{4S}{5} = \frac{300\sqrt{7}}{16 \times 5} = \frac{60\sqrt{7}}{16}, \qquad r_a = \frac{15\sqrt{7}}{4}.$$

Nous prendrons ici $\sqrt{7}$ avec trois décimales,
$$\sqrt{7} = 2{,}645; \qquad r_a = \frac{15 \times 2{,}645}{4};$$
$$r_a = 9{,}91, \quad \textit{par défaut.}$$

M. ROUX, le Creusot.

Solutions exactes : MM. Mirguet, à Guéret; A. Berlande, à Lyon; A. Le Marchand, à Paris; R. Rapinat, sous-lieutenant d'artillerie.

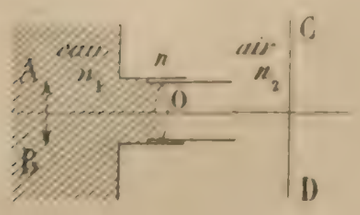
Solutions avec une seule erreur : MM. G. Lach, à Douai; Reltien; H.-L. Mennessier, à Évreux; G. Singier, à Valenciennes; Ch. Pacé, enseigne de vaisseau; P. Labat; P. Bernard, conducteur des Ponts et Chaussées; H. Gaugain.

PHYSIQUE ET CHIMIE

École centrale, concours de 1915.

2328. — *Une source monochromatique fixe* AB, *placée dans l'eau d'indice n_1, envoie des rayons sur la première face d'une lentille mince* O, *d'indice n, dont l'autre face est dans l'air d'indice n_2; un*

écran fixe CD recevra l'image réelle et nette de AB, dont il est séparé par une distance invariable L, pour deux positions de la lentille O, que l'on peut déplacer dans un tube à coulisse.



Cette lentille est biconvexe et à rayons de courbure égaux, r.

On demande de calculer la distance x des deux positions de la lentille pour lesquelles l'image est nette sur l'écran.

Après avoir établi la formule définitive, on fera l'application numérique au cas suivant :

$$n_1 = \frac{4}{3}, \qquad n = \frac{3}{2}, \qquad n_2 = 1, \qquad L = 200^{cm}, \qquad r = 30^{cm}.$$

La position de l'image de AB dans la lentille est déterminée par les équations

$$\frac{n_1}{p_1} - \frac{n}{p} = \frac{n_1 - n}{-r},$$

$$\frac{n}{p} - \frac{n_2}{p_2} = \frac{n - n_2}{r},$$

avec la condition

$$p_1 - p_2 = L.$$

L'élimination de p et de p_2 entre ces trois équations donne

$$\frac{n_1}{p_1} + \frac{n_2}{L - p_1} = \frac{2n - n_1 - n_2}{r} = k$$

ou, en ordonnant,

$$kp_1^2 - (n_1 - n_2 + kL)\,p_1 + n_1 L = 0.$$

La distance x est la différence des racines de cette équation ; on en déduit

$$x = \frac{1}{k}\sqrt{(n_1 - n_2 + kL)^2 - 4kn_1 L}.$$

L'application numérique proposée donne

$$k = \frac{1}{45}, \qquad n_1 - n_2 + kL = \frac{43}{9}, \qquad 4kn_1 L = \frac{640}{27}, \qquad x = 5\sqrt{1849 - 1920}.$$

La quantité sous le radical étant négative, il n'y a pas de solution, ce qu'on peut encore vérifier de la manière suivante.

L'équation aux distances conjuguées dans la lentille est

$$\frac{n_1}{p_1} - \frac{n_2}{p_2} = \frac{2n - n_1 - n_2}{r} = \frac{1}{45}$$

et les distances focales sont $f_1 = 60$ et $f_2 = 45$. Les plans antiprincipaux sont donc distants de $120 + 90 = 210$, distance supérieure à L.

S'il n'y avait pas d'eau devant la lentille, n_1 serait égal à 1 et on trouverait la solution $x = 126{,}5$.

2329. — 1re OPÉRATION. — *On fait passer un courant de gaz sulfureux sur de l'hydrure de sodium. Tout l'hydrogène de l'hydrure est chassé et il se fait de l'hydrosulfite de sodium.*

2e OPÉRATION. — *L'hydrogène dégagé dans la première opération est mis en présence d'indigo bleu additionné de soude. Sous l'influence d'un catalyseur convenable, l'indigo bleu se trouve, dans ces conditions, ramené à l'état d'indigo blanc.*

3e OPÉRATION. — *L'hydrosulfite formé dans la première opération est mis en présence d'indigo bleu additionné de soude. L'indigo bleu se trouve, dans ces conditions, ramené à l'état d'indigo blanc.*

On demande d'expliquer et de formuler les réactions produites dans ces trois opérations. On prendra pour formule de l'indigo bleu $C^{16}H^{10}Az^2O^2$ *et pour formule de l'indigo blanc* $C^{16}H^{12}AzO^2Na^2$.

On demande de calculer le rapport des poids d'indigo bleu transformé en indigo blanc dans la deuxième et dans la troisième opération.

1re opération. — Le sodium de l'hydrure se fixe sur le gaz sulfureux avec dégagement d'un volume d'hydrogène égal à la moitié du volume d'anhydride employé :

$$2SO^2 + 2NaH = S^2O^4Na^2 + H^2.$$

2e opération. — L'indigo bleu fixant deux atomes de sodium pour se changer en indigo blanc, ce sodium se trouvera remplacé dans la soude par une molécule d'hydrogène avec formation d'eau :

$$C^{16}H^{10}Az^2O^2 + 2NaOH + H^2 = C^{16}H^{10}Az^2O^2Na^2 + 2H^2O.$$

3e opération. — Une molécule d'hydrosulfite de sodium, ayant le même pouvoir réducteur qu'une molécule d'hydrogène, produira la même transformation, l'excès de soude contenu dans la liqueur assurant à la fois la formation de l'indigo blanc et celle de sulfite neutre de sodium :

$$C^{16}H^{10}Az^2O^2 + S^2O^4Na^2 + 4NaOH = C^{16}H^{10}Az^2O^2Na^2 + 2H^2O + 2SO^3Na^2.$$

La première réaction montre qu'une molécule d'hydrosulfite correspond à une molécule d'hydrogène. Par conséquent, les masses d'indigo transformées dans les deux dernières opérations sont les mêmes.

Yves BOUTHILLIER, École centrale.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1914)

ÉCOLE CENTRALE (*Fin.*)

10350. — Montrer que le lieu du conjugué harmonique d'un point par rapport à un cône (du second degré) est un plan; faire l'épure en supposant un cône de révolution à axe vertical.

— **351.** — Mener par une droite un plan coupant un cône de révolution suivant une hyperbole equilatère. Asymptotes.

— **352.** — Lieu des sommets des cônes s'appuyant sur une circonférence (o, o') du plan vertical et dont la trace sur le plan horizontal est une hyperbole équilatère.

— **353.** — Un cône de révolution a pour axe l'horizontale $(sh, s'h')$ et pour demi-angle au sommet α; un second cône de révolution a pour axe la frontale $(\sigma f, \sigma' f')$ et pour demi-angle au sommet β. Mener par un point (o, o'), un plan coupant ces deux cônes suivant des hyperboles dont les asymptotes soient parallèles.

— **354.** — On considère un cône (s, s') dont la base est un cercle (o, o') du plan horizontal. Comment faut-il choisir un plan sécant pour que la projection horizontale de la section : 1° passe par un point a; 2° passe par deux points a, b; 3° pour qu'elle passe par a, b et soit une parabole?

— **355.** — Mener un plan parallèle à une droite (Δ, Δ'), coupant un cône (s, s'), dont la base est un cercle du plan horizontal, suivant une parabole de paramètre donné. Détermination du sommet.

— **356.** — On donne un cylindre circulaire droit. Construire l'hélice provenant de l'enroulement d'une droite AB; tangente en un point. On considère un point (s, s'), sommet d'un cône dont la directrice est l'hélice precedente. Trouver la trace horizontale du cône. Tangente en un point. Branches infinies.

— **357.** — Un cône de révolution à axe vertical, de sommet (s, s'), a pour contour apparent vertical un triangle équilatéral $s'a'b'$; un cylindre de révolution a pour axe la ligne de bout s'. Déterminer le développement de la courbe d'intersection. Tangente en un point de la section et en un point de la développée. Calcul de l'angle du developpement, sachant que le rayon de base du cône $o'a' = 20^{cm}$.

— **358.** — On donne une sphère (o, o'); mener un cylindre de révolution passant par deux points (a, a'), (b, b') et tangent à la sphère (on donne la direction des génératrices).

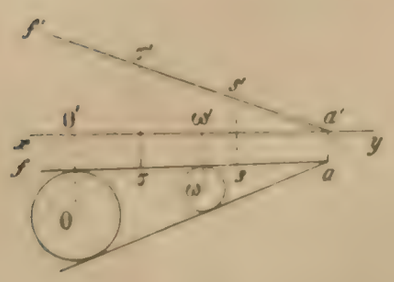
— **358bis.** — Un cône (s, s') a pour base la circonférence O du plan horizontal; mener à ce cône un cylindre de révolution bi-tangent, passant par un point (a, a') et dont les génératrices sont parallèles à la direction horizontale (g, g'). Même problème en remplaçant le cône (s, s') par un cylindre.

— **359.** — Intersection de deux cônes de révolution à axe vertical. Sommets de la courbe.

10360. — Deux cylindres ont pour bases les cercles O et ω du plan horizontal; leurs génératrices sont respectivement parallèles à $(\alpha\gamma, \alpha'\gamma')$ et $(\omega\delta, \omega'\delta')$, de front. Déterminer l'intersection. Construire la méridienne de la surface de révolution engendrée par la courbe d'intersection en tournant autour d'un axe de front Δ, Δ'.

— **361.** — On considère deux cylindres ayant pour bases dans le plan horizontal des hyperboles ayant leurs axes parallèles; les génératrices sont respectivement parallèles à (γ, γ'), (δ, δ'). Trouver leur intersection. Asymptotes. Points remarquables.

— **362.** — On considère un cylindre dont la base est un cercle du plan horizontal, les génératrices étant parallèles à (γ, γ'). Un cône a pour base un cercle dans le même plan et son sommet se projette horizontalement en s. 1° Trouver la projection verticale s', sachant que les deux surfaces sont tangentes; 2° déterminer la courbe d'intersection : points remarquables, tangentes au point double.



— **363.** — Dans le plan horizontal on mène à deux circonférences O, ω des tangentes communes extérieures qui se coupent au point (a, a'); la droite $(af, a'f')$ est une frontale sur laquelle on considère deux points : (s, s') sommet d'un cône de base O, (σ, σ'), sommet d'un cône de base ω. Intersection des deux cônes.

— **364.** — Un cône a pour base un cercle dans le plan horizontal; on le coupe par un plan PxQ' et on prend la section comme base d'un cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires au plan. Déterminer leur intersection; tangente en un point.

— **365.** — On donne un cône dont la base est un cercle du plan horizontal; on considère le cercle inscrit dans le triangle sab, de contour apparent vertical; on le prend pour base d'un cylindre dont les génératrices sont de bout. Déterminer l'intersection. Plans limites. Tangente en un point.

— **366.** — Un cylindre a pour base un cercle a' du plan vertical; ses génératrices sont parallèles à une horizontale $(\alpha\gamma, \alpha'\gamma')$. On donne un disque ad situé dans un plan vertical V, parallèle aux génératrices du cylindre. On l'éclaire par des rayons lumineux parallèles à une direction (δ, δ'). Trouver l'ombre portée sur le cylindre; points remarquables.

— **367.** — Un cylindre a sa base suivant un cercle (α, α') du plan vertical; les génératrices sont parallèles à $(\alpha\gamma, \alpha'\gamma')$. On considère une droite $(sa, s'a')$ parallèle à la précédente; (s, s') est le sommet d'un cône dont la base est une circonférence du plan horizontal passant par le point (a, a'). Intersection des deux surfaces.

— **368.** — On donne deux circonférences situées respectivement dans les plans de bout P, Q; leurs projections horizontales α, ω sont tangentes à la droite $s\sigma$; ce sont les directrices de deux cônes dont les sommets (s, s'), (σ, σ') sont situés dans le plan horizontal. Intersection; points remarquables.

— **369.** — On considère un cône de révolution à axe vertical de sommet (s, s'); un deuxième cône de révolution à axe de bout a pour sommet (σ, σ'); intersection, tangente en un point.

— **370.** — On considère un cône de révolution à axe vertical de sommet (s, s') et un cylindre de révolution à axe de bout (ω, ω'). Déterminer leur intersection; représenter le cône entaillé par le cylindre. Ombre portée par l'échancrure.

— **371.** — On donne un cône de révolution à axe vertical. Un cylindre de révolution a pour axe une parallèle (Δ, Δ') à xy et on donne son rayon. Construire l'intersection.

— **372.** — On considère une frontale $(s\sigma, s'\sigma')$; (s, s'), (σ, σ') sont les sommets de deux cônes de révolution ayant pour axe $(s\sigma, s'\sigma')$ et dont une génératrice est parallèle à xy. Intersection des deux cônes; nature de la courbe d'intersection.

— **373.** — On considère une parallèle à xy $(ab, a'b')$. (a, a') est le sommet d'un cône de révolution à axe vertical dont le demi-angle au sommet est de 60°; (b, b') est le sommet d'un cône de révolution à axe de bout, d'angle égal à 60°. Déterminer un point de l'intersection et la tangente.

— **374.** — Mener à une sphère (ω, ω') des plans tangents passant par une droite donnée (Δ, Δ'); nombre de solutions.

— **375.** — On donne deux sphères; trouver leur plan radical.

— **376.** — Déterminer une sphère passant par un point donné et tangente à trois plans. Faire l'épure en prenant comme plans, le plan horizontal, le plan vertical de projection et un plan de profil.

— **377.** — Construire la sphère inscrite dans un tétraèdre situé dans la position suivante : sa base abc est dans le plan horizontal; l'arête ab est perpendiculaire sur xy; le sommet d a sa projection horizontale en c.

— **378.** — Construire un paraboloïde de révolution connaissant le foyer F de la parabole méridienne et trois points A, B, C de la surface. Ramener à construire un plan tangent à trois sphères. Choisir les plans de projection de manière à avoir les constructions les plus simples.

— **379.** — On considère une sphère (ω, ω') et un point (s, s'); déterminer le rayon de la courbe de contact du cône circonscrit à la sphère de sommet (s, s').

— **380.** — On considère une sphère (ω, ω'), un point lumineux (s, s') et une droite (Δ, Δ'). Déterminer la portion de cette droite qui est à l'intérieur de l'ombre portée par la sphère.

— **381.** — On considère une sphère tangente au plan horizontal. Trouver la courbe d'ombre portée par un point lumineux (s, s'), situé dans le plan horizontal qui passe par le point le plus haut de la sphère.

— **382.** — On considère une sphère (ω, ω'). Trouver le point où la tangente à la courbe d'ombre portée est de profil, sachant que les rayons lumineux sont parallèles à (δ, δ'). Tangente à la courbe parallèle à une direction quelconque; trouver le point de contact.

10383. — On considère un solide formé par un cylindre de révolution à axe vertical, surmonté d'un hémisphère dont le rayon est celui du cylindre; les rayons lumineux étant à 45°, déterminer les ombres propre et portée.

— **384.** — Une surface de révolution à axe vertical est définie par sa méridienne principale (C, C'). Mener à cette surface un plan tangent par un point (s, s'), de façon que le point de contact soit sur un méridien donné V. Méridien limite.

— **385.** — Plans tangents à un tore parallèles à un plan donné $P\alpha Q'$.

— **386.** — Section plane d'un ellipsoïde de révolution à axe vertical; tangente en un point.

— **387.** — Un ellipsoïde de révolution à axe vertical est coupé par un plan $P\alpha Q'$. Déterminer le contour apparent vertical du cône de sommet (s, s') qui a pour base la section faite dans la surface par ce plan.

— **388.** — On donne un paraboloïde de révolution à axe vertical; déterminer le pôle d'un plan $P\alpha Q'$ qui coupe la surface.

— **389.** — On considère un ellipsoïde de révolution donné par sa méridienne principale; on l'éclaire par une source lumineuse (s, s'). Trouver les points où la ligne de terre rencontre l'ombre portée sur le plan horizontal. Déterminer un point de l'ombre propre.

— **390.** — Ombres propre et portée par le solide formé d'un paraboloïde de révolution à axe vertical que l'on coupe par un plan de bout P'. On suppose les rayons lumineux de front.

— **391.** — On donne un paraboloïde de révolution à axe vertical. Où faut-il prendre un point lumineux (s, s') pour que l'ombre portée sur le plan horizontal soit une parabole? Nature de la courbe d'ombre propre suivant la position du point. Déterminer le sommet de la parabole.

— **392.** — Une surface de révolution a pour axe la droite de front (Δ, Δ'); on donne la courbe génératrice (C, C'); déterminer son contour apparent horizontal; point et tangente.

— **393.** — Mener à un ellipsoïde de révolution, dont l'axe (z, z') est de front, des normales parallèles à la direction (δ, δ'). Nombre de solutions.

— **394.** — Un paraboloïde de révolution à axe de front (z, z') est défini par son foyer et son sommet. On donne une horizontale (h, h'). Mener par cette droite un plan tangent à la surface.

— **395.** — Un paraboloïde de révolution a pour axe de front la droite (z, z'); on donne le sommet et le foyer. Où faut-il prendre un point lumineux pour que l'ombre portée sur le plan horizontal soit une parabole? Déterminer l'ombre propre en prenant un point lumineux quelconque (o, o').

— **396.** — On donne une surface gauche de révolution à axe vertical engendrée par la rotation d'une droite de front (D, D'); mener par un point (s, s') des plans tangents à cette surface.

— **397.** — On donne une surface gauche de révolution à axe vertical, engendrée par une droite de front (g, g'): un point (s, s') est le sommet d'un cône circonscrit à la surface. Contours apparents horizontal et vertical du cône.

— **398.** — Courbe de contact d'un cylindre circonscrit à une surface gauche de révolution à axe vertical, engendré par une droite de front (d, d'); les génératrices du cylindre sont parallèles à (δ, δ').

— **399.** — On considère un hyperboloïde de révolution à axe vertical engendré par la rotation d'une frontale (f, f'). Déterminer l'ombre propre et un point de l'ombre portée, sachant que les rayons lumineux sont parallèles à (δ, δ').

— **400.** — Un hyperboloïde de révolution à axe vertical (z, z') est engendré par une frontale (g, g'); on le limite aux plans horizontaux H' et xy. Déterminer l'ombre propre du solide ainsi formé éclairé par des rayons lumineux de front (δ, δ').

— **401.** — Intersection d'un plan $P\alpha Q'$ avec un hyperboloïde de révolution engendré par une droite (d, d'), tournant autour d'un axe vertical (z, z').

— **402.** — Un hyperboloïde de révolution à axe vertical est engendré par une droite (g, g'); on prend sur cette droite un point (a, a') et on mène par ce point le plan perpendiculaire à (g, g'). Déterminer la section de la surface par ce plan. Nature de la conique, asymptotes.

— **403.** — On donne un hyperboloïde de révolution à axe vertical engendré par une droite de front (Δ, Δ'). 1° Quels sont les caractères de toutes les sections par des plans passant par le centre? 2° Trouver un plan passant par le centre, tel que la projection horizontale de la section qu'il détermine admette une direction asymptotique donnée et passe par un point donné.

— **404.** — On donne un hyperboloïde de révolution à axe vertical engendré par une droite. Déterminer la section de cette surface par un plan $P\alpha Q'$. Axes de la section; nature de cette conique; points à l'infini.

— **405.** — Mener par une droite (d, d') des plans tangents à un hyperboloïde de révolution engendré par une droite de front (Δ, Δ') en tournant autour d'un axe vertical (z, z').

— **406.** — Construire le contour apparent horizontal d'un hyperboloïde de révolution à axe de front (z, z'), engendré par la rotation d'une droite (Δ, Δ'); reconnaître la nature de la courbe.

— **407.** — On considère un hyperboloïde de révolution à axe de front (z, z'), engendré par la rotation de la droite (Δ, Δ'). Déterminer la section faite par le plan de front P.

— **408.** — Intersection d'un hyperboloïde de révolution à axe de front (z, z'), engendré par une droite (Δ, Δ'), avec une droite (D, D').

— **409.** — On donne un cône de révolution à axe vertical; une sphère (o, o') a son centre sur une parallèle à xy menée par le sommet du cône. Intersection des deux surfaces. Développer le cône.

10410. — On donne un paraboloïde à axe vertical et un cylindre de révolution dont l'axe de front rencontre l'axe du paraboloïde. Trouver leur intersection; tangente en un point; particularités de la projection verticale, nature de la courbe.

— **411.** — On donne un ellipsoïde de révolution à axe vertical; on prend le point le plus à gauche (s, s') pour sommet d'un cône de révolution à axe de front $(xz, x'z')$, dont le demi-angle au sommet est de 45°. Intersection; point double; tangentes en ce point.

— **412.** — Un tore à axe vertical (z, z') est défini par le cercle ω situé dans le méridien principal; on considère une sphère (o, o'). Trouver un point de l'intersection et la tangente en ce point.

— **413.** — On donne un tore à axe vertical engendré par un cercle o. Un cylindre de révolution a pour axe la frontale (f, f') qui passe par le centre du tore; son rayon est égal à celui du parallèle équatorial du tore. Trouver l'intersection; sphères limites, points doubles.

— **414.** — On donne un ellipsoïde de révolution à axe vertical (o, o'), et un hyperboloïde de révolution, dont l'axe (ω, ω') est parallèle au précédent, engendré par la droite de front (f, f'). Déterminer l'intersection. Nature de la projection sur un plan vertical parallèle aux axes des deux surfaces; sur le plan horizontal (couper par des plans horizontaux, usage des points cycliques).

— **415.** — On donne une surface gauche de révolution à axe vertical, engendrée par la rotation d'une frontale (f, f'); on considère un cylindre de révolution dont les génératrices sont parallèles à xy et dont le rayon est le double du rayon du cercle de gorge; de plus l'axe du cylindre passe par le centre de la surface gauche. Trouver l'intersection.

— **416.** — On donne un cône de révolution à axe vertical, de sommet (s, s'); une horizontale (h, h') rencontrant l'axe tourne autour de la ligne de bout s' et engendre un hyperboloïde. Déterminer l'intersection.

— **417.** — On donne un cône de révolution à axe de bout, de sommet (s, s'); une droite de front (f, f') rencontrant l'axe du cône tourne autour de la verticale s; intersection des deux surfaces.

— **418.** — Un hyperboloïde de révolution à axe vertical est engendré par la rotation d'une droite (δ, δ'); un cylindre a pour base dans le plan vertical une circonférence de centre (ω, ω') et ses génératrices sont parallèles à (δ, δ'). Intersection.

— **419.** — Un hyperboloïde de révolution à axe vertical (z, z') est engendré par une frontale (D, D'); un cône a pour base un cercle du plan vertical (ω, ω'); son sommet est en (s, s') sur la droite (D, D'); déterminer l'intersection.

— **420.** — On donne un ellipsoïde de révolution à axe vertical; un point (s, s') est le sommet d'un cône circonscrit à la surface; un cylindre a pour base la méridienne de profil de l'ellipsoïde et ses génératrices parallèles à xy; déterminer leur intersection.

— **421.** — On donne un ellipsoïde de révolution à axe vertical; un point (s, s') est le sommet d'un cône dont la base est la méridienne principale de l'ellipsoïde. Intersection des deux surfaces. Points où les courbes d'intersection se croisent. Propriété des deux surfaces en ces points.

— **422.** — Un cylindre a pour base une ellipse située dans le plan horizontal; les génératrices sont de front (g, g'). Intersection avec un tore à axe vertical, engendré par un cercle o'.

— **423.** — Un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal est défini par deux droites (A, A'), (B, B') dont les projections verticales sont parallèles. Déterminer la section par le plan vertical de projection.

— **424.** — Section d'un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal par le second bissecteur. Axes de la section, asymptotes.

— **425.** — Un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal est défini par la verticale (z, z') et la droite (A, A'). Mener par une droite (Δ, Δ') un plan coupant la surface suivant une parabole. Déterminer le sommet de la section.

— **426.** — Un paraboloïde hyperbolique à plan directeur de bout P est défini par la verticale (z, z') et la droite (A, A'); déterminer sa trace horizontale.

— **427.** — On donne un paraboloïde hyperbolique dont le plan directeur est de bout. Trouver la direction de l'axe; déterminer la section faite par un plan perpendiculaire à cette direction. Directions asymptotiques et asymptotes.

— **428.** — On donne un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal et un point (s, s'); courbe de contact du cône circonscrit à la surface ayant pour sommet (s, s'); trace horizontale de ce cône; déterminer un point et la tangente.

— **429.** — Un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal est défini par la verticale (z, z') et une génératrice (g, g') quelconque. Trouver un point de la courbe d'ombre propre, puis portée, sachant que la surface est éclairée par des rayons parallèles à (d, d'). Tangente.

— **430.** — On donne un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal et un cylindre dont la base est un cercle du plan horizontal, de génératrices parallèles à (g, g'); déterminer leur intersection.

— **431.** — Un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal est défini par la verticale (z, z') et la droite (d, d'); un cylindre a pour base un cercle du plan vertical dont le centre est la trace verticale (ω, ω') de la droite (d, d'), ses génératrices sont parallèles à $(\omega d, \omega' d')$. Trouver l'intersection.

— **432.** — Un paraboloïde à plan directeur de bout Q est défini par la verticale (z, z') et la droite (Δ, Δ'); un cylindre de révolution dont l'axe vertical est (z, z') a sa base suivant un cercle du plan horizontal. Intersection des deux surfaces, tangente en un point, particularités.

— **433.** — Un paraboloïde hyperbolique est engendré par des droites qui s'appuient sur les côtés d'un quadrilatère gauche $(abcd, a'b'c'd')$ (le côté $(bc, b'c')$ est vertical). Un cône de révolution a pour axe $(bc, b'c')$ et la génératrice $(bd, b'd')$ commune avec le paraboloïde. Intersection des deux surfaces.

10434. — Un paraboloïde hyperbolique a pour plan directeur un plan de bout Q′; il est défini par la verticale (z, z') et la droite (δ, δ'). Un point (s, s'), situé sur (δ, δ') est le sommet d'un cône dont la base est une circonférence du plan horizontal, passant par la trace (a, a') de la droite (δ, δ'). Intersection.

— **435.** — Un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal est défini par la frontale (Δ, Δ') et la verticale (z, z'). Une surface gauche de révolution à axe vertical est engendrée par la droite (Δ, Δ') en tournant autour de (z, z'). Déterminer leur intersection.

— **436.** — Un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal est défini par la verticale (z, z') et la droite (δ, δ'); (z, z') est l'axe d'un tore engendré par le cercle o'. Intersection des deux surfaces; tangente en un point, en employant le cône des normales.

(Fin.)

SUJETS DE CONCOURS

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

(Cours préparatoires.)

Concours de 1920.

Algèbre et analyse.

I. — **2492.** Soit l'expression

$$f(x) = \frac{x+1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}.$$

On demande :

1° de décomposer $f(x)$ en une somme de fractions simples : trouver sa primitive;

2° de déduire de cette décomposition un développement en série de $f(x)$ suivant les puissances croissantes de x,

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

en calculant $a_0, \ldots, a_n, \ldots$;

3° de dire pour quelles valeurs de x le développement est convergent;

4° de construire la courbe $y = f(x)$, et de trouver ses maxima et minima, en calculant à $\frac{1}{100}$ près la valeur de x correspondant à celui des maxima qui a la plus petite abscisse.

II. — **2493.** Calculer l'intégrale

$$\int \frac{a}{2a - x} \sqrt{\frac{8a - 3x}{2a - x}}\, dx.$$

(Durée : 4 h.)

Géométrie analytique et mécanique.

I. — **2494.** Déterminer en grandeur, position et sens, l'accélération d'un point qui décrit une parabole de paramètre p avec une vitesse constante v_0.

En déduire une expression du rayon de courbure de la parabole.

II. — **2495.** Étant donnée la courbe représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$y^3 + 3x^2 y + 1 = 0,$$

on demande :

1° de déterminer, en se bornant aux solutions réelles, ses points d'inflexion, dont on calculera les coordonnées avec deux décimales exactes;

2° de construire cette courbe;

3° de montrer que les points de contact, réels ou imaginaires, des tangentes à cette courbe issues d'un point (x_0, y_0) du plan se trouvent sur une conique (C).

On discutera la nature de (C) suivant les diverses régions du plan où se trouve le point (x_0, y_0);

4° de discuter la réalité du nombre des tangentes pour un point de l'axe de symétrie de la courbe.

(Durée : 4 h.)

Épure de géométrie descriptive.

2496 — Ox et Oy étant respectivement le petit axe et le grand axe de la feuille, on considère deux sphères concentriques, S_1 et S_2, ayant pour centre le point (a, a') qui a ses projections horizontale et verticale respectivement à 80^{mm} au-dessous et au-dessus de Ox, dans le plan de profil situé à 50^{mm} à droite de Oy. Le diamètre de S_1 est égal à $\sqrt{2} \times 70^{mm}$, celui de S_2 à 70^{mm}.

Un cylindre, C_1, dont les génératrices sont des horizontales de front est circonscrit à S_1.

Un cône, C_2, circonscrit à S_2 a son sommet sur la génératrice la plus élevée du cylindre, à 20^{mm} à droite du plan de profil de (a, a').

On demande de représenter par ses deux projections la partie du cône C_2, supposé plein et opaque, comprise à l'intérieur du cylindre C_1.

Ces projections seront tracées en noir; les lignes de constructions seront tracées en traits rouges fins. On prolongera également en traits rouges fins les branches infinies en projection de l'intersection des deux surfaces au delà de leurs parties utiles.

(Durée : 3 h.)

INSTITUT POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

(Section supérieure.)

Concours de 1920.

Composition de mathématiques.

I. — Construire la courbe

$$\rho = \frac{\sin\theta}{1 - 2\cos\theta}.$$

Recherche des asymptotes. Points d'intersection de la courbe et des asymptotes.

II. — Déterminer le nombre de racines réelles de l'équation

$$x^2 + 2x + 3 = \sqrt{x^2 - 1}.$$

III. — Déterminer et construire l'enveloppe de la famille de droites

$$\lambda^2 + 2\lambda x + (2\lambda + 1)y = 2a\lambda;$$

a constante donnée, λ paramètre variable.
Calculer l'aire limitée par cette enveloppe.

(Durée : 4 h.)

QUESTION PROPOSÉE

2497. — On considère une parabole P, deux tangentes fixes issues d'un point A et une tangente variable qui rencontre les deux autres en B et C. Montrer que, dans le triangle ABC :

1° le milieu de BC décrit une ligne droite;
2° le centre de gravité, les centres du cercle circonscrit et du cercle des neuf points décrivent des droites;
3° la perpendiculaire à BC en son milieu enveloppe une parabole;
4° le cercle des neuf points enveloppe une cubique;
5° et enfin la droite d'Euler enveloppe une conique.

E. N. Barisien.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

Coulommiers. — Imp. Paul BRODARD.

31e Année. Mars 1921. N° 6.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Note de la Rédaction. — Nous ne publierons de solution de la question 2483 que si nous recevons de nos correspondants des solutions exactes et complètes.

PREMIÈRE PARTIE

SUR LES HÉLICES CYLINDRIQUES

par M. **Anzemberger**, professeur au lycée de Besançon (*Suite*).

Tangente. — Les cosinus directeurs de la demi-tangente correspondant au sens des arcs croissants sont

$$\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{f'}{\sqrt{1-k^2}}, \qquad \beta = \frac{dy}{ds} = \frac{g'}{\sqrt{1-k^2}}, \qquad \gamma = \frac{dz}{ds} = k. \tag{6}$$

γ est constant : *la tangente à l'hélice fait un angle constant avec les génératrices du cylindre. Réciproquement*, définissons la courbe de la même façon; pour que $\gamma = \frac{dz}{ds}$ soit constant, il faut et il suffit que z soit proportionnel à s, et la courbe est une hélice, d'après ce qui précède.

Remarque. — *L'indicatrice sphérique des tangentes est une courbe plane, puisque γ est constant, donc c'est un cercle. Réciproquement*, si l'indicatrice sphérique des tangentes est un cercle, en prenant pour axe Oz par exemple la perpendiculaire au plan du cercle, γ est constant, et la courbe est une hélice.

Considérons maintenant les équations de la tangente :

$$\frac{x-f}{f'} = \frac{y-g}{g'} = \frac{z-k\sigma}{k};$$

la trace de cette droite sur le plan xOy est définie par

$$z = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{x-f}{f'} = \frac{y-g}{g'} = -\sigma, \qquad \text{d'où} \qquad x = f - \sigma f', \qquad y = g - \sigma g',$$

f', g' étant les cosinus directeurs de la demi-tangente positive à (Γ), et σ l'arc de (Γ); x, y sont les coordonnées d'un point d'une développante de (Γ). *Les traces des tangentes à l'hélice décrivent sur le plan de base une développante de la base. Réciproquement*, définissons la courbe (C) toujours de la même façon; les équations de la tangente sont

$$\frac{x-f}{f'} = \frac{y-g}{g'} = \frac{z-\lambda}{\gamma};$$

la trace sur le plan xOy est définie par $z = 0$ et $\frac{x-f}{f'} = \frac{y-g}{g'} = -\frac{\lambda}{\gamma}$, d'où

$$x = f - \frac{\lambda}{\gamma} f', \qquad y = g - \frac{\lambda}{\gamma} g';$$

pour que ce point décrive une développante de la base, il faut et il suffit que

$$\frac{\lambda'}{\lambda'} = \sigma, \qquad \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1}{\sigma}, \qquad L\frac{\lambda}{k} = L\sigma, \qquad \lambda = k\sigma,$$

et la courbe est une hélice.

Remarque. — *La trace de la tangente à l'hélice sur le plan de base est indépendante de k.*

Plan osculateur. — Le plan osculateur est défini par les deux directions

$$x' = f', \qquad y' = g', \qquad z' = k,$$
$$x'' = f'' = -\frac{g'}{\rho}, \qquad y'' = g'' = \frac{f'}{\rho}, \qquad z'' = 0,$$

d'après les relations (2). On voit que la direction x'', y'', z'' n'est autre que la normale au cylindre. *Le plan osculateur est normal au cylindre. L'hélice est une géodésique du cylindre.*

Réciproquement, cherchons les géodésiques du cylindre. Définissons encore la courbe par les équations

$$x = f(\sigma), \qquad y = g(\sigma), \qquad z = \lambda(\sigma),$$

d'où

$$x' = f', \qquad y' = g', \qquad z' = \lambda',$$

et, d'après (2),

$$x'' = -\frac{g'}{\rho}, \qquad y'' = \frac{f'}{\rho}, \qquad z'' = \lambda'';$$

les coefficients de l'équation du plan osculateur sont alors, d'après (3),

$$A = y'z'' - z'y'' = \lambda'' g' - \lambda' \frac{f'}{\rho}, \qquad B = z'x'' - x'z'' = -\lambda'' f' - \lambda' \frac{g'}{\rho}, \qquad C = x'y'' - y'x'' = \frac{1}{\rho};$$

pour que le plan osculateur contienne la normale au cylindre, dont les paramètres sont $-g'$, f', 0, il faut et il suffit que

$$-g'\left(\lambda'' g' - \lambda' \frac{f'}{\rho}\right) - f'\left(\lambda'' f' + \lambda' \frac{g'}{\rho}\right) = 0,$$

ou, d'après (1), $\lambda'' = 0$, $\lambda' = k$, et la courbe est une hélice. Si $k = 0$, on obtient les sections droites.

Remarque I. — La méthode précédente suppose que la courbe (C) corresponde point par point à la base (Γ); elle écarte donc le cas où z serait arbitraire, c'est-à-dire le cas des génératrices du cylindre. On sait que toute droite d'une surface est une géodésique de cette surface. Donc *les géodésiques d'un cylindre en sont les hélices, les sections droites et les génératrices.*

Remarque II. — Quand on applique une surface (S) sur une surface (S'), les géodésiques de (S) se transforment en les géodésiques de (S'). Le cylindre étant une surface développable, et les géodésiques du plan étant des droites, on voit que *si on développe le cylindre sur un plan, les hélices se transforment en droites, et réciproquement, en exceptant les droites correspondant aux génératrices et aux sections droites du cylindre.*

Remarque III. — Le plan osculateur ayant pour caractéristique la tangente, sa trace sur un plan quelconque a pour caractéristique la trace de la tangente sur ce plan, et l'enveloppe de la trace du plan osculateur n'est autre que le lieu de la trace de la tangente sur ce plan. Si, en particulier, on considère le plan de base, d'après la propriété de la tangente, on voit que *la trace du plan osculateur à l'hélice sur le plan de base enveloppe une développante de la base et réciproquement.*

Binormale. — Les paramètres directeurs de la binormale sont les coefficients de l'équation du plan osculateur

$$A = y'z'' - z'y'' = -k\frac{f'}{\rho}, \qquad B = z'x'' - x'z'' = -k\frac{g'}{\rho}, \qquad C = x'y'' - y'x'' = \frac{1}{\rho}, \qquad A^2 + B^2 + C^2 = \frac{1 + k^2}{\rho^2};$$

prenons sur cette binormale une direction positive quelconque, par exemple celle dont les cosinus directeurs sont

$$\alpha'' = -\frac{kf'}{\sqrt{1+k^2}}, \qquad \beta'' = -\frac{kg'}{\sqrt{1+k^2}}, \qquad \gamma'' = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}. \tag{7}$$

γ'' est constant, *la binormale à l'hélice fait un angle constant avec les génératrices du cylindre. Réciproquement*, si γ'' est constant, $d\gamma''$ est constamment nul; or, d'après le second groupe des formules de Frenet,

$$\frac{d\gamma''}{ds} = \frac{\gamma'}{T}.$$

$\frac{\gamma'}{T}$ est donc constamment nul; $\frac{1}{T}$ n'est pas constamment nul, sans quoi la courbe serait plane, donc γ' est constamment nul. Or, d'après le premier groupe des formules de Frenet,

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma'}{R};$$

donc $\frac{d\gamma}{ds}$ est constamment nul, γ est constant, la courbe est une hélice.

Remarque I. — *Dans une hélice, l'indicatrice sphérique des binormales est un cercle, et réciproquement*, comme pour l'indicatrice sphérique des tangentes.

Remarque II. — *La binormale à l'hélice est dans le plan tangent au cylindre.* Le plan tangent étant défini par la direction Oz et la direction de la tangente α, β, γ, il suffit de vérifier que la direction α'', β'', γ'' est dans ce plan, donc que

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \alpha\beta'' - \beta\alpha'';$$

la vérification est immédiate, d'après les formules (6), (7). *Réciproquement*, si les trois directions sont dans un même plan, $\alpha\beta'' - \beta\alpha'' = 0$, de même $\alpha B - \beta A$. Or, en nous reportant au calcul fait pour le plan osculateur, en définissant toujours la courbe (C) de la même façon, nous obtenons, d'après (1),

$$\alpha B - \beta A = \lambda''(f'^2 + g'^2) = \lambda'' = 0;$$

donc $\lambda' = k$ et la courbe est une hélice.

Remarque III. — Soient θ, θ_1 les angles de la tangente et de la binormale avec Oz;

$$\cos\theta = \gamma = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}, \qquad \cos\theta_1 = \gamma'' = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}},$$

d'où

$$\cos^2\theta + \cos^2\theta_1 = 1,$$

relation immédiate d'après la remarque II.

Remarque IV. — D'après la remarque II, *le plan rectifiant à l'hélice (défini par la tangente et la binormale) n'est autre que le plan tangent au cylindre. Sa caractéristique, qui est l'axe instantané de rotation du trièdre de Serret, est la génératrice du cylindre. Son enveloppe, qui est la surface rectifiante, est le cylindre lui-même. Les réciproques de ces propriétés sont vraies*, car toutes expriment que la binormale est dans le plan tangent au cylindre.

Normale principale. — Les cosinus directeurs α', β', γ' de la demi-normale principale telle que le trièdre (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ ait la disposition directe sont

$$\alpha' = \gamma\beta'' - \beta\gamma'' = -g', \qquad \beta' = \alpha\gamma'' - \gamma\alpha'' = f', \qquad \gamma' = \beta\alpha'' - \alpha\beta'' = 0; \tag{8}$$

la normale principale à l'hélice est la normale au cylindre et réciproquement, car le plan rectifiant est alors le plan tangent au cylindre et la courbe est une hélice.

Remarque I. — γ étant nul, *dans une hélice, l'indicatrice sphérique des normales principales est un grand cercle et réciproquement.*

Remarque II. — La propriété de la normale principale s'énonce encore ainsi : *la normale principale à l'hélice est perpendiculaire aux génératrices du cylindre, et réciproquement, une courbe dont la normale principale reste perpendiculaire à une direction fixe est une hélice*, car, si on prend cette direction fixe pour axe Oz, $\gamma' = 0$. Or, $\frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma'}{R} = 0$, γ est constant, la courbe est une hélice.

(*A suivre.*)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Concours spécial de 1919.

2315. — *On donne une ellipse rapportée à ses axes, de longueurs $2a$, $2b$, et les tangentes aux quatre sommets. Sur cette ellipse, on prend un point M, de coordonnées $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$, et l'on mène la tangente en ce point. On trace le cercle C qui a pour diamètre la partie de cette tangente comprise entre les tangentes aux sommets du grand axe et le cercle C′ qui a pour diamètre la partie de la même tangente qui est comprise entre les tangentes aux sommets du petit axe.*

1° *Former, en fonction du paramètre φ, les équations des cercles C et C′. Quelles remarques peut-on faire au sujet des deux familles de cercles C et C′ et de leur axe radical?*

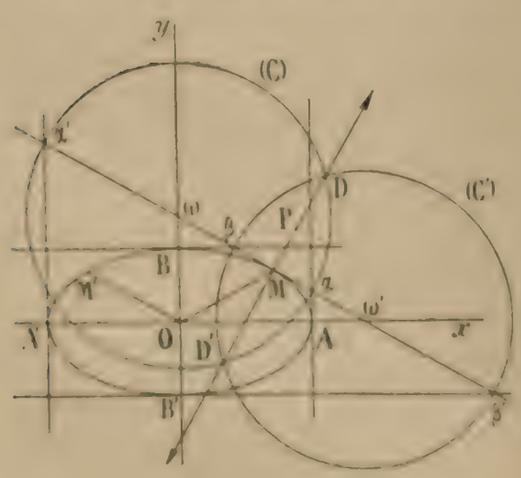
2° *Calculer, en fonction de φ, les coordonnées des points d'intersection D et D′ des deux cercles C et C′.*

3° *Trouver, lorsque M décrit l'ellipse, le lieu du point P qui divise le segment DD′ dans un rapport donné m.*

4° *Enveloppe des courbes ainsi trouvées pour les diverses valeurs de m. Discuter la réalité des points de contact de ces courbes avec leur enveloppe; distinguer les divers cas de figure.*

1° La tangente au point M a pour équation

$$\frac{x\cos\varphi}{a} + \frac{y\sin\varphi}{b} - 1 = 0;$$



elle rencontre les tangentes aux sommets du grand axe aux deux points α et α′,

$$\alpha \begin{cases} x = a, \\ y = b\dfrac{(1-\cos\varphi)}{\sin\varphi}; \end{cases} \qquad \alpha' \begin{cases} x = -a, \\ y = b\dfrac{(1+\cos\varphi)}{\sin\varphi}; \end{cases}$$

elle rencontre les tangentes aux sommets du petit axe aux points β et β′,

$$\beta \begin{cases} x = a\dfrac{(1-\sin\varphi)}{\cos\varphi}, \\ y = b; \end{cases} \qquad \beta' \begin{cases} x = a\dfrac{(1+\sin\varphi)}{\cos\varphi}, \\ y = -b. \end{cases}$$

Le cercle C, décrit sur $\alpha\alpha'$ comme diamètre, a pour équation

$$x^2 - a^2 + \left(y - \frac{b}{\sin\varphi} + b\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)\left(y - \frac{b}{\sin\varphi} - b\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right) = 0,$$

ou

$$C = x^2 + \left(y - \frac{b}{\sin\varphi}\right)^2 - a^2 - b^2\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi} = 0.$$

Le cercle C′, décrit sur ββ′ comme diamètre, a pour équation

$$y^2 - b^2 + \left(x - \frac{a}{\cos\varphi} + a\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)\left(x - \frac{a}{\cos\varphi} - a\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right) = 0,$$

ou

$$C' \equiv \left(x - \frac{a}{\cos\varphi}\right)^2 + y^2 - a^2\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} - b^2 = 0.$$

Ces deux équations, simplifiées, s'écrivent

$$C \equiv x^2 + y^2 - \frac{2by}{\sin\varphi} + b^2 - a^2 = 0,$$

$$C' \equiv x^2 + y^2 - \frac{2ax}{\cos\varphi} + a^2 - b^2 = 0;$$

elles montrent alors que ces deux cercles forment deux faisceaux linéaires conjugués ayant pour lignes des centres respectives l'axe des y et l'axe des x.

L'axe radical de ces deux cercles a pour équation

$$\frac{ax}{\cos\varphi} - \frac{by}{\sin\varphi} - c^2 = 0;$$

c'est la normale à l'ellipse au point M.

Tous ces résultats sont évidents géométriquement. Nous savons, en effet, que toute portion de la tangente à l'ellipse comprise entre les deux tangentes aux extrémités du grand axe est vue de l'un des foyers sous un angle droit; donc le cercle C, décrit sur αα′ comme diamètre, passe toujours aux deux foyers; par suite, tous les cercles C forment un faisceau linéaire ayant les deux foyers pour points fixes.

D'autre part, le rapport anharmonique des quatre sommets de l'ellipse, A, A′ et B, B′, est égal à -1; il en est de même de celui des quatre tangentes aux sommets; par conséquent, toute tangente à l'ellipse rencontre ces quatre droites en quatre points harmoniques, les couples de points α, α′ et β, β′ se divisent harmoniquement. Les deux cercles C et C′, décrits sur αα′ et ββ′ comme diamètres, sont orthogonaux; les cercles C′ forment donc le second faisceau orthogonal au faisceau C.

En outre, on sait que Oα, Oα′ sont deux diamètres conjugués de l'ellipse; de même, Oβ, Oβ′; les deux produits Mα.Mα′ et Mβ.Mβ′ sont égaux tous deux à $-b'^2$, b' étant le demi-diamètre parallèle à la tangente en M. Le point M est un point d'égale puissance par rapport aux deux cercles: c'est le pied de leur axe radical. Alors $M\alpha.M\alpha' = -\overline{MD}^2$ ou $-MD'^2$; les deux longueurs MD et MD′ sont égales à b'. Un vecteur équipollent à MD s'obtient en faisant tourner OM′, demi-diamètre parallèle à la tangente et limité au second quadrant de l'ellipse, de $-\frac{\pi}{2}$ autour du point O; comme les composantes de OM′ sont $-a\sin\varphi$, $b\cos\varphi$, celles de MD sont $b\cos\varphi$ et $a\sin\varphi$. Les coordonnées du point D sont

$$x = (a + b)\cos\varphi, \qquad y = (a + b)\sin\varphi.$$

De même, celles du point D′ sont

$$x = (a - b)\cos\varphi, \qquad y = (b - a)\sin\varphi.$$

Le lieu du point D est un cercle ayant pour centre le point O et pour rayon $a + b$. Le lieu du point D′ est un cercle ayant pour centre le point O et pour rayon $a - b$.

2° L'équation de l'axe radical des deux cercles, de la normale à l'ellipse, peut s'écrire

$$\frac{x - a\cos\varphi}{\frac{\cos\varphi}{a}} = \frac{y - b\sin\varphi}{\frac{\sin\varphi}{b}};$$

appelons λ la valeur commune des rapports, nous aurons

$$x = a\cos\varphi + \lambda\frac{\cos\varphi}{a}, \qquad y = b\sin\varphi + \frac{\lambda\sin\varphi}{b},$$

et nous aurons les λ des points de rencontre en écrivant que ces nombres vérifient l'équation du cercle C, ce qui donne

$$\left(a\cos\varphi + \frac{\lambda\cos\varphi}{a}\right)^2 + \left(b\sin\varphi + \frac{\lambda\sin\varphi}{b}\right)^2 - \frac{2b}{\sin\varphi}\left(b\sin\varphi + \frac{\lambda\sin\varphi}{b}\right) + b^2 - a^2 = 0,$$

$$\lambda^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) + a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi - a^2 - b^2 = 0,$$

$$\lambda^2 = a^2b^2, \qquad \lambda = \pm ab.$$

En portant ces valeurs de λ dans les expressions de x et de y, nous retrouvons les coordonnées des points D et D′ que nous avons déterminées antérieurement.

3° Si nous posons $\frac{PD}{PD'} = -m$, les coordonnées du point P sont

$$x = \frac{x_D + mx_{D'}}{1 + m}, \qquad y = \frac{y_D + my_{D'}}{1 + m},$$

ou

$$x = \frac{a + b + m(a - b)}{1 + m}\cos\varphi, \qquad y = \frac{a + b - m(a - b)}{1 + m}\sin\varphi,$$

$$x = (a + kb)\cos\varphi, \qquad y = (ak + b)\sin\varphi,$$

en posant $k = \frac{1 - m}{1 - m}$.

Le lieu du point P est donc la conique

$$\frac{x^2}{(a + kb)^2} + \frac{y^2}{(ka + b)^2} - 1 = 0.$$

Parmi ces coniques se trouvent l'ellipse proposée et les cercles, lieux des points D et D′.

Le nombre m que nous avons employé est celui de l'énoncé changé de signe; avec celui-ci, la valeur de k est $\frac{1 + m}{1 - m}$.

4° Nous aurons l'enveloppe de ces coniques en adjoignant à leur équation celle que l'on obtient en prenant la dérivée par rapport à k.

$$\frac{bx^2}{(a + kb)^2} + \frac{ay^2}{(ak + b)^2} = 0,$$

qui s'écrit

$$\frac{\dfrac{x^2}{(a + kb)^2}}{\dfrac{a + kb}{b}} = \frac{\dfrac{y^2}{(ak + b)^2}}{-\dfrac{ak + b}{a}};$$

en ajoutant terme à terme ces deux rapports égaux, nous avons

$$\frac{1}{\dfrac{a^2 - b^2}{ab}} = \frac{ab}{c^2};$$

par suite,

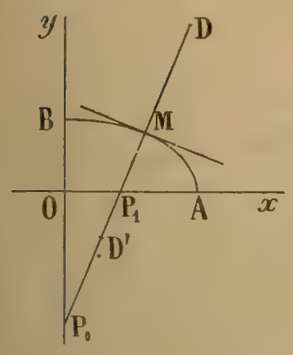
$$\frac{bx^2}{(a + kb)^2} = -\frac{ay^2}{(ak + b)^2} = \frac{ab}{c^2}.$$

Nous avons donc

$$\frac{x^2}{(a + kb)^2} = \frac{ax}{c^2}, \qquad \frac{x}{a + kb} = \left(\frac{ax}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

et
$$\frac{y^3}{(ak+b)^3} = -\frac{by}{c^2}, \qquad \frac{y}{(ak+b)} = -\left(\frac{by}{c^2}\right)^{\frac{1}{3}};$$
en portant dans l'équation de la conique, nous trouvons
$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{1}{3}}.$$

L'enveloppe est donc la développée de l'ellipse.



Comme cette développée enveloppe le point O, les points de contact seront réels si les deux droites
$$\frac{bx^2}{(a+kb)^3} + \frac{ay^2}{(b+ak)^3} = 0,$$
qui déterminent les points caractéristiques, sont réelles; or ceci exige que $a+kb$ et $b+ka$ soient de signes contraires, c'est-à-dire que k est compris entre les deux nombres $-\frac{a}{b}$ et $-\frac{b}{a}$. Pour $k=-\frac{a}{b}$, l'x du point P est nul, ce point est sur Oy, en P_0; pour $k=-\frac{b}{a}$, le point P est sur Ox, en P_1; pour $k=-1$, le point P est en D', entre P_0 et P_1. Les points de contact sont donc réels quand le point P est compris entre P_0 et P_1. Ils sont imaginaires pour toute autre position du point P.

Il est facile d'avoir les valeurs de m qui correspondent à cet intervalle, en se servant de l'égalité
$$k = \frac{1+m}{1-m}.$$

En particulier, le cercle de centre O et de rayon $a-b$ touche la développée en quatre points réels, tandis que l'ellipse et le cercle de centre O et de rayon $a+b$, la touchent en quatre points imaginaires.

Bonnes solutions par MM. Ch. Bernard; Paul Bernard; G. Deperros; G. Lach; L. Long; M., à Guéret; H.-L. Mennessier; M. Roux; Gaston Roy.

2316. — *On donne l'équation en t*

$$(E) \qquad (b-at)(1+t^2) - 1 = 0.$$

1° *Déterminer les coefficients a et b de manière que cette équation admette une racine double donnée θ.*

2° *Considérant les expressions ainsi trouvées pour a et b comme les coordonnées rectangulaires d'un point M, construire le lieu (C) des positions que prend le point M quand on fait varier la racine double donnée θ.*

Les coefficients a et b étant supposés quelconques, quelle est la signification géométrique de l'équation (E) relativement à la courbe (C) et au point P de coordonnées a et b?

3° *Dans l'équation (E), on donne à b la valeur $\frac{5}{8}$ et on laisse a quelconque; discuter, suivant la valeur de a, la réalité des racines de l'équation (E).*

Contrôler les résultats de la discussion algébrique en utilisant la signification géométrique de l'équation (E).

4° *La tangente à la courbe (C), de coefficient angulaire $m = \operatorname{tg}\alpha$, rencontre cette courbe en deux points M_1 et M_2 autres que le point de contact M_0. Calculer, en fonction de α, la longueur de l'arc $M_1M_0M_2$ compris, sur la courbe C, entre les points M_1 et M_2. On supposera $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.*

1. L'équation
$$f(t) = (b-at)(1+t^2) - 1 = 0$$

aura une racine double θ, si cette équation est vérifiée pour $t = \theta$, ainsi que l'équation dérivée par rapport à t. Ceci donne les deux équations

$$(b - a\theta)(1 + \theta^2) - 1 = 0,$$
$$2\theta(b - a\theta) - a(1 + \theta^2) = 0;$$

remplaçons $b - a\theta$ par $\frac{1}{1 + \theta^2}$ dans la seconde équation; nous aurons

$$a = \frac{2\theta}{(1 + \theta^2)^2};$$

la première nous donne alors

$$b - a\theta = \frac{1}{1 + \theta^2}, \qquad b = \frac{2\theta^2 + 1 + \theta^2}{(1 + \theta^2)^2} = \frac{1 + 3\theta^2}{(1 + \theta^2)^2}.$$

Nous avons donc

$$a = \frac{2\theta}{(1 + \theta^2)^2}, \qquad b = \frac{1 + 3\theta^2}{(1 + \theta^2)^2}.$$

2. Pour avoir la signification géométrique de cette question, nous regarderons θ comme un paramètre variable, t, a et b, comme les coordonnées d'un point (x, y) et nous aurons la courbe C dont les équations paramétriques sont

$$x = \frac{2t}{(1 + t^2)^2}, \qquad y = \frac{1 + 3t^2}{(1 + t^2)^2}.$$

Cette courbe est le lieu des points pour lesquels l'équation

$$(y - tx)(1 + t^2) - 1 = 0$$

a une racine double; c'est-à-dire le lieu des points par lequel passent deux droites confondues de cette famille de droites; c'est l'enveloppe des droites dont l'équation précédente est l'équation générale.

La courbe C est donc de troisième classe et de quatrième ordre.

Il est facile de voir que c'est une hypocycloïde à trois rebroussements : il n'y a qu'à former l'équation tangentielle. Or, si on identifie la droite

$$y = tx + \frac{1}{1 + t^2}$$

à la droite $ux + vy + w = 0$, on trouve

$$t = -\frac{u}{v}, \qquad \frac{1}{1 + t^2} = -\frac{w}{v};$$

en éliminant t entre ces deux équations, on trouve

$$w(u^2 + v^2) + v^3 = 0,$$

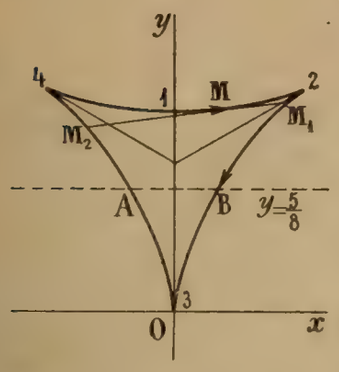
équation tangentielle d'une courbe de troisième classe doublement tangente à la droite de l'infini aux points cycliques, ce qui est le caractère absolu de la courbe indiquée.

Pour construire cette courbe, nous ferons varier t de $-\infty$ à $+\infty$. Mais nous remarquons que, si nous changeons t en $-t$, x se change en $-x$ et y ne change pas; il y a donc une symétrie par rapport à Oy, et il nous suffira de faire varier t de 0 à $+\infty$; nous aurons ainsi une moitié de la courbe.

Les dérivées de x et de y par rapport à t sont

$$\frac{dx}{dt} = 2\frac{1 - 3t^2}{(1 + t^2)^3}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{2t(1 - 3t^2)}{(1 + t^2)^3};$$

elles nous montrent que x et y croissent depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$, et décroissent ensuite



depuis $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ jusqu'à $t=-\infty$. Le point $t=0$ a pour coordonnées $x=0$, $y=1$; la tangente en ce point a pour coefficient angulaire $t=0$, elle est horizontale. Le point $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ est un point de rebroussement; ses coordonnées sont $x=\frac{3\sqrt{3}}{8}$, $y=\frac{9}{8}$; la tangente en ce point fait l'angle de 30° avec Ox. Le point $t=\infty$ est l'origine des coordonnées; la tangente en ce point est Oy. Le point de rencontre de la tangente au point de rebroussement avec Oy a pour ordonnée $y=\frac{1}{1+t^2}=\frac{3}{4}$. La courbe est alors facile à placer tout entière.

Elle divise le plan en deux régions; dans chacune des régions, l'équation du troisième degré en t a toujours, pour tout point (a, b) de cette région, le même nombre de racines réelles. Or, il est visible que du point $x=0$, $y=\frac{3}{4}$, nous pouvons mener trois tangentes réelles à la courbe; en tout point de la région intérieure, l'équation en t a trois racines réelles et distinctes. Pour un point de l'autre région, $x=0$, $y<0$, il est visible que l'équation en t a deux racines imaginaires; on ne peut mener d'un tel point qu'une tangente réelle à la courbe. Si le point est pris sur la courbe, il y a deux tangentes confondues avec la tangente en ce point et une autre.

3. Si on fait $b=\frac{5}{8}$ dans l'équation donnée du troisième degré par rapport à t, cette équation devient

$$(5-8at)(1+t^2)-8=0,$$

ou

$$8at^3-5t^2+8at+3=0.$$

La condition de réalité des racines de cette équation est $\Delta<0$, Δ désignant le discriminant, c'est-à-dire le résultant des deux dérivées partielles; celles-ci sont

$$24at^3-10t+8a=0,$$
$$-5t^2+16at+9=0;$$

divisons les coefficients de la première par 2, et écrivons le résultant; nous aurons, après des simplifications aisées,

$$\overline{64}^2a^4+122\times 64a^2-3\times 125<0;$$

ceci se décompose immédiatement en deux facteurs,

$$(64a^2+125)(64a^2-3)<0,$$

et nous voyons de suite que a^2 doit être plus petit que $\frac{3}{64}$, c'est-à-dire que a doit être compris entre $\frac{-\sqrt{3}}{8}$ et $\frac{+\sqrt{3}}{8}$.

L'explication géométrique est très simple : la droite $y=\frac{5}{8}$ rencontre la courbe en deux points A et B dont les abscisses sont $\frac{-\sqrt{3}}{8}$ et $\frac{+\sqrt{3}}{8}$ et, pour que d'un point de cette droite nous puissions mener trois tangentes réelles à la courbe, il faut que ce point soit compris entre A et B, c'est-à-dire situé dans la région intérieure. Vérifions ce fait en cherchant les points de rencontre de la droite $y=\frac{5}{8}$ avec la courbe; nous aurons ainsi

$$\frac{5}{8}=\frac{1+3t^2}{(1+t^2)^2},$$

ou

$$5t^4 - 14t^2 - 3 = 0,$$

$$t^2 = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 15}}{5} = \frac{7 \pm 8}{5} = 3;$$

les t des deux points de rencontre réels sont $t = \pm\sqrt{3}$. A ces valeurs correspondent bien les valeurs de x que nous avons trouvées.

4. La tangente à la courbe de coefficient angulaire $m = \operatorname{tg}\alpha$ rencontre la courbe en deux points confondus avec le point de contact, M, et en deux autres points. Les t des points de rencontre sont donnés par l'équation

$$(1 - 3t^2 - 2mt)(1 + m^2) - (1 + t^2)^2 = 0,$$

$$t^4 - (1 + 3m^2)t^2 + 2m(1 + m^2)t - m^2 = 0;$$

le premier membre est divisible deux fois par $t - m$, et il reste ensuite

$$t^2 + 2mt - 1 = 0;$$

les deux racines de cette équation sont réelles et de signes contraires; elles correspondent aux points M_1 et M_2 où la tangente rencontre les deux arcs de courbe autres que celui qui porte le point de contact.

Le produit des deux valeurs de t étant égal à -1, nous retrouvons cette belle propriété de l'hypocycloïde à trois rebroussements : *les deux tangentes à la courbe aux points où elle est rencontrée par une tangente quelconque sont rectangulaires.*

Nous pouvons toujours supposer que le point de contact M est sur l'arc 12; le problème du calcul de l'arc est le même dans tous les cas. Posons alors $m = \operatorname{tg}\alpha$, et $t = \operatorname{tg}\varphi$; nous aurons

$$\operatorname{tg}^2\varphi + 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varphi - 1 = 0,$$

ou

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}^2\varphi} = \operatorname{tg}2\varphi, \qquad \operatorname{tg}2\varphi = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right);$$

l'angle φ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2} - \alpha$ est compris entre $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$; l'angle φ du point M_1 est la moitié de cet angle, $\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$, et l'angle φ du point M_2, qui est négatif, est égal à $\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$; pour avoir la longueur totale de l'arc $M_2 4 M 2 M_1$, nous ferons venir φ de $-\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ à $-\frac{\pi}{6}$, puis de $-\frac{\pi}{6}$ à $+\frac{\pi}{6}$ et de $\frac{\pi}{6}$ à $\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$.

Calculons alors ds; nous avons

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{4(1 - 3t^2)^2}{(1 + t^2)^4}(1 + t^2)\,dt^2,$$

$$ds^2 = \frac{4(1 - 3t^2)^2\,dt^2}{(1 + t^2)^3};$$

donc

$$ds = \frac{2(1 - 3t^2)\,dt}{(1 + t^2)^2\sqrt{1 + t^2}}.$$

Cette expression est positive dans le second intervalle et negative dans les deux autres; nous pouvons maintenant calculer s, puisque nous connaissons le signe de chaque partie de l'intégrale. En remplaçant t par $\operatorname{tg}\varphi$, nous avons

$$ds = 2(\cos^2\varphi - 3\sin^2\varphi)\cos\varphi\,d\varphi = 2\cos 3\varphi\,d\varphi;$$

par suite,

$$s = \frac{2\sin 3\varphi}{3} + C.$$

Dans le second intervalle,

$$s_2 = \frac{2}{3}(\sin 3\varphi)_{\varphi}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{4}{3};$$

dans le premier,

$$s_1 = \frac{2}{3}(\sin 3\varphi)_{\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{3}\left[\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{3\alpha}{2}\right)-1\right],$$

dans le troisième,

$$s_3 = \frac{2}{3}(\sin 3\varphi)_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{3}\left[\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{3\alpha}{2}\right)-1\right].$$

Les deux parties s_1 et s_3 sont visiblement négatives, et, en prenant leurs valeurs absolues, nous avons

$$s = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left[2 - \sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{3\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{3\alpha}{2}\right)\right],$$

$$s = \frac{4}{3} + \frac{4}{3}\left[1 - \sin\frac{3\pi}{4}\cos\frac{3\alpha}{2}\right].$$

Le partie $s_2 = \frac{4}{3}$ représente la longueur de l'un des trois arcs identiques qui constituent la courbe tout entière. La longueur totale de la courbe est donc 4.

Quant à la longueur totale de la partie que nous avons calculée, et qui peut s'écrire

$$s = \frac{4}{3}\left(2 - \frac{\cos\frac{3\alpha}{2}}{\sqrt{2}}\right),$$

elle varie avec α; elle est minimum pour $\alpha = 0$ et maximum pour $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

H.-L. MENNESSIER, à Évreux.

Bonnes solutions : MM. M., à Guéret; G. Lach, à Douai; Ch. Pacé, enseigne de vaisseau; P. Bernard, à Paris.
Assez bonnes solutions : MM. Abadie, sous-lieutenant à Metz; L. Long, à Chatellerault; Gaston Roy, à Paris.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1920)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (*suite*).

10460. — On considère la surface $xy - az = 0$, et on demande le lieu des points de cette surface par où passent deux génératrices faisant l'angle donné α. Construire la surface en géométrie descriptive, et déterminer un point du lieu sur une génératrice donnée.

— 461. — On donne une surface gauche de révolution ayant pour méridienne une hyperbole équilatère. Par les différents points d'une génératrice G on mène des normales à la surface n'ayant pas leurs pieds sur G. Trouver la surface engendrée par ces normales. Prévoir géométriquement les propriétés de cette surface.

— 462. — Lieu des perpendiculaires abaissées de l'origine sur les génératrices de la surface $xy = az$.

— 463. — Étudier la nature de la quadrique

$$x^2 + 2yz + 2(y^2 + 2zx) + \lambda(z^2 + 2xy) = 1.$$

Déterminer λ de façon qu'elle soit de révolution.

— 464. — Lieu des sommets des paraboloïdes passant par deux droites et un point.

— 465. — Lieu des sommets des paraboloïdes passant par deux droites.

— 466. — Podaire d'un ellipsoïde par rapport à son centre. Démontrer que la surface obtenue est l'inverse d'une quadrique.

— 467. — Trouver les ombilics de la surface $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2z = 0$.

— 468. — On coupe l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ par le plan $ux + vy + wz = 0$, et on demande la surface engendrée par les normales à la surface aux points de l'ellipse section. Étudier la surface dans le cas où $w = 0$.

10469. — On donne le paraboloïde $xy - az = 0$ et le point $A(x_0, y_0, z_0)$. Lieu des droites passant par le point A, telles que les plans tangents menés à la surface par chacune de ces droites soient perpendiculaires.

— **470.** — Lieu des ombilics des quadriques homofocales.

— **471.** — Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de l'origine sur les génératrices de la surface $xy = az$.

— **472.** — La normale en un point M de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ rencontre la surface en un autre point N. Quel lieu doit décrire le point M pour que le milieu de MN soit dans le plan des xy?

— **473.** — Trouver le lieu des sommets des paraboloïdes $ax(z+c) + by(z-c) + u(z^2 - c^2) = 0$, sachant que le rapport des paramètres des paraboles principales est constant.

— **474.** — Trouver les génératrices de la surface $xy = 2z$. On considère en particulier la génératrice G $x = 1$, $y = 2z$. Lieu des symétriques des génératrices de l'autre système par rapport à G.

— **475.** — On donne le cylindre $y^2 = 6x$ et l'ellipsoïde $2x^2 + y^2 + z^2 - 8x = 0$: trouver l'aire de la surface latérale du cylindre comprise à l'intérieur de l'ellipsoïde.

— **476.** — Que représente l'équation $xz - 2a(x + y + z) + 2a^2 = 0$? Calculer le volume limité par cette surface et par les plans de coordonnées.

— **477.** — Calculer l'aire de l'ellipsoïde de révolution $x^2 + y^2 + 9z^2 = a^2$.

— **478.** — Lieu des sommets des paraboles sections de la surface $x^2 + y^2 - z^2 - a^2 = 0$ par des plans passant par un point donné.

IV. — Géométrie descriptive.

— **479.** — On donne un cône dont la base est un cercle situé dans un plan et défini par son rabattement. On prend la trace de ce cône sur le plan vertical comme directrice d'un cylindre dont on donne la direction des génératrices. Trouver les contours apparents de ce cylindre.

— **480.** — On donne un cône ayant pour base un cercle dans le plan horizontal. Construire la trace horizontale du cône supplémentaire.

— **481.** — On donne un cercle dans le plan horizontal et deux points. Trouver la direction des génératrices du cylindre passant par les deux points et ayant le cercle donné pour base.

— **482.** — On donne un cône de révolution à axe vertical. Mener par un point des plans tangents au cône supplémentaire.

— **483.** — Un cercle dans le plan horizontal est la base d'un cône de sommet (s, s'). On le coupe par le plan bissecteur du premier dièdre. La section est la base d'un deuxième cône de sommet (t, t'). Trouver les contours apparents de ce deuxième cône. On considère ensuite la section comme directrice d'un cylindre, dont on donne la direction des génératrices; trouver les contours apparents de ce cylindre.

— **484.** — On donne un cône de révolution à axe vertical et un deuxième cône ayant pour base un cercle dans le plan horizontal. Mener une normale commune à ces deux cônes.

— **485.** — Normale commune à un cône de révolution à axe vertical et à un cylindre de révolution à axe horizontal.

— **486.** — On donne un cône défini par son sommet et sa base qui est un cercle horizontal. Mener par une droite donnée un plan coupant ce cône suivant une parabole. Déterminer le sommet de cette parabole; construire aussi le sommet de la projection horizontale.

— **487.** — On donne un cylindre ayant pour base un cercle dans le plan horizontal. On coupe ce cylindre par le premier bissecteur; la courbe obtenue est la base d'un cône qui a pour sommet un point donné. On considère le cône supplémentaire et on demande les points de rencontre de ce cône avec la ligne de terre.

— **488.** — On donne un plan par ses traces et un cercle situé dans ce plan et défini par son rabattement autour de la trace horizontale. Ce cercle est la directrice d'un cône, dont on donne la projection horizontale du sommet. Déterminer la projection verticale de ce point de façon que le cône soit coupé par un plan donné suivant une parabole et construire le sommet de cette parabole.

— **489.** — On donne un cône défini par son sommet et sa base située dans le plan horizontal. Un plan défini par ses traces rencontre le cône suivant une courbe C. Mener à la projection horizontale de cette courbe des tangentes par un point du plan horizontal.

— **490.** — On donne un cône ayant pour base un cercle horizontal, et on le coupe par un plan défini par ses traces. Trouver un point de la section où la tangente fait 30° avec la ligne de terre.

— **491.** — Mener à une sphère un plan tangent faisant des angles donnés avec les plans de projection.

— **492.** — Construire une sphère passant par trois points et tangente au plan vertical.

— **493.** — Construire une sphère passant par deux points et tangente aux plans de projection.

— **494.** — Trouver les contours apparents d'un cylindre de révolution, connaissant deux génératrices et le rayon.

— **495.** — On donne une sphère et dans le plan horizontal une droite D et un point a sur cette droite. Trouver un point lumineux S tel que l'ombre de la sphère sur le plan horizontal soit une parabole tangente à la droite D au point a.

— **496.** — Mener à une sphère des plans tangents par une horizontale.

— **497.** — Point brillant d'une sphère et d'une surface de révolution.

— **498.** — Déterminer un cylindre de révolution passant par une ellipse donnée dans le plan horizontal.

— **499.** — On donne un cylindre de révolution parallèle à la ligne de terre. Construire un cône de révolution tangent à ce cylindre, connaissant l'axe et le sommet.

10500. — On donne un plan par ses traces. Placer dans ce plan un segment de droite s'appuyant sur les deux plans de projections et faisant avec la ligne de terre un angle donné.

— **501.** — On donne une ellipse dans un plan horizontal. Déterminer un cône de révolution passant par cette ellipse et d'angle au sommet donné.

— **502.** — On donne un cône de révolution défini par son axe et une génératrice. Mener par une horizontale donnée un plan coupant ce cône suivant une parabole.

— **503.** — Dans un plan défini par ses traces on donne une parabole P définie par sa projection horizontale. Déterminer le sommet d'un cône de révolution passant par la parabole P et ayant pour demi-angle au sommet 30°.

— **504.** — Construire un cône de révolution connaissant l'axe, le sommet et sachant qu'il est tangent à un cylindre ayant pour base un cercle dans le plan horizontal.

— **505.** — Construire une droite passant par un point donné, située à une distance donnée d'une droite donnée et faisant un angle donné avec la ligne de terre.

— **506.** — Déterminer les contours apparents d'un cône de révolution connaissant le sommet, l'axe et une tangente.

— **507.** — Un hyperboloïde de révolution est défini par son axe de front et une génératrice verticale. On donne la projection verticale d'un point de la surface; trouver la projection horizontale et le plan tangent en ce point.

— **508.** — Condition pour que trois droites de l'espace définissent un hyperboloïde de révolution.

— **509.** — On donne un hyperboloïde de révolution engendré par une droite D tournant autour de la ligne de terre. Mener à cette surface un plan tangent parallèle à une droite donnée Δ.

(A suivre.)

SUJETS DE CONCOURS

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Session spéciale de juillet 1920.

Mathématiques élémentaires(*).

Un cercle variable Γ, tangent à une droite Δ donnée, en un point A donné, rencontre une autre droite Δ′ donnée, en deux points variables B et C. Soit T le triangle ABC.

On déterminera :

1° la situation (enveloppes, etc.) des bissectrices de T;

2° le lieu du centre du cercle des neuf points de T;

3° l'enveloppe de la droite qui joint le centre de Γ au centre du cercle des neuf points;

4° l'enveloppe des hauteurs de T;

5° le triangle T, en supposant donné $AB + AC + BC$;

6° le triangle T en supposant donné $AB + AC - BC$;

7° deux points d'où l'on voit CC′ sous des angles constants, C′ désignant le milieu de AB.

Mathématiques spéciales.

I. — On considère les deux droites Δ, Δ′ qui, rapportées à trois axes rectangulaires, ont pour équations

$$\Delta \begin{cases} x - d = 0, \\ y - z \operatorname{tg}\theta = 0, \end{cases} \qquad \Delta' \begin{cases} x + d = 0, \\ y + z \operatorname{tg}\theta = 0. \end{cases}$$

Former l'équation de la surface (P) lieu des points M de l'espace équidistants de Δ et Δ′. Montrer que le plan tangent à (P) au point M est perpendiculaire en son milieu I au segment NN′, qui joint les projections N, N′ du point M sur Δ et Δ′.

Quelles lignes doit décrire M sur (P) : 1° pour que l'un des points N, N′ reste fixe; 2° pour que $NN' = \text{const.}$; 3° pour que la droite NN′ reste parallèle à un plan fixe?

II. — Exprimer, en fonction des coordonnées (α, β, γ) du point M, celles du milieu I de NN′. Que décrivent

(*) Des solutions étudiées de la question sont publiées dans le *Journal de Mathématiques élémentaires.*

le point I et la droite NN' lorsque M décrit une droite tracée sur (P)? Montrer que si A, A' sont les pieds de Δ et Δ' sur Oz on a $AN \pm A'N' = \text{const.}$ lorsque M décrit une droite tracée sur (P).

III. — Un paraboloïde équilatère (P) d'équation $yz - ax = 0$ peut, d'une infinité de manières, être considéré comme lieu des points M équidistants de deux droites Δ, Δ'. Sur quelle surface doivent se trouver Δ et Δ'?

Montrer que Δ et Δ' sont conjuguées par rapport à (P).

La longueur (imaginaire) interceptée par (P) sur Δ est constante.

Le point M restant fixe sur (P) et le couple (Δ, Δ') variant, trouver le lieu du milieu I de NN', le lieu de la droite NN' et le lieu des points N, N'.

Le lieu de NN' est un plan Π. Quelle est son enveloppe quand M varie sur (P)?

Le lieu des points N, N' est une ellipse (E). Montrer que, lorsque M varie, la distance focale de (E) reste constante.

IV. — Le lieu des points M de l'espace, dont les distances à deux droites fixes Δ, Δ' non coplanes sont dans un rapport constant k ($k \neq 1$), est un hyperboloïde à une nappe admettant la perpendiculaire commune **à Δ et Δ' pour axe de symétrie transverse.**

Inversement, étant donné un hyperboloïde à une nappe (H) d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ ($a > b$), il **n'est susceptible du mode de définition précédent que si on a** $\frac{1}{b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}$.

Si cette relation est vérifiée, il existe une infinité de couples tels que (Δ, Δ'). Ces deux droites rencontrent Ox **orthogonalement.**

Sur quelle surface (S) doivent se trouver Δ et Δ'? Montrer que (S) est sa propre polaire réciproque par rapport à (H).

La longueur (imaginaire) interceptée par (H) sur Δ est constante.

Le lieu de la projection N du point M sur Δ lorsque Δ varie, M restant fixe, est l'intersection d'un cylindre **circulaire droit et d'un cylindre parabolique.**

On suppose Δ fixe et on considère les sphères tangentes à Δ et dont le centre M décrit (H). Montrer que **l'enveloppe de ces sphères est une surface unicursale dont on évaluera le degré.**

Calcul différentiel et intégral.

1° Déterminer la surface S la plus générale dont les normales sont toutes tangentes à un cylindre de **révolution C de rayon r.**

On calculera les coordonnées x, y, z d'un point M de S en fonction des angles θ, φ qui définissent la direction de la normale MN à S en M, de sorte que les cosinus directeurs de cette normale soient

$$\sin\theta\cos\varphi, \qquad \sin\theta\sin\varphi, \qquad \cos\theta.$$

(On supposera les trois axes de coordonnées rectangulaires et on prendra pour Oz l'axe du cylindre C.

2° Déterminer géométriquement les lignes de courbure des surfaces S.

3° A quelle relation doivent satisfaire θ et φ le long d'une de ces lignes de courbure?

4° Les normales à la surface S sont tangentes non seulement au cylindre C, mais aussi à une seconde nappe C' de la développée de S. Déterminer analytiquement la surface C'.

5° Montrer que les sections de S et de C par un plan quelconque parallèle à xOy sont des courbes simples.

6° Calculer les rayons de courbure principaux de S en un point M de S.

7° On suppose développé le cylindre C sur un de ses plans tangents et on y prend comme axes la génératrice de contact et le développement de la base du cylindre, les nouvelles coordonnées étant appelées τ et σ. On appelle alors I et J les développements des intersections I_n et J_n du cylindre C avec les surfaces C' et S et on demande de déterminer analytiquement I et J.

8° On demande de déterminer la développée de J.

9° On demande de déterminer S de sorte que la courbe I soit un cercle.

Mécanique rationnelle.

Une barre homogène pesante de longueur $2a$ est mobile librement et sans frottement autour d'une de ses extrémités O supposée fixe.

1° Étudier le mouvement de la barre correspondant à des conditions initiales quelconques. On désignera

par θ l'angle qu'elle fait avec la verticale descendante et par ψ l'angle que fait le plan vertical qui la contient avec un plan vertical fixe.

Examiner le cas où l'un des deux angles ψ et θ resterait constant.

2° On considère une circonférence matérielle fixe située dans un plan horizontal et ayant son centre sur la verticale du point O, au-dessous de ce point. A un moment donné, la barre s'appuyant sur cette circonférence, on lui imprime une rotation de vitesse angulaire ω autour de la verticale du point O. A quelle condition doit satisfaire ω pour que la barre se détache de la circonférence?

Si cette condition n'est pas réalisée, déterminer le mouvement de la barre en supposant qu'il y ait frottement au contact de la barre et de la circonférence, le coefficient de frottement étant f. Exprimer explicitement l'angle ψ en fonction du temps. On désignera par α l'angle constant que fait la barre avec la verticale.

3° On considère maintenant, au lieu de la circonférence précédente, une hélice circulaire matérielle fixe ayant pour axe la verticale du point O, pour rayon la demi-longueur a de la barre et un pas donné $2\pi h$. A un moment donné, la barre s'appuie sur cette hélice dans une position horizontale et elle est abandonnée à elle-même sans vitesse. Déterminer le mouvement de la barre, en supposant qu'il n'y ait pas de frottement. Calculer la réaction exercée par l'hélice. A quelle condition doit satisfaire le pas de l'hélice pour que la barre se détache de l'hélice avant que son extrémité opposée à O soit venue en contact avec l'hélice? Montrer que, si cette condition est réalisée, l'angle ψ dont a tourné le plan vertical de la barre au moment où elle se détache de l'hélice est supérieur à une limite fixe qu'on déterminera.

4° On suppose de nouveau, comme dans la première partie, que le mouvement de la barre est absolument libre autour du point O. Un insecte de dimensions négligeables et de même masse que la barre est placé sur la barre qui est supposée suffisamment rugueuse pour que cet insecte puisse prendre le long de la barre un mouvement arbitraire.

La barre, étant placée dans une position donnée, est abandonnée à elle-même sans vitesse. Si l'insecte garde sur la barre une position fixe M_0, définie par son abscisse u_0 comptée à partir du point O, la barre oscille comme un pendule simple. On suppose que la longueur l de ce pendule simple est supérieure à $2u_0$. Montrer que, les conditions initiales relatives à la barre restant les mêmes, l'insecte peut, et d'une infinité de manières, en partant du point M_0, prendre le long de la barre un mouvement tel que le mouvement qui en résulte pour la barre ne soit pas changé, c'est-à-dire que la barre oscille comme un pendule simple de longueur l. Déterminer explicitement ces mouvements de l'insecte pour $l = 4u_0$.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE CENTRALE

Concours de 1916.

2330. — *Dans le plan fixe* P *pris pour plan de la figure, soit donné l'axe* Ox *et le pôle* O *d'un système de coordonnées polaires où* ρ *désigne le rayon vecteur et* ω *l'angle polaire d'un point quelconque de* P. *On considère la droite* (D) *du plan* P *dont l'équation, dans ce système, est*

$$\rho = \frac{5a}{3\cos\omega - 4\sin\omega},$$

où a *représente une longueur positive donnée.*

A tout point S *de* (D) *de coordonnées polaires* ρ_1 *et* ω_1 ($0 \leqslant \omega_1 \leqslant \pi$, *rapport d'une circonférence de cercle à son diamètre*) *correspond, dans le plan* P, *un point* M *dont les coordonnées polaires, dans le même système, sont* $\rho = \rho_1$ *et* $\omega = 2\omega_1$.

1° *Construire le lieu de* M *lorsque* S *décrit* (D) *tout entière.*

2° *Sachant que* S *décrit* (D), *dans le sens des* ω *croissants, avec une vitesse constante* a, *démontrer que*

la vitesse aréolaire M *par rapport au pôle* O *est constante et en donner la valeur, puis calculer l'accélération de* M *en fonction de son rayon vecteur* ρ.

1. Les coordonnées ρ_1, ω_1 du point S de (D) sont liées par la relation

$$\rho_1 = \frac{5a}{3\cos\omega_1 - 4\sin\omega_1} = \frac{a}{\frac{3}{5}\cos\omega_1 - \frac{4}{5}\sin\omega_1}.$$

Posons $\frac{3}{5} = \cos\theta$, $\frac{4}{5} = \sin\theta$. Il vient

$$\rho_1 = \frac{a}{\cos\omega_1\cos\theta - \sin\omega_1\sin\theta} = \frac{a}{\cos(\omega_1 + \theta)}.$$

L'équation du lieu du point M ($\rho = \rho_1$, $\omega = 2\omega_1$) est

$$\rho = \frac{a}{\cos\left(\frac{\omega}{2} + \theta\right)};$$

si nous posons $\omega = \omega_0 - 2\theta$, elle devient

$$\rho = \frac{a}{\cos\frac{\omega_0}{2}}.$$

Lorsqu'on change ω_0 en $(2\pi - \omega_0)$, ρ se change en $-\rho$. Le lieu de M est donc symétrique par rapport à la perpendiculaire au nouvel axe polaire Ox_0, en O. Changeons maintenant ω_0 en $2\pi + \omega_0$: ρ devient $-\rho$ et la courbe lieu de M admet l'origine O pour centre de symétrie; on en conclut que l'axe polaire Ox_0 est aussi un axe de symétrie.

Calculons la tangente de l'angle V que fait le rayon vecteur OM avec la demi-tangente MT à la courbe dans le sens des ω_0 croissants :

$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho_0}, \qquad \rho_0 = a\,.\,\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{\omega_0}{2}}{\cos^2\frac{\omega_0}{2}},$$

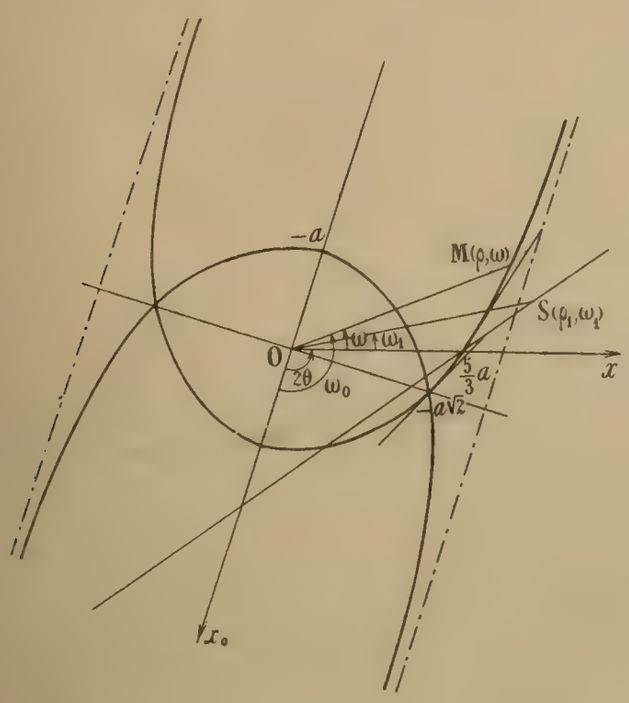
$$\operatorname{tg} V = 2\cot.\frac{\omega_0}{2}.$$

En faisant varier ω_0 de 0 à π nous obtiendrons le quart de la courbe et il suffira de la compléter au moyen des symétries déterminées précédemment, l'axe Ox_0 faisant avec Ox l'angle 2θ en sens inverse des ω_0 croissants. Pour $\omega_0 = \pi$, ρ devient infini et nous devons rechercher si la courbe admet une asymptote, soit d sa distance à l'origine O, estimée sur la demi-droite dirigée faisant avec l'axe polaire l'angle $\frac{3\pi}{2}$:

$$\rho\sin(\omega_0 - \pi) = a\,\frac{\sin(\omega_0 - \pi)}{\cos\frac{\omega_0}{2}}.$$

$$d = \text{limite}_{\omega_0 = \pi}\left[a\,.\,\frac{-\sin\omega_0}{\cos\frac{\omega_0}{2}} = -2a\lim\left(\sin\frac{\omega_0}{2}\right)\right] = -2a$$

Nous construirons donc l'asymptote en portant sur le rayon vecteur dirigé qui fait l'angle $+\frac{3\pi}{2}$ avec Ox_0, et à l'opposé, la longueur $2a$; la perpendiculaire élevée à celle-ci en son extrémité est



l'asymptote cherchée, parallèle à Ox_0. Le tableau et la courbe ci-dessous résument les variations de ρ.

ω_0	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	2θ	$\nearrow$	π
$\frac{\omega_0}{2}$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	θ	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	a	$\nearrow$	$a\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\frac{5}{3}a$	$\nearrow$	$+\infty$
$\operatorname{tg} V$	∞		-2		$-\frac{3}{2}$		0

2. La vitesse aréolaire de M a pour expression

$$\frac{d\Lambda}{dt}=\frac{1}{2}\rho^2\frac{d\omega}{dt};$$

or, de la relation $\omega=2\omega_1$, on tire $\frac{d\omega}{dt}=2\frac{d\omega_1}{dt}$, et la distance OH de O à la droite (D) est a. En effet, (D) rencontre Ox_0 au point de coordonnées $\left(\omega_1=\pi-2\theta,\quad \rho_1=-\frac{5}{3}a\right)$ et elle est également inclinée sur Ox et Ox_0 :

$$\mathrm{OH}=\frac{5}{3}a\cos\theta=\frac{5}{3}a\times\frac{3}{5}=a,$$

d'où $\mathrm{HS}=at$ (sens des ω_1 croissants),

$$\operatorname{tg}(\theta+\omega_1)=\frac{at}{a}=t,\qquad \operatorname{arc\,tg} t=\theta+\omega_1;$$

dérivons par rapport à t :

$$\frac{d\omega_1}{dt}=\frac{1}{1+t^2},\qquad \frac{d\omega}{dt}=\frac{2}{1+t^2},\qquad \rho^2=\frac{a^2}{\cos^2(\theta+\omega_1)}=a^2[1+\operatorname{tg}^2(\theta+\omega_1)]=a^2(1+t^2)$$

et

$$\frac{d\Lambda}{dt}=\frac{1}{2}\cdot a^2(1+t^2)\cdot\frac{2}{1+t^2}=a^2.$$

Puisque le mouvement du point M a lieu autour du point O suivant la loi des aires, son accélération est centrale et portée par le rayon vecteur OM. Pour calculer cette accélération en fonction du rayon vecteur ρ, il est commode d'utiliser la formule de Binet. La constante des aires est $2a^2$ et l'accélération γ est donnée par

$$\gamma=-\frac{4a^4}{\rho^2}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\omega^2}\right);$$

or,

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\cos\left(\theta+\frac{\omega}{2}\right)}{a},\qquad \frac{d\frac{1}{\rho}}{d\omega}=-\frac{1}{2a}\sin\left(\theta+\frac{\omega}{2}\right),\qquad \frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\omega^2}=-\frac{1}{4a}\cos\left(\theta+\frac{\omega}{2}\right)=-\frac{1}{4a}\times\frac{a}{\rho}=-\frac{1}{4\rho},$$

d'où

$$\gamma=-\frac{4a^4}{\rho^2}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{4\rho}\right)=-\frac{3a^4}{\rho^3}.$$

On peut aussi calculer γ à l'aide de son expression en coordonnées polaires :

$$\gamma = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2, \qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{1+t^2}, \qquad \rho^2 = a^2(1+t^2), \qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{2a^2}{\rho^2},$$

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{a(1+t^2) - at^2}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} = \frac{a\left(\frac{\rho^2}{a^2}\right) - a\left(\frac{\rho^2}{a^2} - 1\right)}{\frac{\rho^2}{a^2}\cdot\frac{\rho}{a}} = \frac{a^4}{\rho^3},$$

$$\gamma = \frac{a^4}{\rho^3} - \rho\left(\frac{2a^2}{\rho^2}\right)^2 = -\frac{3a^4}{\rho^3}.$$

H.-L. MENNESSIER, à Évreux.

Autres solutions : MM. L. Chiganne, 155e R. A. P. E. M., Strasbourg; G. Lach, instituteur à Douai; M. Roux, instituteur au Creusot. Tofin, à Grandvilliers.

2334. — *On propose de déterminer, d'une manière grossièrement approchée, l'intensité g du champ de la pesanteur terrestre en utilisant les oscillations d'un pendule simple; celui-ci est constitué par une sphère très dense, de diamètre 16^{mm}, attachée à la partie inférieure d'un fil inextensible de masse négligeable; la longueur de ce fil, mesurée de l'axe d'oscillation jusqu'à la surface de la sphère, est de 81^{cm}. La durée d'une oscillation complète de ce pendule est trouvée égale à $1^{sec}.82$, l'amplitude des oscillations étant très petite.*

1° *Quelle valeur déduirait-on de cette mesure pour l'intensité g du champ?*

2° *Quelle est la valeur maximum de l'erreur absolue possible sur ce résultat, si la longueur du fil de suspension a été déterminée avec une erreur possible de 1^{mm} et si la durée d'oscillation, donnée plus haut, résulte de la mesure de la durée totale de 70 oscillations complètes, à l'aide d'un compteur à pointage, dont l'usage comporte une erreur absolue possible de $\frac{1}{3}$ de seconde en plus ou en moins à chaque pointage?*

On ne tiendra pas compte de la résistance de l'air. On prendra $\pi = 3.14$.

3° *Dans les calculs précédents, on prendra comme longueur du pendule simple la distance de l'axe d'oscillation au centre de la sphère; montrer que l'erreur absolue que l'on commet ainsi sur la longueur du pendule est négligeable vis-à-vis de celle indiquée ci-dessus comme admise.*

1° Appliquons la formule du pendule $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ en y faisant

$$T = 1{,}82, \qquad \pi = 3{,}14, \qquad l = 81 + 0{,}8 = 81{,}8.$$

On trouve

$$g = 974{,}0.$$

2° Supposons les erreurs assez petites pour qu'on puisse leur appliquer le calcul différentiel. A cet effet, résolvons d'abord l'équation par rapport à g :

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

Prenons ensuite successivement le logarithme népérien et la différentielle; il vient,

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} - 2\frac{\Delta T}{T}.$$

Faisons $g = 974$, $l = 81{,}8$ $\Delta l = 0{,}1$, $T = 1{,}82$. Pour avoir ΔT, il faut diviser par 70, nombre des oscillations observées, l'erreur qui peut résulter des deux pointages, soit $\frac{2}{3}$ de seconde, ce qui fait

$\Delta T = \frac{1}{105}$. En faisant la somme des valeurs absolues des deux termes de Δg, on aura l'erreur maximum possible. On trouve ainsi

$$\Delta g = \frac{974}{818} + 2 \times \frac{974}{191,1} = 1,2 + 10,2 = 11,4,$$

valeur remarquable par son importance.

3° Si l'on tient compte du moment d'inertie de la sphère, l'expression de la longueur du pendule devient $l + \frac{2}{5}\frac{r^2}{l}$, r étant le rayon de la sphère. Le second terme est égale à $\frac{2}{5} \times \frac{0,64}{81,8} = 0,003$, ce qui est négligeable, puisqu'on peut commettre sur l une erreur égale à 0,1.

CH. PACÉ, à bord de la *Ville d'Ys*.

Assez bonne solution de M. TOPIN, à Grandvilliers.

2335. — *Un mélange gazeux, à la pression d'une atmosphère, est formé, pour le quart de son volume d'azote, et pour le reste d'hydrogène. Il a pour volume* $V = 7 \times 22^l,4$. *La température est 0°: elle conservera toujours cette même valeur dans la suite.*

1° *On combine les* $\frac{6}{7}$ *de ce mélange en formant du gaz ammoniac. Le volume ayant gardé la valeur* V, *quelle est la pression du mélange d'azote, hydrogène, ammoniac ainsi obtenu?*

2° *On introduit* $143^g,5$ *de chlorure d'argent dans le mélange gazeux. Quelle sera la pression d'équilibre, le volume n'ayant pas changé?*

3° *On diminue le volume depuis* V *jusqu'à* $\frac{V}{7}$. *Quelle sera la nouvelle valeur de la pression d'équilibre?*

4° *On construira le graphique :* $x = v$, $y = pv$, *v étant le volume variable et p la pression variable pendant la transformation décrite dans la troisième partie.*

Données : AgCl *et* AzH^3 *se combinent pour former* $2AgCl, 3AzH^3$ *puis* $AgCl, 3AzH^3$. *Ces corps se dissocient suivant la formule*

$$2AgCl, 3AzH^3 \rightleftarrows 2AgCl + 3AzH^3.$$

Pression de dissociation à $0° = \frac{1}{10}$ *atmosphère.*

$$2[AgCl, 3AzH^3] \rightleftarrows 2AgCl, 3AzH^3 + 3AzH^3.$$

Pression de dissociation à $0° = \frac{4}{10}$ *atmosphère.*

La pression de dissociation n'est pas modifiée par la présence d'un gaz inerte, c'est-à-dire que la pression du gaz inerte s'ajoute à la pression de dissociation.

1° L'équation de la combinaison de l'azote et de l'hydrogène,

$$Az^2 + 3H^2 = 2AzH^3,$$

montre qu'une molécule d'azote et 3 molécules d'hydrogène donnent 2 molécules de gaz ammoniac. Pour les gaz qui ont réagi, la pression, à volume constant, est donc réduite de moitié. Par conséquent, les $\frac{6}{7}$ du mélange donnent du gaz ammoniac à $\frac{3}{7}$ d'atmosphère, et il reste du gaz non combiné à $\frac{1}{7}$ d'atmosphère. La pression totale est donc devenue

$$\frac{3}{7} + \frac{1}{7} = \frac{4}{7} \text{ d'atmosphère.}$$

D'ailleurs, le volume moléculaire étant précisément 22,4, il résulte de l'énoncé que la quantité de gaz ammoniac, formée aux dépens de 6 volumes moléculaires, représente exactement 3 molécules.

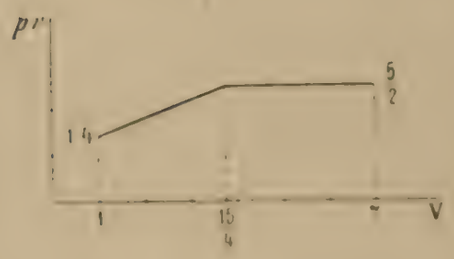
2° Le poids donné de chlorure d'argent représente une molécule, qui se trouve ainsi en présence de 3 molécules de gaz ammoniac. La pression $\frac{3}{7}$ d'atmosphère étant supérieure à $\frac{1}{10}$, pression de dissociation du premier chlorure ammoniacal, celui-ci va prendre naissance, ce qui diminuera de moitié la pression du gaz ammoniac et la réduira à $\frac{3}{14}$, nombre encore supérieur à $\frac{1}{10}$, mais inférieur à $\frac{4}{10}$. Donc la réaction n'ira pas plus loin et la nouvelle pression d'équilibre sera

$$\frac{3}{14} + \frac{1}{7} = \frac{5}{14}.$$

3° Si on réduit le volume à $\frac{V}{7}$, la pression du gaz non combiné devient 1, et celle du gaz ammoniac deviendrait $\frac{3}{2}$ s'il n'était pas absorbé. Cette valeur étant supérieure à $\frac{4}{10}$, le second chlorure ammoniacal prend donc naissance et, comme le gaz ammoniac et le chlorure d'argent sont précisément en quantités équivalentes, la pression du gaz ammoniac se réduit à $\frac{4}{10}$. La nouvelle pression totale sera donc

1,4.

4° Quand on commence l'opération 3, on comprime le mélange gazeux sans produire de réaction chimique jusqu'à ce que la pression du gaz ammoniac devienne $\frac{4}{10}$. Le produit pv reste donc constant durant cette période, et égal à $\frac{5}{14}$V ou, en prenant pour unité le volume moléculaire, $\frac{5}{2}$.



Quand la pression du gaz ammoniac est devenue $\frac{4}{10}$, elle a augmenté dans le rapport de $\frac{4}{10}$ à $\frac{3}{14}$, soit $\frac{28}{15}$. Le volume est donc devenu $\frac{15}{28}$V ou $\frac{15}{4}$ de volume moléculaire.

A partir de ce moment-là, la pression p_1 du mélange d'azote et d'hydrogène continue d'obéir à la loi de Mariotte, tandis que la pression p_2 du gaz ammoniac reste constante. Le produit $(p_1 + p_2)v$ se compose alors d'un terme constant et d'un terme proportionnel à v. Le point figuratif décrit une droite dont l'ordonnée est $\frac{5}{2}$ pour l'abscisse $\frac{15}{4}$, et 1,4 pour l'abscisse 1. On a ainsi la représentation figurée ci-dessus.

YVES BOUTHILLIER, école centrale.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1920)

ÉCOLE CENTRALE

Arithmétique, algèbre et trigonométrie (MM. DURAND et GERARD).

Arithmétique.

10437. — Théorie de la division. Division de 34622 par 482; pourquoi 7 est-il le chiffre des dizaines du quotient?

— 438. — Caractères de divisibilité par 125; caractère de divisibilité par 9 et par 11; par 7 et par 13.

— 439. — Plus grand commun diviseur de deux nombres; propriétés.

10440. — Quand un nombre divise un produit de deux facteurs, s'il est premier avec l'un d'eux, il divise l'autre.

— **441.** — Plus petit multiple commun de deux nombres. A quoi reconnaît-on qu'un nombre est le plus grand commun diviseur de deux nombres A et B? Plus petit multiple commun des deux nombres 60 et 84.

— **442.** — La suite des nombres premiers est illimitée.

— **443.** — Décomposer 1 001 en un produit de facteurs premiers.

— **444.** — Plus petit multiple commun de plusieurs nombres décomposés en leurs facteurs premiers. Démontrer que les quotients du p. p. m. c. par les nombres donnés sont premiers entre eux. Réciproquement.

— **445.** — Un nombre étant décomposé en ses facteurs premiers, $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\delta$, trouver le plus petit nombre, N', tel que le produit NN' soit carré parfait.

— **446.** — Si $N = 2k + 1$, démontrer que $N^3 + 1$ ne peut être égal à un carré parfait.

— **447.** — On considère deux nombres entiers A et B $(A > B)$. Démontrer que les restes de la division par B des nombres de la suite

$$A^1, \quad A^2, \quad A^3, \quad \ldots, \quad A^n, \quad \ldots,$$

se reproduisent périodiquement dans le même ordre. Dans le cas particulier où A et B sont premiers entre eux, B divise $A^{B-1} - 1$.

— **448.** — Théorèmes sur les fractions. — Quand dit-on qu'une fraction est réduite à sa plus simple expression?

— **449.** — Qu'appelle-t-on quotient à une unité près, à $\frac{1}{n}$ près? Appliquer à la fraction $\frac{41}{13}$.

— **450.** — Racine carrée de 3 221; de 4 256; de 5 322; faire la théorie sur l'exemple indiqué.

— **451.** — Calculer la racine carrée de 3 150 au moyen de la règle à calcul, puis faire la théorie de la racine carrée sur cet exemple.

— **452.** — Calculer la racine carrée à $\frac{1}{100}$ près de $\pi = 3{,}1415926\ldots$

— **453.** — Extraire la racine carrée de la fraction $\frac{34}{7}$ à $\frac{1}{100}$ près.

— **454.** — Racine carrée de 23,271 à $\frac{1}{1000}$ près.

— **455.** — Erreur absolue; définition. On a mesuré le rayon d'un cercle de manière que l'erreur soit moindre que $\frac{1}{2}$ millimètre, et on a trouvé $R = 13^{mm}$; on demande la surface du cercle. Quelle valeur prendra-t-on pour π?

— **456.** — On calcule le quotient $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ en prenant $\pi = 3{,}14$ et $\sqrt{2} = 1{,}42$. Limite de l'erreur commise.

Algèbre.

— **457.** — Mettre sous forme de produit de facteurs l'expression

$$(a + b + c)^4 - (b + c)^4 - (c + a)^4 - (a + b)^4 + a^4 + b^4 + c^4.$$

— **458.** — Formule des combinaisons. Démontrer que $C_m^p = C_{m-1}^{p-1} + C_{m-1}^p$.

— **459.** — Développer $(a + b)^3$; $(a + x)^m$.

— **460.** — Quel est, dans le développement de $(a + b)$, le terme le plus grand?

— **461.** — On donne n droites dans un plan; en combien de régions ce plan est-il divisé?

— **462.** — Somme des cubes des n premiers nombres entiers. Démontrer au moyen de la table de Pythagore que $S_3 = (S_1)^2$.

— **463.** — Déterminer un polynome entier en x, du quatrième degré, tel que $f(x+1) - f(x) \equiv x^3$ et se servir de cette identité pour le calcul de la somme des cubes des n premiers nombres entiers.

— **464.** — Calculer les déterminants.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a^3 & a & 1 \\ b^3 & b & 1 \\ c^3 & & \end{vmatrix}.$$

— **465.** — Étudier le système

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad a'x + b'y + c'z + d' = 0, \qquad a''x + b''y + c''z + d'' = 0.$$

— **466.** — Système de quatre équations linéaires à trois inconnues. Démonstration dans le cas où l'on a un déterminant principal du second degré seulement $(ab' - ba' \neq 0)$.

— **467.** — Étudier le système $x - 2y + z = 0$, $3x + y - 2z = 0$.

— **468.** — Somme des termes d'une progression géométrique; limite de cette somme pour n infini lorsque $q < 1$.

— **469.** — Étudier la série dont le terme général est $u_n = nx^n$.

— **470.** — Étudier les séries

$$u_n = \frac{1}{n^2}, \qquad u_n = \frac{1}{n(n+1)}, \qquad u_n = \frac{\sqrt{n-1}}{n^2+1}, \qquad u_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^4+1}}.$$

10471. — Etudier les séries

$$u_n = \frac{1}{n \log_2 n}, \qquad u_n = \frac{\mathrm{L}n}{\sqrt{n^2+1}}, \qquad u_n = \frac{\mathrm{L}n}{\sqrt{n^2-1}}, \qquad u_n = \frac{1}{n\mathrm{L}n}, \qquad u_n = \frac{1}{\mathrm{L}\,\mathrm{ch}\,n}, \qquad u_n = \mathrm{L}\,\mathrm{sh}\,n,$$

$$u_n = \mathrm{L}\,\mathrm{th}\,n, \qquad u_n = \frac{1}{n^2}\left[(n+1)\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{n}\right)+(n-1)\mathrm{L}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right], \qquad u_n = \frac{1}{n}\cos\frac{\pi}{n},$$

$$u_n = \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}, \qquad u_n = \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3}.$$

— **472.** — Etudier les séries

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e, \qquad u_n = \sqrt[n]{1+a} - \left(1+\frac{b}{n}\right), \qquad u_n = \sqrt[n]{n} - 1, \qquad u_n = \mathrm{arc\,tg}(n+1) - \mathrm{arc\,tg}\,n,$$

$$u_n = \mathrm{arc\,tg}\,n - \mathrm{arc\,tg}\sqrt{n}.$$

— **473.** — Limite de $\sqrt[n]{n}$ quand n augmente indéfiniment. Montrer que dans les mêmes conditions l'expression $n\,\dfrac{\sqrt[n]{n}-1}{\mathrm{L}n}$ tend vers 1; appliquer à l'étude de la série $u_n = \dfrac{\sqrt[n]{n}-1}{\mathrm{L}n}$.

— **474.** — Etudier les séries

$$u_n = \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}, \qquad u_n = \frac{n x^n}{1+2^n}, \qquad u_n = \frac{x^n}{n(1+2^n)}, \qquad u_n = \frac{n x^n}{1+2^n}, \qquad u_n = \frac{x^n+2^n}{\mathrm{ch}\,n}, \qquad u_n = \frac{1}{x^n+\dfrac{1}{x^n}},$$

$$u_n = \frac{x^n}{\mathrm{L}(n+1)}, \qquad u_n = x^n\frac{\mathrm{L}n}{n}.$$

— **475.** — Somme des carrés des n premiers nombres entiers; étudier la série $u_n = \dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n!}$. Calculer la somme. Même question avec la série $u_n = \dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n!}\,x^n$.

— **476.** — Séries alternées: étudier les séries

$$u_n = (-1)^n\frac{\mathrm{L}n}{n}, \qquad u_n = (-1)^n\mathrm{L}n\left(\sqrt[n]{n}-1\right).$$

— **477.** — Soit a un nombre positif, plus grand que 1 et n un entier qui augmente indéfiniment; limite de $\sqrt[n]{a}$.

— **478.** — Limite de $\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m$ quand m augmente indéfiniment. Étudier la série

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots.$$

Démontrer que $e < 3$.

— **479.** — Définition des logarithmes népériens. Continuité: démontrer que $\mathrm{L}x$ tend vers 0 quand x tend vers 1. Module de passage.

— **480.** — Démontrer que l'équation $y = \mathrm{sh}\,x$ définit une fonction inverse ($x = \mathrm{arg\,sh}\,y$).

— **481.** — Dérivée de $y = x^m$ pour m entier et positif, puis pour m fractionnaire.

— **482.** — Dérivées de $y = a^x$, $y = e^{\mathrm{arc\,tg}\,x}$, $y = \mathrm{L}x$, $y = e^{bx}$.

— **483.** — Dérivée de $y = \mathrm{arc\,tg}(\sqrt{1+x^2}-x)$; expliquer le résultat en posant $x = \mathrm{arc\,tg}\,v$.

— **484.** — Dérivée de $y = e^{x-\frac{1}{x}}$; limite de la dérivée quand x tend vers 0.

— **485.** — Dérivées successives de $y = e^x(x^2+x)$. Loi de formation.

— **486.** — Formule des accroissements finis; appliquer à l'expression $e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}$.

— **487.** — Appliquer le théorème des accroissements finis à l'expression $\mathrm{L}(n+1) - \mathrm{L}n$; en déduire que la série $u_n = \dfrac{1}{n}$ est divergente.

— **488.** — Formule de Taylor pour une fonction d'une seule variable; appliquer cette formule à l'expression $\sqrt{x+h}$, en la limitant au troisième terme.

— **489.** — Appliquer la formule de Taylor à la recherche de la limite de l'expression $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ pour $x = a$, sachant que $f(a) = 0$, $g(a) = 0$.

— **490.** — **Formule des accroissements finis pour une fonction de deux variables.**

— **491.** — **Formule de Taylor pour une fonction de deux variables.**

— **492.** — Dérivée d'une fonction composée, dérivée seconde.

— **493.** — Dérivée de $y = x^x$.

— **494.** — Dérivée de $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$; limite de y' pour $x = 0$.

— **495.** — Fonction implicite; dérivées première et seconde.

— **496.** — On considère la courbe $y = e^x$, on la coupe par une parallèle à la tangente au point $x = 0$, $y = 1$; soient x_1 et x_2 les abscisses des deux points de rencontre; calculer x_2'.

10497. — On donne deux variables x et y reliées par la relation $\arcsin x = \arcsin my$. Montrer que les deux arcs sinus partent en même temps de 0 et arrivent en même temps à $\frac{\pi}{2}$; calculer la dérivée de y par rapport à x.

— **498.** — Différentielle totale d'une fonction $z = f(xy)$ des deux variables indépendantes x et y. Appliquer à $z = f(u, v)$ en supposant u et v des fonctions données de x et y.

— **499.** — Étudier les variations des fonctions :

$$y = \frac{x^2}{x^3+1}, \quad y = x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x}, \quad y = \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x}, \quad y = \cos 3x . \cos 2x, \quad y = \sin 3x . \operatorname{tg} x,$$

$$y = \frac{e^x - 1}{x}, \quad y = x . e^{\frac{1}{x}}, \quad y = \frac{\operatorname{lg} x}{\sqrt{x}}, \quad y = \mathrm{L}\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}, \quad y = x . \mathrm{L}(x+1) - (x+1)\mathrm{L}\, x,$$

$$y = x - \mathrm{L}\operatorname{ch} x, \quad y = x^{1-x}, \quad y = (1+x)^{\frac{1}{x}}, \quad y = (1+x)^{\frac{1}{x-1}}, \quad y = \sqrt[5]{x^5+1} - \sqrt[5]{x^5-1} \text{ (asymptotes).}$$

— **500.** — Trouver les maxima et minima de la fonction $y = \frac{\operatorname{tg}(x+a)}{\operatorname{tg}(x-a)}$.

— **501.** — Variations de la fonction y de x définie par l'équation $\operatorname{sh} x = \cos y$.

— **502.** — Soit la parabole $y^2 = 2px$, et AB un segment pris sur l'axe Ox; trouver le point de la parabole d'où l'on voit AB sous un angle maximum.

— **503.** — Développement de $\operatorname{arc\,tg} x$ en série entière; application au calcul de π. Comment peut-on obtenir des séries rapidement convergentes pour ce calcul?

— **504.** — Développer en série $\mathrm{L}(1-x)$. Démontrer que, p et q étant deux nombres positifs plus petits que 1, on a $\frac{p(1-q)}{q} < \frac{\mathrm{L}(1-p)}{\mathrm{L}(1-q)} < \frac{p}{q(1-p)}$.

— **505.** — Calculer L2.

— **506.** — Développement en série de $\mathrm{L}\frac{1+x}{1-x}$; en déduire L3. Supposant qu'on ne prenne que les deux premiers termes de la série, trouver une limite supérieure du reste.

— **507.** — Développer en série entière $y = \mathrm{L}(x^3 - 3x + 2)$.

— **508.** — On donne la série entière

$$f(x) = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{p!}x^p + \ldots;$$

énoncer les théorèmes sur les séries entières et les démontrer sur l'exemple; trouver le rayon de convergence.

— **509.** — Développement de $(1+x)^m$; l'appliquer au calcul de $\sqrt{24}$; limite de l'erreur commise quand on s'arrête au second terme.

— **510.** — Développement en série de $\arcsin x$.

— **511.** — Développement en série de $\cos x$, de $\sin x$, de $e^x \sin x$.

— **512.** — Développement en série de $y = \frac{2x - 2\cos\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$.

— **513.** — Calculer $e^{\frac{1}{2}}$ à $\frac{1}{100}$ près.

— **514.** — Calculer $\sin 10'$ au moyen de la série $\sin x$, en ne prenant que trois termes. Erreur commise.

— **515.** — Calculer avec cinq chiffres exacts la somme de la série

$$1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \ldots,$$

pour $x = \frac{1}{2}$.

— **516.** — Infiniment petits. On prend sur une courbe C deux points infiniment voisins M et M'; on mène en M la tangente à la courbe et en M' la parallèle à l'axe Oy. Soit K le point de rencontre de ces deux droites; trouver l'ordre infinitésimal de KM' par rapport à Δx.

— **517.** — Partie principale de l'infiniment petit $2\mathrm{L}\cos x + x\sin x$ (x désignant l'infiniment petit principal).

— **518.** — Même question pour $\frac{1}{2}(1+mx)^{\frac{1}{x}}e^p - \frac{1}{2}(1+px)^{\frac{1}{x}}e^m$, m et p désignant deux nombres entiers positifs.

— **519.** — Déterminer α et β de façon que l'infiniment petit $e^{2x} - \frac{1+\alpha x}{1+\beta x}$ soit de l'ordre le plus élevé possible.

— **520.** — Limite de $\frac{\sqrt{x^2+5} - \sqrt[3]{3x^3+3}}{x^2 - 5x + 6}$ pour $x = 2$.

— **521.** — Limite de $\frac{e^x - e^{\sin x}}{x(1-\cos x)}$ pour $x = 0$.

— **522.** — Limite de $\frac{e^{-\operatorname{tg} x}}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^n}$ quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$.

10523. — Limite, pour x infini, de $\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x+2}{x+3}$.

— **524.** — Limite, pour x infini, de $x\left(\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x^2+1}\right)$.

— **525.** — Que devient l'expression $\sqrt[3]{x^3+1}-\dfrac{x^2-3}{x}$ pour x infini? On multiplie cette expression par x^α; quelle valeur faut-il donner à α pour que le produit obtenu ait une limite finie non nulle.

— **526.** — Limite de $\sqrt[n]{n}-1$ quand n augmente indéfiniment.

— **527.** — Montrer que $\dfrac{\mathrm{L}n}{n}$ tend vers 0 quand n augmente indéfiniment.

— **528.** — Limite de $\dfrac{e^x}{x}$ pour x infini; limite de $\sqrt{x}.\mathrm{L}x$, de $x^{\frac{1}{3}}\mathrm{L}x$, de $x^2\mathrm{L}x$ quand x tend vers 0.

— **529.** — Limite pour $x=0$ de

$(\sin x)^{\frac{1}{\mathrm{L}x}}$, $\mathrm{L}x.\mathrm{L}\dfrac{\mathrm{sh}\,x}{x}$, $\mathrm{L}\sin x.\mathrm{L}\,\mathrm{ch}\,x$, $(\cos x+\mathrm{sh}\,x)^{\frac{1}{x}}$, $(\cos x)^{\frac{2}{x^2}}$, $\dfrac{1}{\sin x}.\mathrm{L}\dfrac{e^x-1}{\mathrm{tg}\,x}$, $\dfrac{\mathrm{L}\,\mathrm{ch}\,x}{x^2}$.

— **530.** — Limite, pour m infini, de $m\left[\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m-e\right]$.

— **531.** — Définir et effectuer le produit de deux nombres complexes. Représentation géométrique.

— **532.** — Représenter géométriquement le nombre $z=\dfrac{1}{a+bi}$.

— **533.** — Formule de Moivre; sa signification géométrique.

— **534.** — Dérivée n^e de la fonction $y=\dfrac{2x}{x^2-1}$; même question pour la fonction $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$; décomposer en éléments simples à coefficients complexes, et ramener le résultat à la forme réelle en posant $x=\mathrm{cotg}\,z$.

— **535.** — Racines quatrièmes de $1+i$, de $i+2$.

— **536.** — Définition de e^z pour z complexe. Application au calcul d'une somme de cosinus ou de sinus d'arcs en progression arithmétique.

— **537.** — Calculer la somme $S=\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin mx$.

— **538.** — Calculer la somme $S=1+\cos^2 a+\cos^2 2a+\ldots+\cos^2(n-1)a$.

— **539.** — Calculer z sachant que $e^z=i\sqrt{3}-1$.

— **540.** — Calculer z sachant que $e^z=-e^x$.

— **541.** — Résoudre l'équation $e^z=1+e^{-x}$, x étant donné.

— **542.** — Résoudre les équations $\mathrm{ch}\,z=0$, $\mathrm{cth}\,z=1+2i$.

(A suivre.)

QUESTIONS PROPOSÉES

2498. — Soient A, B, C, les pieds des normales à une parabole issues d'un point P; A_1, B_1, C_1 les sommets du triangle formé par les tangentes à la parabole aux points A, B, C.

1° Montrer que les droites AA_1, BB_1, CC_1 concourent en un point Q.

2° Que, si le point P se déplace sur la parabole donnée, le lieu de Q est une quartique.

3° Que, si le point P se déplace sur une parabole dont l'axe est perpendiculaire à celui de la parabole donnée, le lieu du point Q est une hyperbole.

E.-N. BARISIEN.

2499. — Trouver le lieu du point de rencontre de la tangente à l'extrémité d'une corde focale d'une ellipse avec la normale à l'autre extrémité.

G. LACH, à Douai.

2500. — Un point M se meut sur une ellipse de façon que la vitesse en chaque point de l'ellipse soit proportionnelle au rayon de courbure en ce point.

Trouver la loi du mouvement de ce point.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

Coulommiers. — Imprimerie PAUL BRODARD.

31e Année. Avril 1921. N° 7.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LES HÉLICES CYLINDRIQUES

par M. **Anzemberger**, professeur au lycée de Besançon (*Fin*).

Rayon de courbure. — Le premier groupe des formules de Frenet donne

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{R},$$

ou, d'après (5), (6), (8),

$$-\frac{g'}{(1+k^2)\rho} = -\frac{g'}{R},$$

et

$$R = (1+k^2)\rho. \tag{9}$$

Le rayon de courbure de l'hélice est proportionnel à celui de la base. La réciproque n'est pas vraie, car, en définissant toujours la courbe de même, le rayon de courbure est donné par la formule

$$R^2 = \frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^3}{\Sigma(y'z''-z'y'')^2} = \frac{(1+\lambda'^2)^3}{\lambda''^2+\dfrac{1+\lambda'^2}{\rho^2}} = \frac{\rho^2(1+\lambda'^2)^3}{\lambda''^2\rho^2+1+\lambda'^2};$$

pour que $\frac{R^2}{\rho^2}$ soit constant, il faut et il suffit que

$$1+\lambda'^2+\lambda''^2\rho^2 = h^2(1+\lambda'^2)^3,$$

h étant constant, équation différentielle en λ qui admet bien l'intégrale particulière $\lambda' = \text{const.}$, mais qui en admet d'autres.

Remarque. — Les formules (5) et (9) montrent que l'hélice (C) et sa base (Γ) se correspondent point par point de façon que les arcs et les rayons de courbure correspondants soient proportionnels. Si l'hélice (C) est telle que

$$f(R, s) = 0,$$

la base (Γ) est telle que

$$f\left((1+k^2)\rho, \sqrt{1+k^2}\,\sigma\right) = 0;$$

par suite, déterminer une hélice par une relation entre R et s revient à déterminer sa base par son équation intrinsèque, et inversement, connaissant l'équation intrinsèque de la base, on en déduit une relation entre R et s pour l'hélice.

Exemples : 1° *La base est une spirale logarithmique :* $\rho = a\sigma$, $R = bs$;

2° *La base est une développante du cercle :* $\rho^2 = a\sigma$, $R^2 = bs$;

3° *La base est une chaînette :* $\rho = a + \dfrac{\sigma^2}{a}$, $R = b + \dfrac{s^2}{a}$;

4° *La base est une cycloïde :* $\rho^2 + s^2 = a^2$, $R^2 + b^2s^2 = c^2$.

Centre de courbure. — Le centre de courbure en M est le point M_1 situé sur la normale principale en M et tel que $\overline{MM_1} = R$. Ses coordonnées sont

$$x_1 = x + \alpha R = f - (1 + k^2)\rho g', \qquad y_1 = y + \beta R = g + (1 + k^2)\rho f', \qquad z_1 = z - \gamma R = k\sigma. \quad (10)$$

et le lieu de ce centre de courbure est défini par les équations (10).

Cherchons à quelles conditions ce lieu est aussi une hélice; la base d'une telle hélice est dans le plan xOy, comme celle de l'hélice donnée; alors il faut et il suffit que l'arc de la courbe soit proportionnel à l'arc de la base, donc que, h étant une constante,

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = h^2(dx_1^2 + dy_1^2).$$

Or, d'après (2),

$$dx_1 = \left[f' - (1 + k^2)\rho g'' - (1 + k^2)g\frac{d\rho}{d\sigma}\right]d\sigma = -\left[k^2 f' + (1 + k^2)g\frac{d\rho}{d\sigma}\right]d\sigma,$$

$$dy_1 = \left[g' + (1 + k^2)\rho f'' + (1 + k^2)f\frac{d\rho}{d\sigma}\right]d\sigma = -\left[k^2 g - (1 + k^2)f\frac{d\rho}{d\sigma}\right]d\sigma,$$

$$dz_1 = k\,d\sigma,$$

et la condition devient, d'après (1),

$$k^2 + k^4 + (1 + k^2)^2\left(\frac{d\rho}{d\sigma}\right)^2 = h^2\left[k^2 + (1 + k^2)^2\left(\frac{d\rho}{d\sigma}\right)^2\right],$$

d'où, l étant une constante,

$$\frac{d\rho}{d\sigma} = l.$$

Si $l = 0$, $\rho = l\sigma$ en choisissant convenablement l'origine des arcs, la base est une spirale logarithmique; l'hélice est une *hélice cylindroconique*, trajectoire sous un angle constant des génératrices d'un cône de révolution (voir par exemple exercices de Tisserand). Si $l = 0$, ρ est constant, la base est un cercle, l'hélice est une *hélice circulaire*. Examinons successivement les deux cas.

1° *Hélice cylindroconique.* — Cherchons la base de l'hélice lieu des centres de courbure; soient σ_1, ρ_1 l'arc et le rayon de courbure de cette base,

$$d\sigma_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2 = [k^2 + (1 + k^2)^2 l^2]\,d\sigma^2;$$

σ_1 est proportionnel à σ,

$$\sigma_1 = \sigma\sqrt{k^2 + (1 + k^2)^2 l^2}.$$

Le rayon de courbure ρ_1 est défini par l'une des formules de Frenet

$$\frac{d\alpha_1}{d\sigma_1} = \frac{\alpha_1'}{\rho_1} = \frac{-\beta_1}{\rho_1}.$$

Or,

$$\alpha_1 = \frac{dx_1}{d\sigma_1} = -\frac{k^2 f' + (1 + k^2)lg'}{\sqrt{k^2 + (1 + k^2)^2 l^2}}, \qquad \beta_1 = \frac{dy_1}{d\sigma_1} = -\frac{k^2 g' - (1 + k^2)lf'}{\sqrt{k^2 + (1 + k^2)^2 l^2}},$$

et, d'après (2),

$$\frac{d\alpha_1}{d\sigma_1} = -\frac{k^2 f'' + (1 + k^2)lg''}{k^2 + (1 + k^2)^2 l^2} = -\frac{-k^2 g' + (1 + k^2)lf'}{\rho[k^2 + (1 + k^2)^2 l^2]},$$

d'où

$$\frac{k^2 g' - (1 + k^2)lf'}{\rho[k^2 + (1 + k^2)^2 l^2]} = \frac{1}{\rho_1}\cdot\frac{k^2 g' - (1 + k^2)lf'}{\sqrt{k^2 + (1 + k^2)^2 l^2}}$$

et

$$\rho_1 = \rho\sqrt{k^2 + (1 + k^2)^2 l^2},$$

d'où

$$\frac{\rho_1}{\sigma_1} = \frac{\rho}{\sigma} = l;$$

la base est une spirale logarithmique égale à celle de base de l'hélice donnée. De plus, si on considère

les tangentes aux points correspondants M, M_1 des deux hélices, on vérifie immédiatement, d'après 1°, que

$$dxdx_1 + dydy_1 + dzdz_1 = 0;$$

donc, *le lieu des centres de courbure d'une hélice cylindroconique est une hélice cylindroconique de base égale, et les tangentes aux deux hélices en deux points correspondants sont perpendiculaires.*

2° *Hélice circulaire.* — $\rho = a$; les expressions des coordonnées d'un point de l'hélice deviennent

$$x = a\cos\frac{\sigma}{a}, \qquad y = a\sin\frac{\sigma}{a}, \qquad z = k\sigma,$$

d'où, pour le centre de courbure,

$$x_1 = -ak^2\cos\frac{\sigma}{a}, \qquad y_1 = -ak^2\sin\frac{\sigma}{a}, \qquad z_1 = k\sigma;$$

le lieu du point x_1, y_1, z_1 est une hélice circulaire tracée sur un cylindre de même axe que celui de l'hélice donnée, et de rayon ak^2. On vérifie immédiatement que

$$dxdx_1 + dydy_1 + dzdz_1 = 0.$$

donc *le lieu des centres de courbure d'une hélice circulaire est une hélice circulaire de même axe, et les tangentes aux deux hélices en deux points correspondants sont perpendiculaires.*

En particulier, si $k = 1$, les hélices sont tracées sur le même cylindre, elles sont symétriques par rapport à l'axe.

Rayon de torsion. — Le rayon de torsion T est défini par le second groupe de formules de Frenet.

$$\frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha'}{T},$$

d'où, d'après (5), (7), (8) et (2),

$$\frac{kg'}{(1+k^2)\rho} = -\frac{g'}{T},$$

d'où

$$T = -\frac{(1+k^2)\rho}{k} = -\frac{R}{k}; \tag{11}$$

dans une hélice, le rayon de torsion et le rayon de courbure sont proportionnels. Réciproquement, soit

$$\frac{R}{T} = -k;$$

R et T sont définis respectivement par le premier et le second groupe des formules de Frenet :

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{R}, \qquad \frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha'}{T},$$

d'où

$$\frac{d\alpha''}{d\alpha} = \frac{R}{T} = -k,$$

d'où

$$d\alpha'' + kd\alpha = 0, \qquad d\beta'' + kd\beta = 0, \qquad d\gamma'' + kd\gamma = 0.$$

Intégrons, nous obtenons, a, b, c étant trois constantes,

$$\alpha'' + k\alpha = a, \qquad \beta'' + k\beta = b, \qquad \gamma'' + k\gamma = c.$$

Multiplions respectivement par α, β, γ et ajoutons, en remarquant que $\Sigma\alpha\alpha'' = 0$ et $\Sigma\alpha^2 = 1$,

$$k = a\alpha + b\beta + c\gamma,$$

ce qui s'écrit encore

$$\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{k}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}};$$

la tangente fait avec la direction fixe a, b, c un angle constant, donc la courbe est une hélice.

Il en résulte que *si dans une hélice, l'un des nombres* R, T *est constant, il en est de même de l'autre, ρ est aussi constant, et la courbe est une hélice circulaire. Réciproquement, si* R, T *sont constants, la courbe est*

une hélice circulaire, car $\frac{R}{T}$ étant constant, la courbe est une hélice, et R étant constant, c'est une hélice circulaire.

Sphère osculatrice. — Le carré du rayon de la sphère osculatrice est $R^2 + T^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2$. Or,

$$R = (1 + k^2)\rho, \qquad T = -\frac{1+k^2}{k}\rho, \qquad ds = \sqrt{1+k^2}\,d\sigma, \qquad \frac{dR}{ds} = \sqrt{1+k^2}\frac{d\rho}{d\sigma},$$

d'où $$R^2 + T^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 = (1+k^2)^2\rho^2 + \frac{(1+k^2)^2}{k^2}\rho^2\left(\frac{d\rho}{d\sigma}\right)^2 = (1+k^2)^2\rho^2\left[1 + \frac{1+k^2}{k^2}\left(\frac{d\rho}{d\sigma}\right)^2\right].$$

Pour que ce rayon soit égal au rayon de courbure, il faut et il suffit que $T\frac{dR}{ds} = 0$; T n'étant pas constamment nul, $\frac{dR}{ds} = 0$: l'hélice est circulaire.

Les coordonnées du centre de cette sphère s'obtiennent facilement, si on remarque que ce centre est le point de contact avec son enveloppe de la droite polaire, caractéristique du plan normal; il est donc défini par les trois équations

$$\begin{aligned} f'(x-f) + g'(y-g) + k(z - k\sigma) &= 0, \\ -g'(x-f) + f'(y-g) &= (1+k^2)\rho, \\ f'(x-f) + g'(y-g) &= -(1+k^2)\rho\frac{d\rho}{d\sigma}; \end{aligned}$$

en résolvant, on obtient les coordonnées du centre :

$$x - f = -(1+k^2)\rho\left(g' + f'\frac{d\rho}{d\sigma}\right), \qquad y - g = (1+k^2)\rho\left(f' - g'\frac{d\rho}{d\sigma}\right), \qquad z - k\sigma = \frac{1+k^2}{k}\rho\frac{d\rho}{d\sigma}.$$

Pour que ce centre coïncide avec le centre de courbure, il faut et suffit que $\frac{d\rho}{d\sigma} = 0$, donc que l'hélice soit circulaire.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

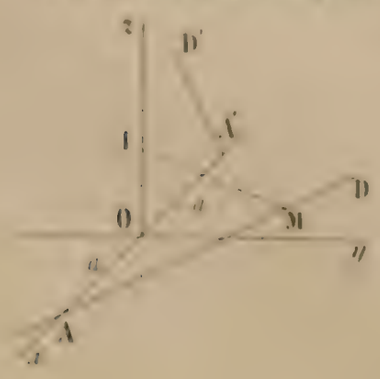
2336. — *Étant donné le trièdre trirectangle Oxyz auquel la droite D est rapportée par les équations $x - a = 0$, $z - y = 0$, on abaisse de chaque point M de cette droite, sur Oz, la perpendiculaire MI dont le pied est I; puis on considère le cercle C, de centre I et de rayon IM, dont le plan passe par Oz.*

1° ***Trouver l'équation de la surface Σ engendrée par le cercle C.***

2° *Étudier comment varie la section de cette surface par un plan parallèle à Oxy lorsque ce plan se déplace en conservant la même orientation.*

3° *Déterminer, sur la surface Σ, les systèmes de cercles autres que celui qui a servi à sa définition et faire voir comment on peut, pour chacun de ces systèmes, donner une construction géométrique des cercles qui le composent.* (*École polytechnique, concours de 1917.*)

1. Soit λ la cote du point M; les coordonnées de ce point sont a, λ, λ; celles du point I sont $0, 0, \lambda$.



Le cercle ayant pour centre le point I, pour rayon IM et situé dans le plan zIM est à l'intersection de la sphère de même centre et de même rayon avec le plan zIM; la sphère a pour équation

$$x^2 + y^2 + (z - \lambda)^2 = a^2 + \lambda^2,$$

et le plan, $$\frac{x}{a} = \frac{y}{\lambda}, \qquad \text{ou} \qquad \lambda x - ay = 0.$$

L'équation de la surface Σ s'obtient en remplaçant λ par $\frac{ay}{x}$ dans la première équation. Ce calcul donne

$$(\Sigma) \qquad x(x^2 + y^2 + z^2 - a^2) - 2ayz = 0.$$

Telle est la surface Σ; c'est une surface du troisième ordre.

Cette surface contient Oz, ce qui était évident *a priori*; de plus cet axe est un axe de symétrie; car si on change x en $-x$, y en $-y$, le premier membre ne fait que changer de signe.

Il est évident que rien ne distingue l'axe des y, $x=0$, $z=0$, de l'axe des z; cette droite est donc aussi sur la surface et est un axe de symétrie de cette surface.

Enfin, si on change y en $-y$, z en $-z$, l'équation ne change pas; l'axe des x est donc aussi un axe de symétrie.

Les directions asymptotiques de la surface sont les directions isotropes et celles du plan des yz, $x=0$. Tout plan parallèle au plan des yz coupe la surface suivant une droite à l'infini et une conique. Soit $x=\alpha$ un tel plan; la conique, projetée en vraie grandeur sur le plan des yz, a pour équation

$$\alpha(y^2+z^2)-2ayz+\alpha(\alpha^2-a^2)=0;$$

c'est une hyperbole, quand $\alpha^2-a^2<0$, c'est-à-dire quand α est compris entre $-a$ et $+a$; c'est une ellipse quand $\alpha^2-a^2>0$, c'est-à-dire quand α varie en dehors de cet intervalle, et cette ellipse est imaginaire, parce que le terme constant est de même signe que le coefficient des carrés. La surface est donc tout entière comprise entre les plans $x=a$, $x=-a$. Le plan $x=a$ coupe la surface suivant deux droites confondues avec la droite D; il est tangent à la surface tout le long de la droite D. Le plan $x=-a$ la coupe suivant deux droites confondues avec la droite D′, dont les équations sont $x=-a$, $y=-z$; il est tangent à la surface tout le long de la droite D′. Cette deuxième droite joue le même rôle que la droite D; il y a donc déjà un deuxième mode de génération tout pareil au premier, à l'aide de la droite D′ et de l'axe Oz.

2. Les sections faites par des plans parallèles au plan des xy sont des cubiques qui se projettent en vraie grandeur sur le plan des xy et dont l'équation générale est

$$x(x^2+y^2)+x(h^2-a^2)-2ahy=0,$$

en posant $z=h$. Chacune d'elles admet l'origine pour centre, passe en ce point et y admet pour tangente la droite

$$\frac{y}{x}=\frac{h^2-a^2}{2ah}.$$

Nous nous bornerons aux valeurs positives de h; car, si on change h en $-h$ et y en $-y$, l'équation ne change pas, et ceci montre que les courbes qui correspondent aux valeurs négatives de h sont symétriques de celles qui correspondent aux valeurs positives, par rapport à l'axe des x (en projection, bien entendu, sur le plan des xy).

Étudions maintenant l'équation du second degré en y,

$$xy^2-2ahy+x^3+x(h^2-a^2)=0,$$

en nous bornant aux valeurs positives de x. La condition de réalité est

$$a^2h^2-x^4-x^2(h^2-a^2)>0,$$

ou

$$(x^2+h^2)(x^2-a^2)<0;$$

elle n'est vérifiée que pour les valeurs de x comprises entre $-a$ et $+a$; la courbe est tout entière comprise entre les deux droites $x=a$, $x=-a$; elle touche chacune d'elles, la droite $x=a$ au point d'ordonnée $y=h$; ce point s'élève en même temps que h grandit.

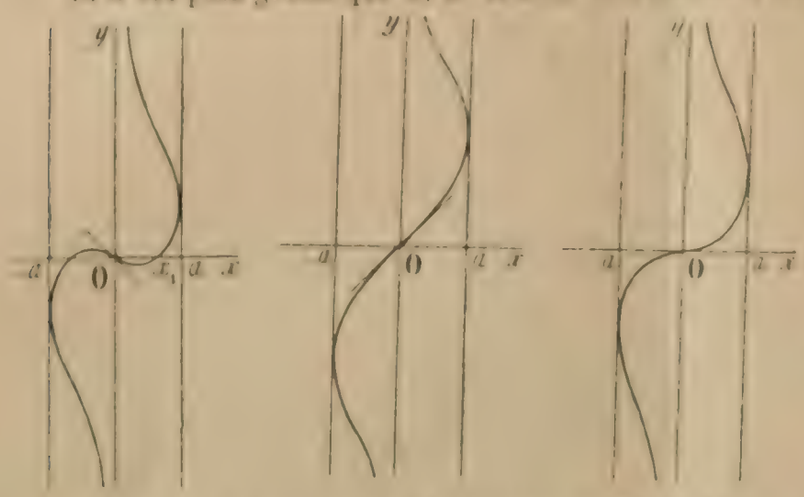
Tant que h est plus petit que a, le coefficient angulaire de la tangente à l'origine est négatif, le terme constant de l'équation du second degré en y s'annule pour une valeur positive, x_1 de x, plus petite que a,

$$x_1=\sqrt{a^2-h^2};$$

entre 0 et x_1, l'équation en y a une racine positive et une négative, une parallèle à Oy comprise entre

ces points rencontre la courbe en un point au-dessus de Ox et un au-dessous; entre x_1 et a, les deux racines sont positives, les deux points de rencontre sont au-dessus de Ox.

Si h est plus grand que a, la courbe ne rencontre Ox qu'au point O, les points de rencontre avec une parallèle à Oy sont toujours au-dessus de Ox, le coefficient angulaire de la tangente à l'origine est positif.



Pour $h = a$, la tangente coïncide avec Ox; c'est un cas intermédiaire; la courbe est encore au-dessus de Ox.

Enfin, pour $x = 0$, y est infini; dans chacun des trois cas, l'axe des y est une asymptote. Les figures 1, 2 et 3 correspondent aux trois cas.

Dans le cas particulier où h est nul, c'est-à-dire où le plan sécant coïncide avec le plan des xy, la section se décompose en l'axe des y, $x = 0$, et le cercle

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

3. Tout plan qui coupe la surface suivant un cercle, la coupe encore suivant une droite réelle. Réciproquement, tout plan passant par une droite réelle de la surface coupe encore la surface suivant une conique qui a pour directions asymptotiques deux directions isotropes, c'est-à-dire suivant un cercle. Il y a donc autant de systèmes de cercles sur la surface qu'il y a de droites réelles appartenant à la surface.

Or, toute droite réelle de la surface est une direction asymptotique réelle; elle est donc parallèle au plan $x = 0$. Nous aurons les droites réelles de la surface en coupant par des plans parallèles au plan des yz, et cherchant ceux qui donnent des sections décomposées. En remontant à l'équation

$$\alpha(y^2 + z^2) - 2ayz + \alpha(\alpha^2 - a^2) = 0,$$

nous voyons que ceci a lieu pour les trois valeurs $\alpha = 0$, $\alpha = \pm a$. Nous trouvons les quatre droites signalées, Oy, Oz et D, D'. Il y a quatre systèmes de cercles situés sur la surface. Les deux systèmes obtenus en coupant par des plans passant par Oz et Oy sont le système indiqué dans l'énoncé et un autre semblable défini avec Oy et les droites D, D', qui sont symétriques l'une de l'autre par rapport aux trois axes.

Les deux systèmes définis par les droites D et D' sont faciles à concevoir : tout plan passant par la droite D, par exemple, coupe les trois autres droites en trois points P, Q, R, qui définissent le cercle correspondant.

Bonnes solutions : MM. Mirguet, à Gueret; A.-O. Guibert, à Nantes, G. Deperrois; E. Comparot, élève de l'école des Mines, G. Lach, à Douai; L. Long, à Chatellerault; J. Conte, conducteur des Ponts et chaussées à Espalion.

Assez bonnes solutions : MM. M. Vasseur, à Lille; L. Chiganne, à Strasbourg.

2350. — *On donne dans un plan un système d'axes rectangulaires* Ox, Oy, *un cercle fixe* (ω), *de centre* O *et de rayon* R, *enfin deux points fixes* A, B, *situés sur l'axe* Ox, *dont les abscisses sont désignées respectivement par* αR *et* βR.

Un point mobile M *décrivant le cercle* (ω), *on considère le cercle variable* (γ) *circonscrit au triangle* MAB. *Soit* M' *le second point de rencontre de* (ω) *et de* (γ).

1° *Trouver le lieu du centre du cercle* (γ'), *orthogonal à* (γ), *qui passe en* M *et* M'. *Cas où ce lieu est un cercle.*

2° *La loi du mouvement de* M *sur* (ω) *étant supposée donnée, on désigne par* V *et* V' *respectivement les*

valeurs algébriques des vitesses de M *et de* M′ *sur le cercle* (ω). *Montrer que le rapport* $\frac{V}{V'}$ *ne dépend que de la position de* M, *et non de la loi du mouvement; trouver le lieu du point* P *de la droite* MM′ *qui est défini par la condition que l'on ait, en grandeur et en signe,* $\frac{\overline{PM}}{\overline{PM'}} = \frac{V}{V'}$.

3° *Soit* θ *l'angle polaire* (Ox, OM) *de* M, *et soit* ρ *le rayon du cercle* (γ). *Calculer la valeur moyenne du rapport* $\frac{R}{\rho}$, *considéré comme fonction de* θ, *pour un tour complet de* M *sur le cercle* (ω). *On supposera, pour ce calcul, que* A *et* B *sont tous deux intérieurs au cercle* (ω); *on montrera que la valeur moyenne demandée est alors une fonction continue du seul produit* αβ. *En est-il de même pour les autres positions de* A *et* B?

(*École polytechnique, concours de* 1918.)

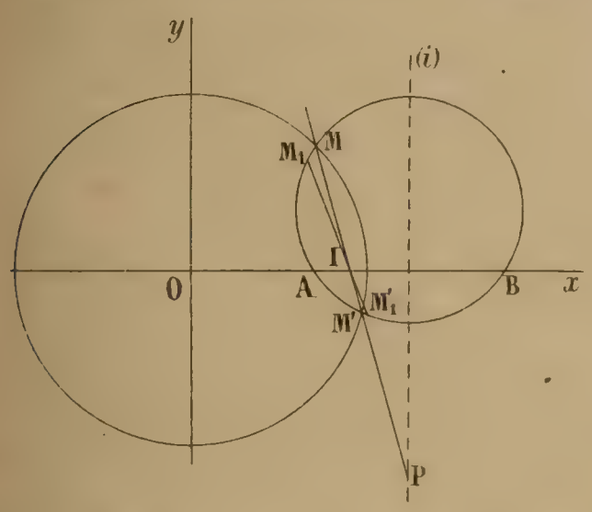
1. Le cercle (ω) a pour équation

$$\omega \equiv x^2 + y^2 - R^2 = 0;$$

le cercle (γ), qui passe aux deux points A et B de Ox, d'abscisses αR et βR, a pour équation

$$\gamma \equiv x^2 + y^2 - (\alpha + \beta) R x + \alpha\beta R^2 - 2\lambda R y = 0,$$

λ étant un paramètre arbitraire. Tous les cercles (γ) ont pour axe radical, pris deux à deux, l'axe des x: donc l'axe radical de l'un d'eux et du cercle (ω), coupe l'axe des x en un point fixe I, ayant même puissance par rapport au cercle (ω) et au couple AB. Quand le cercle (γ) varie, cet axe radical tourne autour du point I et détermine sur le cercle (ω) les deux points M et M′. Cette remarque nous sera très utile dans la suite. Les coordonnées du point I sont $x = \frac{(\alpha\beta + 1) R}{\alpha + \beta}$, $y = 0$; elles s'obtiennent immédiatement en coupant l'axe radical,



$$(\alpha + \beta) x + 2\lambda y - R(\alpha\beta + 1) = 0,$$

par l'axe des x.

Tous les cercles du faisceau (γ), (ω), s'obtiennent en combinant linéairement les deux équations (γ) et (ω); leur équation générale est

$$x^2 + y^2 - (\alpha + \beta) R x - 2\lambda R y + \alpha\beta R^2 + \mu(x^2 + y^2 - R^2) = 0.$$

Pour que l'un de ces cercles soit orthogonal au cercle (γ) il faut que la relation habituelle

$$2aa' + 2bb' - c - c' = 0$$

soit satisfaite. Ici cette relation est

$$2 \cdot \frac{(\alpha + \beta) R (\alpha + \beta) R}{4(1 + \mu)} + 2\frac{\lambda R . \lambda R}{1 + \mu} - \alpha\beta R^2 - \frac{\alpha\beta R^2 + \mu R^2}{1 + \mu} = 0;$$

cette relation se simplifie et s'écrit

$$(\alpha + \beta)^2 + 4\lambda^2 - 2\alpha\beta(1 + \mu) + 2\mu - 2\alpha\beta = 0,$$

ou

$$(\alpha - \beta)^2 + 4\lambda^2 + 2\mu(1 - \alpha\beta) = 0.$$

Prenons les équations du centre :

$$2x - (\alpha + \beta) R + 2\mu x = 0, \qquad 2y - 2\lambda R + 2\mu y = 0,$$

et éliminons λ et μ entre ces équations et la relation trouvée; nous aurons successivement :

$$\mu = \frac{(\alpha+\beta)R - 2x}{2x}, \qquad \lambda = y\frac{(\alpha+\beta)}{2x},$$

et

$$\frac{y^2(\alpha+\beta)^2}{x^2} + (1-\alpha\beta)\frac{(\alpha+\beta)R - 2x}{x} + (\alpha-\beta)^2 = 0,$$

$$(\alpha^2+\beta^2-2)x^2 + (\alpha+\beta)^2y^2 + (\alpha+\beta)(1-\alpha\beta)Rx = 0.$$

Telle est l'équation du lieu des centres; elle représente une conique rapportée à un axe et à la tangente en un des sommets situés sur cet axe.

Pour que ce lieu soit un cercle, il faut que

$$\alpha^2+\beta^2-2 = (\alpha+\beta)^2,$$

ou

$$\alpha\beta = -1.$$

2. Faisons tourner l'axe radical IM d'un angle infiniment petit autour du point I; appelons M_1 et M_1' les nouveaux points de rencontre avec le cercle (ω) et posons $MM_1 = ds$, $M'M_1' = ds'$; les deux triangles semblables IMM_1 et $IM'M_1'$ nous donnent évidemment $\frac{IM}{IM'} = -\frac{ds}{ds'}$; par suite, $\frac{IM}{IM'} = -\frac{v}{v'}$. Le rapport des vitesses ne dépend que de la position de l'axe radical, nullement de la fonction $\theta = f(t)$, qui définit le mouvement du point M.

Le calcul permet aussi de se rendre compte de cette propriété : posons $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$, pour représenter les coordonnées du point M, et portons ces deux valeurs dans l'équation de l'axe radical; nous aurons l'équation trigonométrique

$$(\alpha+\beta)\cos\theta + 2\lambda\sin\theta - \alpha\beta - 1 = 0,$$

qui définit les deux angles θ et θ'; en écrivant qu'elle est vérifiée pour $\theta = \theta'$, nous avons la deuxième équation

$$(\alpha+\beta)\cos\theta' + 2\lambda\sin\theta' - \alpha\beta - 1 = 0,$$

et, en éliminant λ entre ces deux équations, nous avons une relation entre θ et θ',

$$(\alpha+\beta)\sin(\theta-\theta') - (\alpha\beta+1)(\sin\theta - \sin\theta') = 0,$$

qui est indépendante de la loi de variation de la fonction λ, et, par suite, de la loi du mouvement. Ceci suffit à démontrer la propriété annoncée.

Au surplus, cette relation s'écrit

$$(\alpha+\beta)\cos\frac{\theta-\theta'}{2} - (\alpha\beta+1)\cos\frac{\theta+\theta'}{2} = 0,$$

et donne

$$(\alpha+\beta)\sin\frac{\theta-\theta'}{2}(d\theta - d\theta') - (\alpha\beta+1)\sin\frac{\theta+\theta'}{2}(d\theta + d\theta') = 0;$$

de là nous déduisons

$$\frac{d\theta}{d\theta'} = \frac{v}{v'} = \frac{(\alpha+\beta)\sin\frac{\theta-\theta'}{2} + (\alpha\beta+1)\sin\frac{\theta+\theta'}{2}}{(\alpha+\beta)\sin\frac{\theta-\theta'}{2} - (\alpha\beta+1)\sin\frac{\theta+\theta'}{2}}.$$

Ceci nous montre bien que le rapport $\frac{v}{v'}$ ne dépend que de la valeur de θ, puisque θ' est donné, chaque fois, en fonction de θ par la même relation.

Le point I, sur MM', est déterminé par le rapport $\frac{IM}{IM'} = -\frac{v}{v'}$. Le point P, déterminé par le

rapport $\frac{PM'}{PM} = \frac{v'}{v}$ est donc le conjugué harmonique de I par rapport aux points M et M'. Le lieu du point P est la polaire de I par rapport au cercle (ω); c'est la droite

$$x_I f'_x + f'_z = 0,$$

ou

$$\frac{\alpha\beta + 1}{\alpha + \beta} x - R = 0, \qquad x = \frac{R(\alpha + \beta)}{\alpha\beta + 1}.$$

Pour vérifier ce point par le calcul, nous écrivons

$$x_P = \frac{x - \frac{v}{v'} x'}{1 - \frac{v}{v'}}, \qquad y_P = \frac{y - \frac{v}{v'} y'}{1 - \frac{v}{v'}},$$

x, y, x', y' étant les coordonnées des points M et M'. Le calcul de x_P nous suffira :

$$x_P = R \frac{\cos\theta - \frac{d\theta}{d\theta'} \cos\theta'}{1 - \frac{d\theta}{d\theta'}},$$

$$x_P = R \frac{\cos\theta \left[(\alpha + \beta) \sin\frac{\theta - \theta'}{2} - (\alpha\beta + 1) \sin\frac{\theta + \theta'}{2}\right] - \cos\theta' \left[(\alpha + \beta) \sin\frac{\theta - \theta'}{2} + (\alpha\beta + 1) \sin\frac{\theta + \theta'}{2}\right]}{-2(\alpha\beta + 1) \sin\frac{\theta + \theta'}{2}};$$

le numérateur s'écrit

$$(\alpha + \beta) \sin\frac{\theta - \theta'}{2} (\cos\theta - \cos\theta') - (\alpha\beta + 1) \sin\frac{\theta + \theta'}{2} (\cos\theta + \cos\theta'),$$

$$-2(\alpha + \beta) \sin^2\frac{\theta - \theta'}{2} \sin\frac{\theta + \theta'}{2} - 2(\alpha\beta + 1) \sin\frac{\theta + \theta'}{2} \cos\frac{\theta + \theta'}{2} \cos\frac{\theta - \theta'}{2};$$

nous avons donc

$$x_P = R \frac{(\alpha + \beta) \sin^2\frac{\theta - \theta'}{2} + (\alpha\beta + 1) \cos\frac{\theta - \theta'}{2} \cos\frac{\theta + \theta'}{2}}{\alpha\beta + 1};$$

or, la relation entre θ et θ' nous donne

$$(\alpha\beta + 1) \cos\frac{\theta + \theta'}{2} = (\alpha + \beta) \cos\frac{\theta - \theta'}{2};$$

donc

$$x_P = \frac{R(\alpha + \beta)}{\alpha\beta + 1} \left(\sin^2\frac{\theta - \theta'}{2} + \cos^2\frac{\theta - \theta'}{2}\right);$$

puis

$$x_P = \frac{R(\alpha + \beta)}{\alpha\beta + 1},$$

ce qui montre que le point P décrit la droite

$$x = \frac{R(\alpha + \beta)}{\alpha\beta + 1}.$$

3. Le rayon, ρ, du cercle (γ) est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont $\frac{AB}{2}$ et l'ordonnée du centre de ce cercle; nous avons donc

$$\rho^2 = \lambda^2 R^2 + \frac{(\beta - \alpha)^2 R^2}{4}.$$

En remplaçant x par $R\cos\theta$, y par $R\sin\theta$ dans l'équation du cercle (γ), nous avons

$$2\lambda \sin\theta = 1 - (\alpha + \beta)\cos\theta + \alpha\beta,$$

puis

$$\frac{\rho^2}{R^2} = \frac{[1 + \alpha\beta - (\alpha + \beta)\cos\theta]^2 + (\beta - \alpha)^2 \sin^2\theta}{4 \sin^2\theta};$$

remplaçons au numérateur $\sin^2\theta$ par $1 - \cos^2\theta$, nous aurons finalement

$$\frac{2\rho\sin\theta}{R} = \sqrt{4\alpha\beta\cos^2\theta - 2(\alpha+\beta)(1+\alpha\beta)\cos\theta + (1+\alpha\beta)^2 + (\beta-\alpha)^2},$$

le radical devant être pris avec le signe +, quand $\sin\theta$ est positif, et avec le signe —, quand $\sin\theta$ est négatif.

Nous nous placerons dans le cas où α et β sont positifs et plus petits que 1 et nous désignerons par β le plus grand de ces deux nombres.

La valeur moyenne de la fonction $\frac{R}{\rho}$, fonction de θ, pour un tour complet du point M sur le cercle (ω) est le produit de $\frac{1}{2\pi}$ par la somme des deux intégrales définies

$$\int_0^\pi \frac{2\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{4\alpha\beta\cos^2\theta - \ldots}}, \qquad \int_\pi^{2\pi} \frac{-2\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{4\alpha\beta\cos^2\theta - \ldots}};$$

si nous changeons θ en $2\pi - \theta$, $\sin\theta$ se change en $-\sin\theta$, $d\theta$ en $-d\theta$, et la deuxième intégrale reproduit exactement la première. La valeur moyenne de $\frac{R}{\rho}$ est donc finalement

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{4\alpha\beta\cos^2\theta - 2(\alpha+\beta)(1+\alpha\beta)\cos\theta + (1+\alpha\beta)^2 + (\beta-\alpha)^2}},$$

ou

$$\frac{2}{\pi}\int_1^{-1} \frac{-du}{\sqrt{4\alpha\beta u^2 - 2(\alpha+\beta)(1+\alpha\beta)u + (1+\alpha\beta)^2 + (\beta-\alpha)^2}},$$

ou, enfin,

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{4\alpha\beta u^2 - \ldots}},$$

u désignant la variable $\cos\theta$.

Ceci peut s'écrire

$$\frac{1}{\pi\sqrt{\alpha\beta}}\int_{-1}^{+1} \frac{du}{\sqrt{u^2 - 2Au + B}},$$

en posant

$$A = \frac{(\alpha+\beta)(1+\alpha\beta)}{4\alpha\beta}, \qquad B = \frac{(1+\alpha\beta)^2 + (\beta-\alpha)^2}{4\alpha\beta}.$$

Le dénominateur peut se mettre sous la forme

$$\sqrt{(u-A)^2 + B - A^2},$$

et

$$B - A^2 = \frac{4\alpha\beta[(1+\alpha\beta)^2 - (\beta-\alpha)^2] - (\alpha+\beta)^2(1+\alpha\beta)^2}{16\alpha^2\beta^2};$$

ceci s'écrit successivement :

$$\frac{(\beta-\alpha)^2[4\alpha\beta - (\beta-\alpha)^2](1+\alpha\beta)^2}{16\alpha^2\beta^2}, \qquad \frac{-(1-\alpha\beta)^2(\beta-\alpha)^2}{16\alpha^2\beta^2} = C.$$

Posons alors $u - A = v$, l'intégrale devient, en se bornant d'abord à l'intégrale indéfinie,

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 - C}} = L\left[v + \sqrt{v^2 - C}\right],$$

ou

$$L\left[u - A + \sqrt{u^2 - 2Au + B}\right].$$

Il est facile de voir que A est plus grand que 1, car l'inégalité $A - 1 > 0$ donne

$$(\alpha+\beta)(1+\alpha\beta) - 4\alpha\beta > 0, \qquad \alpha(\beta-1)^2 + \beta(\alpha-1)^2 > 0.$$

et, sous cette dernière forme, elle est évidente. Comme u varie entre -1 et $+1$, le logarithme devra s'écrire

$$L(A - u - \sqrt{u^2 - 2Au + B}),$$

et la valeur moyenne de la fonction est

$$\frac{1}{\pi\sqrt{\alpha\beta}} L \frac{A - 1 - \sqrt{1 - 2A + B}}{A + 1 - \sqrt{1 + 2A + B}};$$

or,

$$1 - 2A + B = \frac{4\alpha\beta - 2(\alpha + \beta)(1 + \alpha\beta) + (1 + \alpha\beta)^2 + (\beta - \alpha)^2}{4\alpha\beta} = \frac{(1 + \alpha\beta - \beta - \alpha)^2}{4\alpha\beta}$$

de même,

$$1 + 2A + B = \frac{(1 + \alpha\beta + \beta + \alpha)^2}{4\alpha\beta};$$

par conséquent, la valeur moyenne de la fonction est

$$\frac{1}{\pi\sqrt{\alpha\beta}} . L \frac{\alpha(\beta - 1)^2 + \beta(\alpha - 1)^2 - (1 + \alpha\beta - \alpha - \beta)\sqrt{2\alpha\beta}}{\alpha(\beta + 1)^2 + \beta(\alpha + 1)^2 - (1 + \alpha\beta + \alpha + \beta)\sqrt{2\alpha\beta}}.$$

Le numérateur de la quantité sous le logarithme s'écrit

$$\begin{aligned}
&\alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 - 4\alpha\beta + \alpha + \beta - \sqrt{2\alpha\beta} - \alpha\beta\sqrt{2\alpha\beta} + (\alpha + \beta)\sqrt{2\alpha\beta} \\
&= \alpha\beta(\alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta}) + \alpha + \beta - \sqrt{2\alpha\beta} + \sqrt{2\alpha\beta}(\alpha + \beta - \sqrt{2\alpha\beta}) \\
&= (\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})^2(\alpha\beta + 1 + 2\sqrt{\alpha\beta}) = (\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})^2(\sqrt{\alpha\beta} + 1)^2.
\end{aligned}$$

Le dénominateur s'écrit

$$\begin{aligned}
&\alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 + 4\alpha\beta + \alpha + \beta - \sqrt{2\alpha\beta} - \alpha\beta\sqrt{2\alpha\beta} - (\alpha + \beta)\sqrt{2\alpha\beta} \\
&= (\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})^2(\alpha\beta + 1 - 2\sqrt{\alpha\beta}) = (\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})^2(\sqrt{\alpha\beta} - 1)^2.
\end{aligned}$$

Le résultat est donc

$$\frac{2}{\pi\sqrt{\alpha\beta}} L \frac{1 + \sqrt{\alpha\beta}}{1 - \sqrt{\alpha\beta}};$$

il ne dépend que de $\alpha\beta$.

Nous nous bornerons à ce cas. En supposant simplement α et β positifs et tels que $1 + \alpha\beta - \alpha - \beta$ soit positif, rien n'est changé aux calculs précédents; le résultat est le même, sauf peut-être la façon d'écrire la quantité soumise au logarithme. Les autres cas seraient faciles à étudier, mais ne conduisent plus aux mêmes résultats.

G. LACH, à Douai.

Très bonnes solutions : MM. Roux, instituteur au Creusot; M., à Guéret; A. O. Guibert, à Nantes.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1920)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (*Fin*).

10510. — Trouver le plan polaire d'un point par rapport à un hyperboloïde de révolution à une nappe dont l'axe est vertical ou de front.

— **511.** — On donne une surface gauche de révolution à axe vertical, et une horizontale. Mener par cette droite un plan coupant la surface suivant une hyperbole équilatère.

— **512.** — Peut-on placer sur une surface gauche de révolution une génératrice parallèle à une direction donnée? Résoudre le problème quand il est possible.

— **513.** — On donne un hyperboloïde de révolution défini par une frontale tournant autour d'un axe de front. Trouver l'ombre de l'hyperboloïde sur le plan horizontal (ombre à 45°).

10514. — Déterminer un hyperboloïde de révolution à axe de front passant par deux droites données.

— **515.** — On considère un hyperboloïde engendré par une horizontale tournant autour d'un axe de front. Étant donnée la projection verticale d'un point de la surface, trouver la projection horizontale et le plan tangent.

— **516.** — On donne un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal et ayant une génératrice verticale. Construire le lieu des projections d'un point donné sur les génératrices horizontales.

— **517.** — On donne un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal. Trouver un plan passant par une horizontale coupant la surface suivant une hyperbole équilatère.

— **518.** — On donne un quadrilatère gauche dont la projection horizontale est un parallélogramme. Les sommets ont pour cotes 0, 1, 2, 3. Ce quadrilatère définit un paraboloïde hyperbolique. Trouver le sommet de ce paraboloïde.

— **519.** — On donne un cône ayant pour base un cercle dans le plan horizontal, et une sphère ayant pour diamètre la hauteur du cône. Intersection du cône et de la sphère. Points remarquables.

— **520.** — On donne deux paraboloïdes de révolution ayant leurs axes verticaux dans un même plan de front. Trouver leurs ombres propres et l'ombre portée d'un des paraboloïdes sur l'autre, les rayons lumineux étant de front.

— **521.** — Un hyperboloïde de révolution à axe vertical est coupé par un plan de bout suivant une ellipse E. On éclaire par un point lumineux situé au-dessus du plan de bout. Construire l'ombre portée par l'ellipse E sur l'hyperboloïde.

— **522.** — Intersection d'un tore à collier nul et d'un paraboloïde de révolution dont la parabole méridienne a pour sommet le point de contact O du cercle générateur et de l'axe du tore, et est osculatrice en O à ce cercle. Étude analytique et géométrique.

— **523.** — Intersection de deux surfaces de révolution dont les axes sont dans un même plan de front; l'une étant définie par sa méridienne principale et l'autre par une courbe quelconque.

— **524.** — On donne une sphère et un plan, et on considère la section comme la base d'un cône de sommet donné. Mener à la trace horizontale du cône une tangente parallèle à une direction donnée.

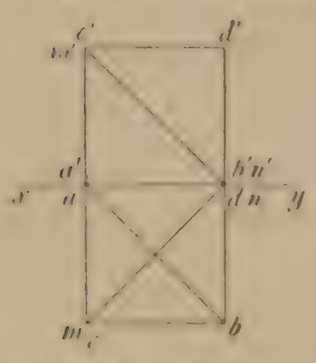
— **525.** — Intersection d'un tore à axe vertical et d'un cylindre de bout ayant pour base l'un des cercles de front du tore.

— **526.** — On donne un paraboloïde à axe vertical; par le sommet on mène un plan parallèle au deuxième bissecteur. La section est la section droite d'un cylindre. Trouver l'intersection du paraboloïde et du cylindre.

— **527.** — Par un point de la ligne de terre on mène une verticale et une ligne de bout, et on fait tourner autour de ces deux droites une ligne de profil également inclinée sur les plans de projection. Intersection des deux surfaces engendrées.

— **528.** — On donne un paraboloïde de révolution à axe de front, et on demande de trouver les points où le plan tangent fait un angle donné avec le plan horizontal.

— **529.** — On donne un cube ayant une face dans le plan horizontal et une face dans le plan vertical. On considère : 1° un hyperboloïde de révolution passant par le cercle inscrit dans la face supérieure et ayant pour cône asymptote le cône engendré par la droite (mn, $m'n'$) tournant autour de la verticale qui passe par le centre du cube; 2° un paraboloïde hyperbolique ayant un plan directeur de front et ayant pour génératrices (ab, $a'b'$) et (cd, $c'd'$). Déterminer l'intersection de ces deux surfaces.



— **530.** — On donne un hyperboloïde de révolution à une nappe dont l'axe est vertical, un point S situé sur la surface et une sphère inscrite. Déterminer l'intersection de l'hyperboloïde et du cône qui a pour sommet le point S et qui est circonscrit à la sphère.

— **531.** — On donne un paraboloïde de révolution à axe vertical, une droite D parallèle à la ligne de terre et un point p du plan horizontal. Trouver sur la droite D un point lumineux S tel que la limite de l'ombre portée du paraboloïde sur le plan horizontal passe par le point p.

— **532.** — On donne deux droites D et Δ, rencontrant la ligne de terre à angle droit et inclinées à 45° sur le plan horizontal, mais en sens contraires. Ces droites sont les génératrices d'un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal. Une sphère a son centre dans le premier bissecteur et est tangente à la ligne de terre. Trouver l'intersection du paraboloïde avec le cône circonscrit à la sphère et ayant pour sommet un point de la ligne de terre.

— **533.** — On considère le même paraboloïde que dans la question précédente, et on demande l'intersection de cette surface avec l'hyperboloïde de révolution engendré par la droite D tournant autour de la verticale du pied de Δ sur la ligne de terre. Solution analytique.

534. — On donne une verticale située dans le plan vertical et une droite du deuxième bissecteur; celle-ci, en tournant autour de la verticale, engendre un hyperboloïde. Trouver l'intersection de cette surface avec un paraboloïde défini par les deux droites données et un plan directeur horizontal.

— **535.** — On donne un cercle C dans le plan horizontal tangent à la ligne de terre, et on demande l'intersection du tore engendré par le cercle tournant autour de la ligne de terre et du cylindre vertical passant par le cercle C. Trouver l'équation de la projection verticale.

536. — Intersection d'un hyperboloïde de révolution à axe vertical, et d'un cône de révolution à axe vertical, le cône ayant une génératrice parallèle à une génératrice de l'hyperboloïde.

— **537.** — On donne un cône de révolution à axe vertical. On prend un point sur l'axe, sommet d'un deuxième cône de révolution dont l'axe est parallèle à la ligne de terre et qui a une génératrice parallèle à l'une des génératrices de contour apparent vertical du premier cône. Déterminer l'intersection des deux cônes.

V. — Cinématique.

10538. — Démontrer que si une droite d'un corps en mouvement est perpendiculaire à la vitesse d'un de ses points, elle est perpendiculaire aux vitesses de tous ses points. En déduire l'existence du centre instantané de rotation dans le mouvement d'un plan sur un plan.

— **539.** — Un point parcourt la courbe $\rho = 2a\cos^2\frac{\theta}{2}$, avec une vitesse aréolaire constante. Trouver l'hodographe.

— **540.** — On donne un cercle et un point A dans son plan; un point se déplace sur le cercle de façon que l'accélération passe constamment par le point A. Étudier le mouvement.

— **541.** — On considère le point mobile M qui a pour coordonnées $x = \frac{a}{\cos\varphi}$ $y = b\,\mathrm{tg}\,\varphi$, φ étant une fonction de t définie par l'équation

$$\mathrm{L}\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\right| - \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\mathrm{tg}\,\varphi = nt.$$

Trouver l'hodographe du mouvement.

— **542.** — On considère un arceau de la cycloïde $x = a(\varphi - \sin\varphi)$, $y = a(1-\cos\varphi)$, φ variant de 0 à 2π. Un point M se meut sur l'arceau de façon que l'arc BM (B étant le sommet) soit une fonction sinusoïdale du temps. Trouver l'hodographe.

— **543.** — On considère un point mobile qui décrit l'ellipse $x = a\cos u$, $y = b\sin u$, u étant fonction de t. Déterminer cette fonction de manière que la vitesse aréolaire autour du foyer soit constante.

— **544.** — On considère un mouvement tel que la vitesse et l'accélération soient dans un rapport constant et que l'angle de l'accélération et de la vitesse soit constant. Étudier le mouvement. Hodographe.

— **545.** — Un point $M(x, y)$ décrit la parabole $y^2 - 2px = 0$ de façon que la projection de la vitesse sur l'axe des y soit égale à $\sqrt{y^2+p^2}$. Trouver la loi du mouvement et l'hodographe.

— **546.** — Étudier le mouvement où la vitesse et l'accélération totale sont deux vecteurs rectangulaires et égaux.

— **547.** — On considère une parabole de foyer F et un point qui se déplace sur la parabole de façon que l'accélération passe constamment par le point F. Établir la formule $\gamma = \frac{v^2}{2\rho}$, γ désignant l'accélération, v la vitesse, ρ le rayon vecteur FM.

— **548.** — Un point décrit la cardioïde $\rho = a(1+\cos\omega)$ de façon que l'hodographe relatif au pôle soit le cercle $\rho = a\cos\omega$. Étudier le mouvement; calculer ρ et ω en fonction du temps.

— **549.** — Diagrammes des vitesses et des accélérations. Comment peut-on passer de l'un à l'autre ?

— **550.** — Un point se déplace sur la courbe $x = \frac{a}{\cos\varphi}$, $y = b\,\mathrm{tg}\,\varphi$ de façon que la vitesse aréolaire autour de l'origine soit constante. Déterminer φ en fonction de t.

— **551.** — Un point décrit un cercle avec une accélération constante. Trouver l'hodographe du mouvement.

— **552.** — Un corps solide est animé d'un mouvement hélicoïdal. On considère une droite de ce corps et on demande le lieu des vecteurs vitesses de tous les points de cette droite à l'instant t.

— **553.** — Un mobile M décrit la parabole $y^2 - 2px = 0$ avec une vitesse égale à trois fois la distance du point M au foyer F. Étudier le mouvement.

— **554.** — Un point se déplace sur un cercle de façon que l'accélération fasse un angle de 45° avec la tangente. Étudier le mouvement du point.

VI. — Statique.

— **555.** — Trouver le centre de gravité de l'arc homogène de la courbe $y = \frac{x^2}{2}$, $z = \frac{x^3}{6}$, compris entre l'origine et un point d'abcisse x.

— **556.** — On demande de déterminer le centre de gravité G d'un arc de parabole $y^2 - 2px = 0$, compris entre le sommet O et un point M. Quel est le lieu du point G, quand M décrit la parabole ? Montrer géométriquement que la tangente en G à ce lieu passe par le point M.

— **557.** — Trouver le centre de gravité de l'aire d'une demi-boucle de la lemniscate $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$.

— **558.** — On donne deux axes et un point A. Trouver le lieu géométrique d'un vecteur AB ayant pour origine le point A et tel que le rapport des moments de ce vecteur par rapport aux axes donnés ait une valeur donnée.

— **559.** — On donne un cercle et un point M dans son plan. Ce point est attiré par tout élément PP' du cercle suivant une force proportionnelle à l'élément et inversement proportionnelle à la distance de M à l'élément. Trouver la résultante de toutes ces forces.

— **560.** — On divise une demi-circonférence de diamètre AB en n parties égales par les points $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$. Chacun de ces points attire B avec une force proportionnelle à la distance. Trouver la résultante de ces forces.

— **561.** — On donne un système de forces par sa résultante générale (X, Y, Z) et son moment résultant par rapport à l'origine (L, M, N). Décomposer ce système en deux forces dont l'une passe par un point donné de Oz et dont l'autre est dans le plan xOy. Montrer que cette décomposition est possible et trouver la ligne d'action de la force située dans le plan xOy.

— **562.** — Trouver les positions d'équilibre d'un point assujetti à se déplacer sur un ellipsoïde poli; ce point est attiré par les trois sommets voisins par des forces proportionnelles à la distance, et inversement proportionnelles à l'axe correspondant.

— **563.** — Même problème en supposant le point attiré par les axes proportionnellement au carré de la distance.

— **564.** — On considère une ellipse homogène, pesante, de poids Q, pouvant tourner autour d'un de ses foyers dans un plan vertical. Un poids P est attaché à une corde enroulée sur l'ellipse. Trouver la position d'équilibre.

— **565.** — Une barre pesante homogène s'appuie d'une part par son extrémité A sur un plan horizontal et par l'autre extrémité B sur un disque circulaire reposant sur le plan horizontal. Il y a frottement en A, puis en B. Trouver les positions d'équilibre.

— **566.** — Déterminer les positions d'équilibre d'un point pesant assujetti à rester sur un paraboloïde de révolution à axe vertical, et repoussé par l'axe suivant une force proportionnelle à la distance.

(*Fin.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

2501. — On considère le champ de forces

$$X = x^2 - y^2 - z^2, \qquad Y = -\lambda xy, \qquad Z = -\mu xz.$$

1° Déterminer λ et μ de façon que ce champ dérive d'une fonction de force, et trouver cette fonction de force, $U(x, y, z)$.

2° Trouver la forme des surfaces de niveau, montrer que les lignes de forces sont des courbes planes dont le plan passe par Ox.

3° On considère l'intersection des surfaces de niveau par un plan passant par Ox, et les lignes de forces situées dans ce plan. Étudier ces diverses lignes.

4° Déterminer la surface engendrée par les lignes de forces qui s'appuient sur la courbe

$$x = 0, \qquad y^2 + z^2 = b^2.$$

MARCEL VASSEUR, étudiant à Lille.

2502. — On considère l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

et l'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Par un point M de l'hyperboloïde on mène le plan tangent, P, à l'hyperboloïde.

1° Trouver le lieu du point M_1, pôle du plan P par rapport à l'ellipsoïde, quand le point M décrit l'hyperboloïde.

2° Trouver le lieu du centre de la section faite par le plan P dans l'ellipsoïde et le lieu de la polaire du point M par rapport à cette conique.

3° Trouver le lieu du point de rencontre de OM avec la perpendiculaire à OM abaissée du point M_1.

E. H.

2503. — Résoudre les équations

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \qquad x^3 + a'x^2 + b'x + c' = 0,$$

sachant qu'elles admettent une racine double commune. Application pour :

$$a = 0, \qquad b = -3\alpha^2, \qquad c = 2\alpha^3, \qquad a' = 1, \qquad b' = -\alpha.$$

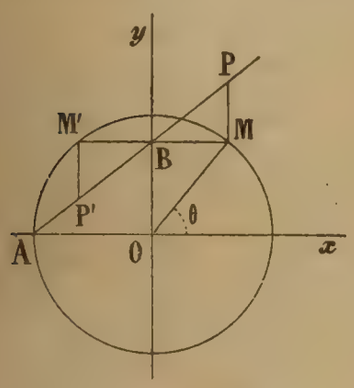
N. ABRAMESCO, maître de conférences à l'Université de Cluj (Roumanie).

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE CENTRALE

Concours spécial d'octobre 1919.

2341. — *On donne deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *et on trace un cercle de centre* O, *de rayon* R, *rencontrant la partie négative de l'axe* Ox *en un point* A. *On définit un point* M *variable sur le cercle donné par l'angle* θ *que forme le rayon* OM *avec l'axe* Ox, *et on désigne par* B *le point de rencontre de l'axe* Oy *avec la parallèle à* Ox *menée par* M.



1° *Déterminer la courbe* C *lieu du point* P *de rencontre de la droite* AB *avec la parallèle à* Oy *menée par* M. *Construire la courbe* C; *déterminer les tangentes parallèles aux axes et les tangentes issues du point* A.

2° *La droite* AB *rencontre la courbe* C *en un second point variable* P' *provenant d'une seconde position* M' *du point* M. *Déterminer et construire l'enveloppe de la perpendiculaire abaissée du point* B *sur les droites* MP' *ou* M'P.

1° Le point M a pour coordonnées $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$ et l'équation de la droite AB s'écrit, en fonction des coordonnées à l'origine $\overline{OA} = -R$, $\overline{OB} = R\sin\theta$,

$$\frac{x}{-R} + \frac{y}{R\sin\theta} - 1 = 0.$$

P est à l'intersection de AB et de la droite $x = R\cos\theta$:

$$\begin{cases} x_P = R\cos\theta, \\ y_P = (x_P + R)\sin\theta = R\sin\theta(1 + \cos\theta). \end{cases}$$

Pour obtenir la courbe (C) lieu de P, il suffit évidemment de faire varier θ de 0 à π. On a

$$x'_\theta = -R\sin\theta, \quad y'_\theta = R[\cos\theta(1+\cos\theta) - \sin^2\theta] = R(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1),$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\cos^2\theta + \cos\theta - 1}{\sin\theta}.$$

y'_θ s'annule lorsque $2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$, ou pour $\cos\theta = \frac{-1 \pm 3}{4}$,

$$\cos\theta = \frac{1}{2}, \qquad \cos\theta = -1,$$

c'est-à-dire pour $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\theta = \pi$. La première valeur donne un maximum, puisque y'_θ passe du positif au négatif lorsque θ croît :

$$y_{\text{max.}} = R\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}R\sqrt{3}.$$

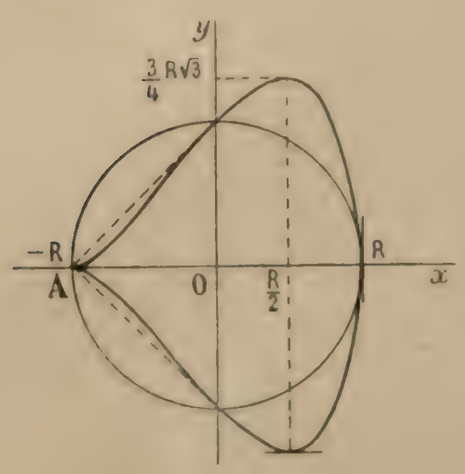
La seconde donne à y la valeur minimum 0.

Enfin, la valeur de $\frac{dy}{dx}$ est indéterminée pour $\theta = \pi$. L'application de la règle de l'Hôpital donne

$$\lim\frac{dy}{dx} = \lim\frac{\sin\theta + 2\sin 2\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\pi + 2\sin 2\pi}{\cos\pi} = 0,$$

et la courbe (C) est tangente à Ox en A.

Le tableau et la courbe ci-dessous résument les variations de x et y :



θ	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{3}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	π
x'_θ	0			$-$			0
x	$+R$	$\searrow$	$+\frac{R}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-R$
y'_θ	$2R$	$+$	0		$-$		0
y	0	$\nearrow$	$\frac{3}{4}R\sqrt{3}$ max.	$\searrow$	R	$\searrow$	0
$\frac{dy}{dx}$	∞		0		$+1$		0

On voit de plus que la tangente au point (0, R) de (C), correspondant à $\theta = \frac{\pi}{2}$, passe par A.

2° Pour obtenir les coordonnées de P′, il suffit de changer θ en $(\pi - \theta)$ dans celles de P :

$$x_{P'} = -R\cos\theta, \qquad y_{P'} = R\sin\theta(1 - \cos\theta).$$

Le coefficient angulaire de MP′ est

$$\frac{y_M - y_{P'}}{x_M - x_{P'}} = \frac{R\sin\theta - R\sin\theta(1 - \cos\theta)}{R\cos\theta + R\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{2};$$

celui de M′P est aussi $\frac{\sin\theta}{2}$ et MP′, M′P sont parallèles. L'équation de la perpendiculaire abaissée de B sur MP′ et M′P est donc

$$y - R\sin\theta = x\left(\frac{-2}{\sin\theta}\right),$$

ou encore

$$y - R\sin\theta + \frac{2x}{\sin\theta} = 0.$$

Pour chercher l'enveloppe de cette droite, dérivons par rapport à θ :

$$-R\cos\theta + \frac{-2x\cos\theta}{\sin^2\theta} = 0.$$

Les coordonnées du point de contact sont

$$x = -\frac{R}{2}\sin^2\theta, \qquad y = 2R\sin\theta.$$

En éliminant le paramètre θ entre ces équations, on obtient celle de l'enveloppe :

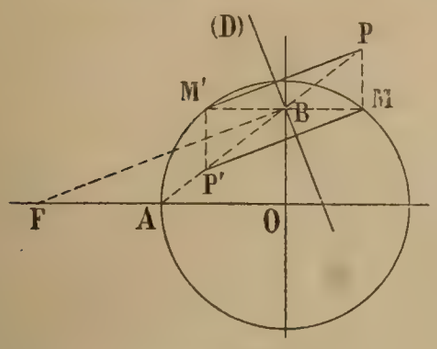
$$\left(\frac{y}{2R}\right)^2 = -\frac{2x}{R}, \qquad \text{ou} \qquad y^2 = -8Rx.$$

C'est une parabole ayant pour axe Ox, pour sommet l'origine O, pour tangente au sommet Oy, pour paramètre 4R et pour foyer le point $(-2R, 0)$, c'est-à-dire le symétrique de O par rapport à A. Elle tourne sa concavité vers les x négatifs.

La forme paramétrique de l'équation de cette parabole montre que l'enveloppe comprend seulement l'arc limité aux points $\left(-\frac{R}{2}, +2R\right)$, $\left(-\frac{R}{2}, -2R\right)$.

Nous n'insistons pas sur la construction de la courbe, qui est facile.

Remarque. — La solution géométrique de cette dernière partie est très simple. Soit (D) la perpendiculaire menée par B à MP′ et M′P qui sont parallèles car MPM′P′ est un parallélogramme.



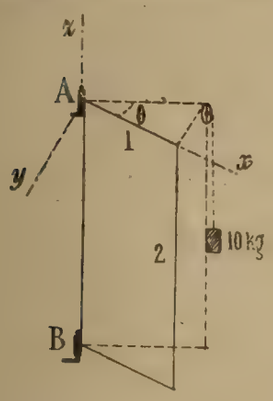
Menons en B à (D) la perpendiculaire BF qui coupe OA en F. La droite BF est parallèle à M′P et il en résulte que les triangles rectangles PMM′, BOF sont homothétiques. Conséquemment, les médianes issues des sommets homologues P, B sont parallèles; or, celle issue de P passe par B, donc elles sont confondues et A est milieu de OF.

Le point F est fixe et on en déduit que l'enveloppe de (D) est une parabole de foyer F et de tangente au sommet OB. Pour obtenir l'arc utile de cette enveloppe, il suffit de considérer la position limite de MP′ atteinte lorsque M est sur OB.

H.-L. MENNESSIER, à Évreux.

Bonnes solutions de MM. P. Abadie, sous-lieutenant au 81e R. A. L., Metz; L. Chigane, 155e R. A. P.-E. M., Strasbourg; J. Conte, conducteur des Ponts et Chaussées, à Espalion; Dodat, à la Ferté, Allier; Émile Duval, à Lambézellec; A. Hutinel, à Cannes; M. Labro, à Villefranche; G. Lach, à Douai; L. Long, à Châtellerault; Ch. Pacé, enseigne de vaisseau, à bord de la *Ville d'Ys*; X. Picard, école normale de Parthenay; M. Roux, au Creusot.

2342. — *Une porte rectangulaire, homogène, ayant* 2^m *de hauteur et* 1^m *de largeur, du poids de* 100^{kg}, *est montée sur deux gonds verticaux, placés aux angles; ces gonds sont agencés de telle façon que la réaction du gond supérieur est nécessairement horizontale, tandis que celle du gond inférieur peut avoir une direction quelconque.*



1° Déterminer, graphiquement ou par le calcul, les efforts exercés par la porte sur les gonds.

2° A l'angle supérieur de la porte, on attache une ficelle qui passe sur une poulie très petite fixée à la paroi, à l'angle de la porte dans la position de fermeture, et on pend à cette ficelle un poids de 10^{kg}. *Déterminer la traction à exercer normalement à la porte et au milieu du bord vertical pour maintenir la porte ouverte sous un angle donné* θ. *Déterminer les efforts supportés par les gonds. On admet que le poids tenseur de* 10^{kg} *tire sur la porte dans la direction de la ficelle; on néglige le poids de cette ficelle ainsi que tous les frottements.*

1° Soient F_1 et F_2 les réactions des gonds A et B; elles sont dans le plan xOz par raison de symétrie. Appelons P le poids de la porte.

Formons le tableau des diverses forces appliquées à la porte, de leurs composantes et des coordonnées de leurs points d'application :

F	X	Y	Z	x	y	z
F_1	X_1	0	0	0	0	0
F_2	X_2	0	Z_2	0	0	-2
P	0	0	-100	$\frac{1}{2}$	0	-1

Les équations d'équilibre sont

$$\Sigma X = X_1 + X_2 = 0, \qquad \Sigma Z = Z_2 - 100 = 0, \qquad \Sigma(zX - xZ) = -2X_2 + 50 = 0,$$

d'où l'on tire $X_2 = 25$, $Z_2 = 100$, $X_1 = -25$.

Les efforts de la porte sur ses gonds sont évidemment égaux à F_1 et F_2 et directement opposés. En valeur absolue, l'effort sur le gond A sera 25^{kg}, l'effort sur B, $\sqrt{(25)^2 + (100)^2} = 25\sqrt{17} = 103^{kg},8$.

2° Désignons par T la traction à exercer sur la porte pour la maintenir, par Q la tension de la

ficelle. Nous pouvons former le tableau des nouvelles forces avec leurs composantes et les coordonnées de leurs points d'application :

F	X	Y	Z	x	y	z
F_1	X_1	Y_1	0	0	0	0
F_2	X_2	Y_2	Z_2	0	0	-2
Q	$-10\sin\frac{\theta}{2}$	$-10\cos\frac{\theta}{2}$	0	1	0	0
T	0	T	0	1	0	-1
P	0	0	-100	$\frac{1}{2}$	0	-1

Les conditions d'équilibre seront

$$\Sigma X = X_1 + X_2 - 10\sin\frac{\theta}{2} = 0, \qquad \Sigma Y = Y_1 + Y_2 - 10\cos\frac{\theta}{2} + T = 0, \qquad \Sigma Z = Z_2 - 100 = 0,$$

$$\Sigma(yZ - zY) = 2Y_2 + T = 0, \qquad \Sigma(zX - xZ) = -2X_2 + 50 = 0, \qquad \Sigma(xY - yX) = -10\cos\frac{\theta}{2} + T = 0.$$

On en tire facilement

$$T = 10\cos\frac{\theta}{2}, \qquad X_2 = 25, \qquad Y_2 = -\frac{T}{2} = -5\cos\frac{\theta}{2}, \qquad Z_2 = 100,$$

$$X_1 = -X_2 + 10\sin\frac{\theta}{2} = -5\left(5 - 2\sin\frac{\theta}{2}\right), \qquad Y_1 = -Y_2 = +5\cos\frac{\theta}{2},$$

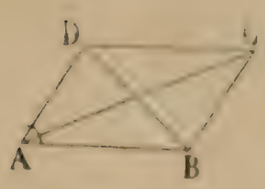
et

$$F_1 = 5\sqrt{26 - 20\sin\frac{\theta}{2} + 3\sin^2\frac{\theta}{2}}, \qquad F_2 = 5\sqrt{425 + \cos^2\frac{\theta}{2}}.$$

Les efforts sont exprimés en kg. CH. PACÉ, à bord de la *Ville d'Ys*.

Bonnes solutions de MM. Paul BERNARD, à Paris; J. CONTE, à Espalion; DODAT, à la Ferté, Allier; R. DUFOUR, école primaire supérieure de Givet; L. GAUTHIER, conducteur des Ponts et Chaussées, à Craponne, Haute-Loire; R. HEINEMANN, instituteur à Levallois; M. LABRO, à Villefranche; H.-L. MENNESSIER, à Evreux; André TENOT et PIGNON, Arts et Métiers, 2e D, Angers.

2343. — *Dans un parallélogramme* ABCD *on donne l'angle* A, *le périmètre* $2p$ *et le rapport des diagonales* $\frac{AC}{BD} = k$.



Calculer les côtés, la surface et le sinus de l'angle des diagonales du parallélogramme. Discuter.

Posons $AB = x$, $AD = y$, nous aurons immédiatement

$$x + y = p, \tag{1}$$

avec

$$\frac{x^2 + y^2 + 2xy\cos A}{x^2 + y^2 - 2xy\cos A} = k^2, \tag{2}$$

puisque $\overline{AC}^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos A$ et $\overline{BD}^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos A$.

Cette équation (2) peut s'écrire

$$k^2 = \frac{(x+y)^2 - 4xy\sin^2\frac{A}{2}}{(x+y)^2 - 4xy\cos^2\frac{A}{2}} = \frac{p^2 - 4xy\sin^2\frac{A}{2}}{p^2 - 4xy\cos^2\frac{A}{2}},$$

d'où l'on déduit

$$xy = \frac{p^2}{4}\cdot\frac{k^2 - 1}{k^2\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}}.$$

x et y sont donc les racines de l'équation du second degré

$$X^2 - pX + \frac{p^2}{4} \cdot \frac{k^2 - 1}{k^2 \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}} = 0. \qquad (3)$$

Nous supposerons A aigu et, par conséquent, $k > 1$.

Les valeurs de x et y doivent être : 1° réelles; et 2° positives, ce qui exige que l'on ait

$$1 < k < \operatorname{cotg}\frac{A}{2}.$$

Désignant par S la surface du parallélogramme, par m et n les deux diagonales ($AC = m$, $BD = n$) et par θ l'angle de ces diagonales, nous aurons

$$S = xy \sin A = \frac{1}{2} mn \sin\theta,$$

d'où

$$S = \frac{p^2}{4} \cdot \frac{(k^2 - 1)\sin A}{k^2 \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}},$$

$$m^2 = p^2 - 4xy \sin^2\frac{A}{2} = p^2 - p^2 \frac{(k^2 - 1)\sin^2\frac{A}{2}}{k^2 \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}} = \frac{p^2 k^2 \cos A}{k^2 \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}},$$

$$n^2 = p^2 - 4xy \cos^2\frac{A}{2} = p^2 - p^2 \frac{(k^2 - 1)\cos^2\frac{A}{2}}{k^2 \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}} = \frac{p^2 \cos A}{k^2 \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}},$$

et

$$\sin\theta = \frac{k^2 - 1}{2k} \operatorname{tg} A.$$

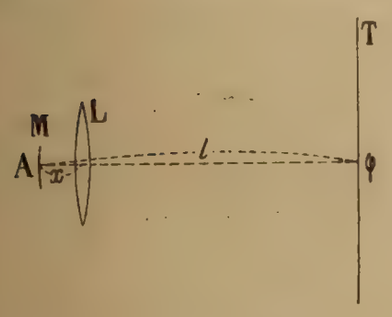
En résolvant l'équation (3), on trouve

$$\frac{x}{y} = \frac{p}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{\cos^2\frac{A}{2} - k^2 \sin^2\frac{A}{2}}{k^2 \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}}}\right).$$

P. L.

Bonnes solutions de MM. Dodat, à la Ferté, Allier; G. Lach, à Douai; L. Long, à Châtellerault; H.-L. Mennessier, à Évreux.

2345. — *Devant un petit miroir sphérique concave* M *mobile autour d'un axe vertical* A, *on place une règle* T *rectiligne, horizontale, graduée, sur laquelle on cherche à obtenir l'image nette d'un filament lumineux, rectiligne et vertical d'une lampe électrique fixée dans le plan de la règle et mobile avec elle.*



1° Si r est le rayon de courbure du miroir, on demande à quelle distance du miroir il faut placer la règle pour obtenir, sur elle, une image nette du filament, l'axe optique horizontal du miroir étant supposé perpendiculaire à la règle qu'il rencontre à la hauteur du filament.

Que peut-on observer sur la règle si le miroir tourne?

2° La longueur de la table sur laquelle doit être faite toute l'installation ne permet d'éloigner la règle du miroir qu'à une distance l insuffisante pour obtenir une image nette; on interpose alors entre le miroir et la règle, pour obtenir sur celle-ci une image nette du filament, une large lentille convergente de longueur focale f, à distance x du miroir; on demande d'établir la relation qui existe entre les longueurs f, r, l et x quand l'image est nette.

Application numérique : $r = 2^m$, $l = 0^m,80$, $f = 1^m,20$.

3° *Dans la relation entre f, r, l et x, si r et l sont donnés et si $l < r$, f est fonction de x; on tracera la courbe figurative de cette fonction en portant f en ordonnée et x en abscisse; on tracera en traits pleins la région de la courbe qui correspond à des solutions réalisables expérimentalement sur la table donnée et en pointillé les régions de la courbe correspondant à des solutions purement mathématiques.*

Parmi les valeurs de x qui correspondent à des solutions réalisables, dire celles qu'il est préférable d'adopter et celles qu'il faut rejeter au point de vue expérimental et en donner les motifs.

1. L'image du filament devant coïncider avec le filament lui-même, celui-ci doit être au centre du miroir, donc à une distance r.

Si le miroir tourne d'un angle α, le rayon réfléchi au sommet du miroir tourne d'un angle double et l'image se déplace sur la règle de la quantité $r \operatorname{tg} \alpha$, mais elle ne reste nette que pour de petits déplacements.

2. Les rayons issus du filament doivent revenir sur eux-mêmes pour former une image dans le plan de la règle. Il faut donc qu'après avoir traversé la lentille ils tombent normalement sur le miroir, ou que le centre de celui-ci soit conjugué du filament par rapport à la lentille, ce qui fournit immédiatement la relation

$$\frac{1}{l-x} - \frac{1}{r-x} = \frac{1}{f}$$

ou

$$x^2 - (r+l)x + rl - fr + fl = 0.$$

L'application numérique $r = 2$, $l = 0,8$ et $f = 1,2$ donne

$$x^2 - 2,8x + 0,16 = 0,$$

équation dont les deux racines sont $x' = 0,06$ et $x'' = 2,74$.

La première valeur convient à la question, mais non la seconde, puisqu'elle est supérieure à 0,8. La signification physique de cette seconde valeur est la suivante. Si la lentille, placée à $2^m,74$ du miroir, recevait de droite à gauche de la lumière convergeant vers le point φ, celui-ci, jouant le rôle d'objet virtuel, donnerait une image réelle située au centre du miroir. Au retour, la lumière, repassant d'abord par le centre du miroir, donnerait ensuite dans la lentille une image virtuelle située en φ.

3. L'équation, résolue par rapport à f, devient

$$f = \frac{x^2 - (r+l)x + rl}{r-l} = \frac{(x-l)(x-r)}{r-l}$$

et représente une parabole à axe vertical, qui rencontre l'axe des x aux points d'abscisses l et r, et l'axe des f au point d'ordonnée $\frac{rl}{r-l}$. Avec les valeurs numériques ci-dessus, les points remarquables ont pour coordonnées : $x = 0$, $f = \frac{3}{4}$; $x = 0,8$, $f = 0$; $x = 2$, $f = 0$; $x = 1,4$, $f = -0,3$ (sommet).

Seule, la région BD, correspondant à des valeurs de x positives et inférieures à l, donne des solutions réalisables. Mais si x était voisin de l, f serait très petit, la lentille de petit diamètre; si le miroir tournait, le faisceau réfléchi donnerait une mauvaise image ou pourrait même ne pas rencontrer la lentille. Il ne faut pas non plus que x soit trop petit : la lentille pourrait empêcher le miroir de tourner. Les valeurs moyennes sont donc celles qu'il est préférable d'adopter.

2346. — *Dans un eudiomètre, à* 20^{cm^3} *d'un gaz composé d'hydrogène, de carbone et d'azote, que nous désignerons par* A, *on ajoute* 30^{cm^3} *d'oxygène.*

Une étincelle provoque une combustion; de la vapeur d'eau se condense et le gaz sec qui reste dans l'eudiomètre a pour volume 35^{cm^3}.

Dans ce gaz, la potasse absorbe 20^{cm^3} *d'anhydride carbonique.*

Au gaz restant on ajoute 25^{cm^3} *d'hydrogène, on fait passer une étincelle, et de l'eau se condense. Le volume restant, formé d'hydrogène et d'azote, est de* 25^{cm^3}.

1° *Quelle est la formule moléculaire du corps* A?

2° *Quelles sont les formules des diverses réactions ainsi réalisées?*

3° *Les expériences décrites suffisent-elles pour établir que* A *ne contient que de l'hydrogène, du carbone et de l'azote?*

1. La première combustion ayant produit un volume d'anhydride carbonique égal au volume du gaz essayé, une molécule de celui-ci produit en brûlant une molécule d'anhydride carbonique et contient, par conséquent, *un atome de carbone.*

Après l'absorption de l'anhydride carbonique, il reste 15^{cm^3} de gaz et le mélange de ce gaz avec 25^{cm^3} d'hydrogène permet une nouvelle combustion qui ramène le volume à 25^{cm^3} et produit, par conséquent, une contraction de 15^{cm^3}.

Le tiers de cette contraction, soit 5^{cm^3}, représente le volume de l'oxygène contenu dans le premier résidu. Celui-ci contenait donc $35 - 20 - 5 = 10^{cm^3}$ d'azote, ce qui correspond, pour la molécule du gaz analysé, à *un atome d'azote.*

Enfin, sur les 30^{cm^3} d'oxygène ajoutés au début, 5 se retrouvent dans le premier résidu, 20 ont été transformés en anhydride carbonique; donc les 5 restants ont dû brûler 10^{cm^3} d'hydrogène, ce qui représente, pour une molécule de A, *un atome d'hydrogène.*

La formule du composé A est donc CAzH, c'est l'acide cyanhydrique.

2. La première combustion se formule, en supposant le volume moléculaire représenté par 10^{cm^3},

$$2CAzH + 3O^2 = 2CO^2 + Az^2 + H^2O + \frac{1}{2}O^2.$$

L'absorption de l'anhydride carbonique par la potasse produit du carbonate neutre :

$$CO^2 + 2KOH = CO^3K^2 + H^2O.$$

Enfin la seconde combustion sera représentée par l'équation

$$\frac{1}{2}O^2 + \frac{5}{2}H^2 + Az^2 = H^2O + \frac{3}{2}H^2 + Az^2.$$

3. Les expériences décrites ne suffisent pas pour établir que A ne contient que de l'hydrogène, du carbone et de l'azote. Par exemple si, en outre de ces trois éléments, A contenait de l'oxygène, ce supplément d'oxygène se changerait, dans la première expérience, en vapeur d'eau ou en gaz carbonique. Cela ne changerait rien aux conclusions relatives au carbone et à l'azote, mais les volumes d'hydrogène et d'oxygène contenus dans le gaz seraient indéterminés.

Les expériences ne permettraient pas non plus de reconnaître la présence d'un élément qui, comme le silicium ou le phosphore, donnerait en brûlant un produit fixe, ni d'un élément qui, comme le chlore, pourrait rester libre, du moins en partie, ou compliquer les combustions.

On aurait une vérification de la composition trouvée si, connaissant les densités, on vérifiait que le poids du gaz employé est bien la somme des poids des éléments dont la proportion a été évaluée.

Bonne solution de M. Ch. Pacé, à bord de la *Ville d'Ys*.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1920)

ÉCOLE CENTRALE (*Suite*).

10543. — Définir les fonctions hyperboliques; leurs relations avec les fonctions circulaires et inversement. Partant de l'expression de $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$, en déduire l'expression de $\operatorname{sh} 3x$ en fonction de $\operatorname{sh} x$.

— **544.** — Définir $\operatorname{sh}(x+iy)$. On considère les deux courbes

$$\cos y \operatorname{sh} x = a, \qquad \sin y \operatorname{ch} x = b;$$

montrer qu'en un point commun, ces deux courbes sont orthogonales.

— **545.** — Calculer $\operatorname{th}\left(\varepsilon + i\frac{\pi}{2}\right)$.

— **546.** — Démontrer que $x^{3a+2} + x^{3b+1} + x^{3c}$, où a, b, c sont trois nombres entiers et positifs, est toujours divisible par $x^2 + x + 1$.

— **547.** — Qu'appelle-t-on équation transformée d'une équation donnée? On donne l'équation $x^3 + px + q = 0$: former l'équation aux inverses, puis l'équation aux carrés des racines de cette équation.

— **548.** — Discuter les équations $x^4 + x + a = 0$, $x^4 - 4ax + b = 0$.

— **549.** — Condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $x^3 + px + q = 0$ ait ses trois racines réelles et distinctes.

— **550.** — On considère l'équation $e^x - x - m = 0$. Trouver le nombre des racines réelles suivant la valeur de m; démontrer que si x' désigne une racine négative de cette équation $x' + m$ tend vers 0 quand m tend vers $-\infty$.

— **551.** — Étude de l'équation $x = \varphi(x)$; application à $x = a \sin x$ $(a < 1)$.

— **552.** — Résoudre par approximations successives l'équation $x = t + e \sin x$, en supposant e compris entre 0 et 1, t étant un nombre donné.

— **553.** — Nombre des racines de l'équation $x = 3 + \frac{1}{2}\sin x$.

— **554.** — Calculer la plus petite racine de l'équation $x = 2 + \frac{1}{3}\cos x$ par la méthode des approximations successives.

— **555.** — Étudier l'équation $x = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{th} x$ par la méthode graphique, puis lui appliquer la méthode des approximations successives.

— **556.** — Racines réelles de l'équation $e^x = \frac{4}{x}$. Valeurs approchées de la racine.

— **557.** — Résoudre l'équation $\frac{1}{\cos\omega} = ke^{m\omega}$. Que peut-on dire sur le calcul de la plus petite racine?

— **558.** — Appliquer la méthode des approximations successives à l'équation $x = a \sin x$. On donne un cercle de rayon R, déterminer une corde AB, par l'angle au centre correspondant, telle qu'elle détache du cercle une aire donnée πr^2.

— **559.** — Résoudre l'équation $x^{1-x} = y^{1-y}$.

— **560.** — Qu'est-ce qu'une différentielle totale? Montrer que l'expression $P\,dx + Q\,dy$ n'est pas en général une différentielle totale (P et Q sont des fonctions de x et de y). Quelle est la condition pour que cette expression soit une différentielle totale?

— **561.** — Valeur moyenne d'une fonction dans un intervalle donné. Valeur moyenne du rayon vecteur, issu d'un foyer, dans une demi-ellipse.

— **562.** — Valeur approchée d'une intégrale définie par la méthode des trapèzes.

— **563.** — Expliquer le procédé d'intégration par changement de variable. Cas où l'intégrale à calculer contient un radical du deuxième degré, la quantité sous le radical étant un trinome du second degré.

— **564.** — Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{x^3}{x^4+1}$ et en déduire la valeur de l'intégrale $\int \frac{x^3\,dx}{x^4+1}$. Peut-on faire le calcul plus simplement?

— **565.** — Calculer les intégrales :

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^2}, \quad \int \frac{dx}{3+5x^2}, \quad \int \frac{dx}{x^2+x+1}, \quad \int \frac{dx}{x^4-1}, \quad \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}, \quad \int \frac{dx}{(3+5x^2)^2},$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}, \quad \int \frac{dx}{x^4+x^2+1}, \quad \int \frac{(3x+1)\,dx}{x^2+x+1}, \quad \int \frac{x^n\,dx}{x^2+1} \text{ (distinguer suivant la parité de } n\text{)},$$

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx, \quad \int \sqrt{3+x^2}\,dx, \quad \int \frac{(x-a)\,dx}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{x^2+1}}.$$

10566. — Calculer les intégrales :

$$\int \frac{dx}{\cos x}, \quad \int \frac{dx}{2\cos x - 1}, \quad \int \frac{dx}{a + b\cos x}, \quad \int \frac{dx}{(2+\cos x)^2}, \quad \int \frac{dx}{3+\sin^2 x},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}, \quad \int \operatorname{tg}^3 x . dx, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} b}, \quad \int \frac{dx}{1 - \cos\alpha . \cos x}, \quad \int \frac{\cos 3x}{\cos 2x} dx,$$

$$\int \cos mx . \cos px dx, \quad \int \frac{dx}{3 + 5\operatorname{sh}^2 x}, \quad \int \frac{dx}{3\operatorname{ch}^2 x - 1}, \quad \int \frac{dx}{1+e^x}, \quad \int \sin x e^x dx, \quad \int \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arc\,tg} x dx,$$

$$\int x^n \operatorname{arc\,tg} x dx, \quad \int e^{\arcsin x} dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\cos 2x}\, dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{L}x}{(x+1)^p} dx.$$

— **567.** — Évaluer géométriquement l'aire d'une ellipse.

— **568.** — On donne une hyperbole rapportée à ses axes; déterminer l'abscisse d'une sécante perpendiculaire à l'axe transverse, telle que l'aire comprise entre l'arc sous-tendu et sa corde ait une valeur donnée k^2.

— **569.** — On donne un cône de révolution d'angle α connu. On le coupe par un plan parallèle au plan tangent au cône le long de la génératrice SA. Trouver le plan coupant le cône suivant la parabole de surface maximum.

— **570.** — Représentation des fonctions hyperboliques par l'aire d'un secteur. Analogies avec les fonctions circulaires.

— **571.** — Aire de la cissoïde $y^2 = \frac{x^3}{1-x}$; aire comprise entre la cissoïde droite et son asymptote.

— **572.** — Construire la courbe $y = 80\frac{x^{\frac{2}{3}} - 1}{x^2 + 80}$; calculer l'aire limitée par la courbe, l'axe des x et deux ordonnées quelconques.

— **573.** — Étudier les variations de la fonction $y = \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{x}$, puis calculer $\int_1^{+\infty} y dx$. Même question pour $y = \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{x^2}$.

— **574.** — Soit la courbe $y^2 = x^3$; au point M d'abscisse x_0 on mène la tangente, qui rencontre la courbe en un second point A; calculer l'aire OAM limitée par la courbe et la tangente.

— **575.** — Construire la courbe $y = x^2 + \frac{1}{x}$. Démontrer que l'aire du trapèze formé par la tangente en un point de la courbe, l'axe des y, l'axe des x et l'ordonnée du point de contact est constante. Inversement, trouver toutes les courbes jouissant de cette propriété.

— **576.** — Aire d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires. Appliquer aux courbes suivantes : $\rho = 1 + \cos\omega$; $\rho = 2 + \cos\omega$; $\rho = \sqrt{\cos 2\omega}$; $\rho^2 = \frac{\sin\omega . \cos\omega}{\sin^4\omega + \cos^4\omega}$.

— **577.** — De quel ordre est la différence entre l'arc et la corde par rapport à l'infiniment petit principal Δx? Application à la parabole $y^2 = 2px$.

— **578.** — Construire la courbe $y^2 = 2x^3$; calculer la longueur de l'arc; relation entre la longueur de l'arc et la longueur de la tangente.

— **579.** — On trace la courbe $y = e^x$ et deux tangentes TM et T'M'; démontrer que $\mathrm{T'M'} - \mathrm{TM} - \mathrm{arc\,MM'} = \mathrm{L}\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha'}{2}}\right|$, en désignant par α et α' les angles que font avec Ox les tangentes TM et T'M'.

— **580.** — Soit la courbe $y = \mathrm{L}(x^2 - 1)$; la construire et la rectifier. Exprimer la longueur de l'arc MM' en fonction des longueurs AP, AP', BP, BP' (on désigne par P et P' les projections sur Ox des points M et M', A et B sont les points de l'axe des x qui ont pour abscisses ± 1).

— **581.** — Construire les courbes $y = \mathrm{L}(x + \sqrt{x^2 - 1})$ et $z = \mathrm{L}(x - \sqrt{x^2 - 1})$; que représente l'ensemble des deux courbes? Rectifier la première.

— **582.** — Arc de la courbe $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$.

— **583.** — Longueur de la cycloïde.

— **584.** — Développante de cercle. Expression des coordonnées d'un point. Longueur de l'arc.

— **585.** — Calculer l'arc de la courbe $x = t\operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t$, $y = t\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t$.

— **586.** — On considère un tonneau dont la hauteur est $2h$, le rayon le plus grand est R et le rayon du fonds r. Trouver une expression du volume en considérant le tonneau comme fragment d'un ellipsoïde de révolution.

— **587.** — Équation de la cissoïde. Volume engendré par la surface comprise entre la cissoïde et son asymptote, quand la courbe tourne autour de son asymptote.

— **588.** — Comment peut-on évaluer un volume tel que l'aire de sa section par un plan de cote z soit une fonction connue de z? Étant donné un solide satisfaisant à la condition précédente, on le coupe par deux plans variables, de distance constante h; déterminer la cote de façon que la portion de solide contenue entre ces deux plans ait le plus grand volume possible.

10589. — On considère un prisme triangulaire droit, ABCA'B'C', qui repose sur le plan horizontal, H; on considère la diagonale AB'. Une droite MN s'appuie sur AB et sur CC' en restant parallèle à H. Quelle est la surface engendrée par MN? Évaluer le volume en arrière entaillé par cette surface.

— **590.** — Aire de l'ellipsoïde de révolution, du paraboloïde de révolution.

— **591.** — Aire engendrée par un arc d'hyperbole équilatère $xy = 1$, en tournant autour d'une asymptote.

— **592.** — On donne la courbe $y = \operatorname{ch} x$; trouver le centre de gravité d'un arc MM' de cette courbe, puis le centre de gravité de l'aire comprise entre l'arc MM', l'axe des x et les ordonnées des points M et M'. Ces deux points ont même abscisse que le point de rencontre des tangentes à la courbe en M et M'.

— **593.** — Centre de gravité d'un arc de la courbe $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$. Même question pour la courbe $x = \operatorname{ch}^3 t$, $y = \operatorname{sh}^3 t$.

— **594.** — Centre de gravité d'un arc de la courbe $x = a \operatorname{ch}^4 t$, $y = b \operatorname{sh}^4 t$.

— **595.** — Centre de gravité d'un arc de parabole, puis centre de gravité de l'aire.

— **596.** — On donne l'hyperbole équilatère $xy = a^2$ et on marque les ordonnées P_0M_0, P_1M_1 correspondant aux abscisses x_0 et x_1; trouver le centre de gravité de l'aire $M_0P_0P_1M_1$.

— **597.** — Aire de la courbe $y = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{1 + x^2}$, puis centre de gravité de cette aire.

— **598.** — Centre de gravité de l'aire comprise entre la cycloïde et sa base.

— **599.** — Centre de gravité de l'aire de la cardioïde.

— **600.** — Moment d'inertie d'une sphère par rapport à son centre; par rapport à un de ses diamètres.

— **601.** — Moment d'inertie d'un cylindre de révolution par rapport à son axe; calcul du rayon de giration.

— **602.** — Moment d'inertie d'un cône de révolution par rapport à son axe; rayon de giration.

— **603.** — Moment d'inertie d'un ellipsoïde de révolution par rapport à son axe.

— **604.** — Moment d'inertie d'un parallélépipède rectangle par rapport à son axe.

— **605.** — Moment d'inertie d'un cylindre elliptique par rapport à son axe.

— **606.** — Moment d'inertie d'une ellipse : 1° par rapport à l'un de ses axes de symétrie; 2° par rapport à un diamètre quelconque.

(*A suivre.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

2304. — On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy, deux points A et B sur Oy ayant pour ordonnées $\pm a$ ($a > 0$), et un point C sur Ox ayant pour abscisse $-\dfrac{a}{2}$.

1° Former l'équation de la parabole passant par les points A et B, dont l'axe passe par le point C et a pour pente t.

2° On fait varier t. Trouver l'enveloppe de la tangente au sommet, le lieu du point de rencontre des tangentes en A et B et le lieu du foyer.

3° Montrer que la parabole est tangente au cercle décrit sur AB comme diamètre. Outre la tangente au point de contact, les deux courbes admettent deux autres tangentes communes; trouver le lieu du point de rencontre de ces tangentes. G. P.

2305. — On considère toutes les coniques ayant pour axes deux droites rectangulaires, Ox et Oy, et passant par un point fixe A dont les coordonnées sont a et b.

1° Trouver le lieu du milieu de la portion de la tangente au point A à chacune d'elles et comprise entre les axes Ox et Oy.

2° Trouver le lieu de l'extrémité du diamètre conjugué de OA.

3° Trouver le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du sommet situé sur Ox sur la tangente en A.

4° Il y a deux coniques de ce faisceau tangentes à une droite D aux points M et M'. Trouver le lieu de milieu de MM' quand la droite D pivote autour d'un point fixe x_0, y_0. E. B.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

Coulommiers. — Imp. PAUL BRODARD.

31e Année. Mai 1921. N° 8.

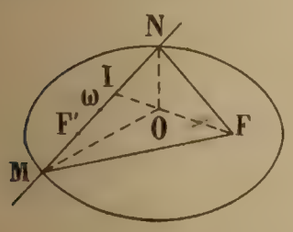
REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Note de la Rédaction. — Ne seront pas publiées : les solutions des questions 2483, 2491, 2496.

PREMIÈRE PARTIE

GÉOMÉTRIE

2355. — *Le pôle normal d'une corde focale d'une ellipse est situé sur la parallèle au grand axe menée par le milieu de cette corde.*



Soient F, F′ les foyers de l'ellipse et la corde focale MN, qui passe par le point F′; les normales en M et N sont les bissectrices des angles NMF et MNF. Elles se coupent au pôle normal O, et FO est la bissectrice de l'angle MFN.

Par suite, si on désigne par I le point de rencontre de FO et de MN, on a

$$\frac{FN}{IN} = \frac{FM}{IM} = \frac{FM - FN}{IM - IN}.$$

Or $FM + F'M = FN + F'N$ ou $FM - FN = F'N - F'M = 2F'\omega$, ω étant le milieu de MN; de même $IM - IN = 2I\omega$.

On a donc

$$\frac{FN}{IN} = \frac{FM}{IM} = \frac{F'\omega}{I\omega}.$$

Mais, dans le triangle IMF, on a aussi

$$\frac{FM}{IM} = \frac{FO}{IO}, \qquad \text{donc} \qquad \frac{FO}{OI} = \frac{F'\omega}{I\omega},$$

et ceci montre que $O\omega$ est parallèle à FF′.

P. VASSEUR, lycée de Rouen.

Bonnes solutions analytiques et géométriques par MM. Guillauton, à Lesvellec (Morbihan); G. Lach, à Douai; M., à Guéret; M. N., à Toulouse; G. Roy, à Paris.

2356. — *Trouver le lieu des axes des cônes circonscrits à une famille de quadriques homofocales et ayant pour sommet un point donné.*

On sait que les axes des cônes circonscrits de sommet S à une famille de surfaces homofocales sont les normales en S aux trois surfaces de la famille qui passent par ce point. Il n'y a donc pas de lieu, tous les cônes circonscrits ont les mêmes axes.

P. VASSEUR, lycée de Rouen.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2354. — *Transformer homographiquement et démontrer la propriété suivante : lorsque deux coniques, l'une inscrite dans un triangle, l'autre circonscrite au même triangle, sont tangentes l'une à l'autre, la corde commune à ces coniques, associée à la tangente au point où elles se touchent, passe par un point fixe.*

Si les deux coniques sont variables, le triangle étant fixe, la propriété énoncée n'est pas exacte; on peut montrer en effet que la corde commune envisagée peut occuper une position quelconque (Δ) dans le plan.

Soit en effet une conique quelconque (γ) inscrite dans le triangle donné ABC et rencontrant la droite (Δ) aux deux points D et E. Par les cinq points A, B, C, D, E passe une conique (γ'), et les équations des deux coniques dépendent de deux paramètres, puisque (γ) est choisie arbitrairement. On peut alors déterminer ces paramètres de façon que la corde commune associée à (Δ) soit tangente à l'une des coniques : cela ne donnera même qu'une relation entre les deux paramètres.

La propriété est vraie dans le cas particulier où la conique inscrite est fixe.

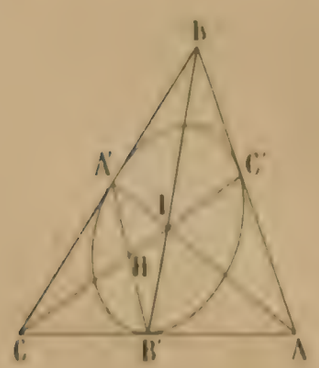
Pour le démontrer, nous faisons une transformation homographique telle que les points A et B se transforment en les points cycliques. La conique inscrite au triangle ABC devient alors une parabole qui a pour foyer le point F, transformé du point C, et la conique circonscrite est un cercle passant par le point F.

La parabole étant fixe, nous pouvons la définir par l'équation habituelle $y^2 - 2px = 0$; la tangente en un point M de cette courbe a pour équation $y - mx - \frac{p}{2m} = 0$. Un cercle tangent en M à cette parabole la rencontre en deux autres points P et Q, tels que la droite PQ ait pour pente $-m$. L'équation du cercle sera de la forme

$$\lambda(y^2 - 2px) + \left(y - mx - \frac{p}{2m}\right)(y + mx + \mu) = 0.$$

Écrivons que cette équation représente un cercle passant par le foyer $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, nous obtenons

$$\lambda = -(m^2 + 1), \qquad \mu = \frac{3pm}{2}.$$



Par suite, la corde PQ a pour équation

$$y + m\left(x + \frac{3p}{2}\right) = 0;$$

elle passe par le point fixe $\left(-\frac{3p}{2}, 0\right)$ qui est le symétrique du foyer par rapport à la directrice.

Si l'on revient à la première figure, l'axe de la parabole devient la droite CC', la directrice devient AB'; le symétrique du foyer par rapport à la directrice est alors le point I, conjugué harmonique de C par rapport à H et C' : c'est le point de rencontre des trois droites AA', BB', CC'.

Donc le point fixe est le point I.

P. VASSEUR, lycée de Rouen.

Solution analogue par M. Gaston Roy.

2372. — *On considère un point* M *variable sur une ellipse et le cercle* MFF′ *passant par le point* M *et les deux foyers.*

1° *La parallèle au grand axe menée par le centre du cercle coupe ce cercle en deux points dont le lieu est une hyperbole équilatère.*

2° *Le lieu de l'orthocentre de ce triangle est une quartique ayant deux points doubles. Évaluer l'aire de la boucle comprise entre les deux points doubles et celles comprises entre la courbe et ses asymptotes.*

1. Le point M n'intervient pas dans la première partie; le cercle envisagé n'est pas autre chose qu'un cercle quelconque passant par les deux foyers de l'ellipse. Si donc nous prenons pour équation de l'ellipse l'équation habituelle,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \qquad a^2-b^2=c^2,$$

ce cercle aura pour équation

$$x^2+y^2-2\lambda y-c^2=0,$$

λ étant un paramètre arbitraire.

La parallèle au grand axe menée par le centre de ce cercle a pour équation

$$y-\lambda=0,$$

et le lieu des points de rencontre avec le cercle s'obtient en remplaçant λ par y dans l'équation du cercle; ce lieu est l'hyperbole équilatère

$$x^2-y^2-c^2=0.$$

2. Les trois sommets du triangle MFF′ ont pour coordonnées : $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$; c, 0; $-c$ et 0. L'une des hauteurs est la parallèle au petit axe, $x-a\cos\varphi=0$; l'une des autres hauteurs est la perpendiculaire abaissée du point F sur le côté MF′; or le coefficient angulaire de MF′ est $\frac{b\sin\varphi}{a\cos\varphi+c}$; donc la hauteur envisagée a pour équation

$$y=-\frac{a\cos\varphi+c}{b\sin\varphi}(x-c).$$

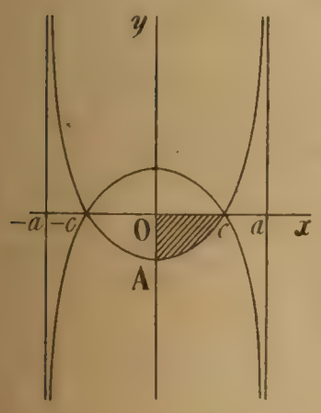
Nous aurons le lieu en éliminant φ entre les équations de ces deux hauteurs; ce calcul donne successivement

$$by\sin\varphi+x^2-c^2=0, \qquad b^2y^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=(x^2-c^2)^2,$$

finalement

$$b^2y^2(a^2-x^2)=a^2(x^2-c^2)^2.$$

Cette courbe est une quartique ayant pour axes de symétrie les deux axes de coordonnées et pour points doubles les deux foyers.



Pour construire cette courbe, nous calculerons y,

$$y=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\frac{x^2-c^2}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

nous prendrons la détermination positive du radical et nous ferons varier x de 0 à a; y sera négatif de 0 à c, et positif de c à a; la dérivée, y', est toujours positive dans l'intervalle $(0, a)$,

$$y'=\frac{ax}{b}\cdot\frac{2a^2-x^2}{(\sqrt{a^2-x^2})^3},$$

et la fonction y croît d'abord de $-\frac{c^2}{b}$ à 0, puis, de 0 à $+\infty$; il n'y a plus qu'à tracer cette portion de courbe et achever par symétrie.

Pour avoir l'aire de la boucle, nous calculerons l'aire du triangle curviligne OAC et nous multiplierons le résultat par 4. Ceci donne

$$A = 4\frac{a}{b}\int_c^a \frac{x^2 - c^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx.$$

L'intégrale indéfinie se décompose en deux :

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad \text{et} \qquad -c^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

La seconde est immédiate; c'est $-c^2 \operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a}$; pour avoir la première, nous dérivons $x\sqrt{a^2 - x^2}$, ce qui donne

$$D.x\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

en intégrant, nous obtenons

$$x\sqrt{a^2 - x^2} = a^2 \operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a} - 2\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

par conséquent,

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{2}\left(a^2 \operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a} - x\sqrt{a^2 - x^2}\right).$$

L'intégrale indéfinie annoncée est donc finalement

$$-\frac{2ax}{b}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{2a}{b}(a^2 - 2c^2)\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a},$$

en rétablissant le facteur $\frac{4a}{b}$.

Cette intégrale est nulle à la borne inférieure; l'aire A a donc pour valeur

$$-\frac{2ac}{b}\sqrt{a^2 - c^2} + \frac{2a}{b}(a^2 - 2c^2)\operatorname{arc\,sin}\frac{c}{a},$$

ou

$$-2ac + \frac{2a}{b}(a^2 - 2c^2)\operatorname{arc\,sin}\frac{c}{a}.$$

Mais, d'après les règles des signes des aires, elle est négative; donc l'aire véritable est

$$A = 2ac - \frac{2a}{b}(2c^2 - a^2)\operatorname{arc\,sin}\frac{c}{a}.$$

Pour avoir l'aire, A_1, comprise entre la courbe et les asymptotes, il suffit de prendre la même intégrale indéfinie entre les limites c et a.

Pour $x = a$, l'intégrale indéfinie prend la valeur $\frac{a}{b}(a^2 - 2c^2)\frac{\pi}{2}$; il n'y a plus qu'à retrancher la valeur qui correspond à $x = c$ ou, ce qui revient au même, ajouter A; ceci donne

$$A_1 = \frac{2a}{b}(a^2 - 2c^2)\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sin}\frac{c}{a}\right) + 2ac,$$

ou

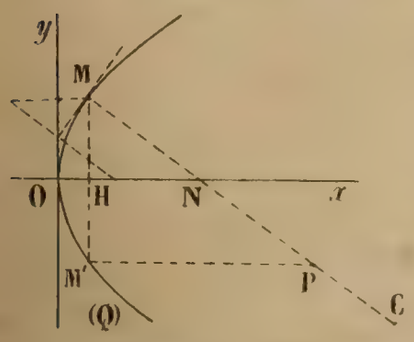
$$A_1 = \frac{2a}{b}(a^2 - 2c^2)\operatorname{arc\,cos}\frac{c}{a} + 2ac.$$

G. LACH, à Douai.

Bonnes solutions : MM. M. Vasseur, à Lille.

Assez bonnes solutions : MM. F. Lognard; M., à Guéret; Roumer; A. Hutinel, à Cannes; Tenot André, à Angers.

2373. — *Soient* M *un point d'une parabole* (Q), C *le centre de courbure et* P *le point de Frégier relatifs à ce point* M. *Trouver les lieux du point* R *qui, avec* M, C, P, *forme une division harmonique.*



Nous rapporterons la parabole à ses axes habituels et nous prendrons pour équation de cette parabole

$$y^2 - 2px = 0.$$

Représentons par $2pt$ l'ordonnée du point M; son abscisse sera $2pt^2$, et les coordonnées du point M, en fonction du paramètre t, seront

$$x = 2pt^2, \qquad y = 2pt.$$

Cela posé, parmi les cordes qui sont vues du point M sous un angle droit, il y a la normale MN, et la parallèle à l'axe menée par le point M', symétrique de M par rapport à Ox; le point de rencontre P, de ces deux droites est le point de Frégier. Or, la sous-normale, HN, est constante et égale au paramètre; la longueur M'P est donc égale à $2p$, et les coordonnées du point P sont $x = 2pt^2 + 2p$, $y = -2pt$. Le lieu de ce point est une parabole égale à la proposée obtenue en faisant subir à celle-ci une translation parallèle à l'axe et d'amplitude $2p$.

Pour avoir les coordonnées du point C, centre de courbure, nous formerons l'équation de la normale à la parabole et nous chercherons son point caractéristique. L'équation de la normale est

$$4pt(x - 2pt^2) + 2p(y - 2pt) = 0,$$

ou

$$2tx + y - 4pt^3 - 2pt = 0;$$

la dérivée par rapport à t donne

$$x = p + 6pt^2;$$

la dérivée par rapport à t, prise après avoir divisé par t, donne

$$-\frac{y}{t^2} - 8pt = 0, \qquad y = -8pt^3.$$

Les coordonnées du point C sont donc

$$x_C = p + 6pt^2, \qquad y_C = -8pt^3.$$

Appelons α et β les coordonnées du point R, et supposons que ce point soit le conjugué harmonique de M par rapport à C et P; nous aurons β en établissant la relation harmonique entre les ordonnées des quatre points; ceci nous donnera

$$2pt\beta + 16p^2t^4 - (\beta + 2pt)(-2pt - 8pt^3) = 0,$$

ou

$$\beta(4pt + 8pt^3) = -4p^2t^2 - 32p^2t^4,$$

ce qui donne

$$\beta = -\frac{pt(1 + 8t^2)}{1 + 2t^2};$$

l'x est fourni par l'équation de la normale,

$$2t\alpha = \frac{pt(1 + 8t^2)}{1 + 2t^2} + 2pt(1 + 2t^2), \qquad 2\alpha = p\frac{8t^2 + 1 + 2(1 + 2t^2)^2}{1 + 2t^2}, \qquad \alpha = p\frac{8t^4 + 16t^2 + 3}{1 + 2t^2}.$$

Les équations paramétriques du lieu du point R, dans ce cas, sont donc

$$(1) \qquad x = p\frac{8t^4 + 16t^2 + 3}{2t^2 + 1}, \qquad y = -pt\frac{(8t^2 + 1)}{2t^2 + 1}.$$

Supposons maintenant que le point R soit le conjugué harmonique du point P par rapport aux points M et C, et appelons encore α et β les coordonnées de ce nouveau point. La relation harmonique entre les y des quatre points, ceux des couples P, R et M, C, est

$$-2pt\beta - 16p^2t^4 - (\beta - 2pt)(2pt - 8pt^3) = 0;$$

elle s'écrit

$$\zeta(4pt - 8pt^3) - 4p^2t^2 + 32p^2t^3 = 0$$

et donne

$$\zeta = \frac{pt(1 - 8t^2)}{1 - 2t^2}.$$

Nous aurons α en portant dans l'équation de la normale; ceci nous donne

$$2t\alpha = 2pt(1 - 2t^2) - pt\frac{1 - 8t^2}{1 - 2t^2}, \qquad 2\alpha = p\frac{2(1 - 4t^2) - 1 + 8t^2}{1 - 2t^2} = p\frac{1 + 8t^2 - 8t^4}{1 - 2t^2}.$$

Les équations paramétriques de ce nouveau lieu sont

$$(2) \qquad x = \frac{p}{2}\cdot\frac{1 + 8t^2 - 8t^4}{1 - 2t^2}, \qquad y = \frac{pt(1 - 8t^2)}{1 - 2t^2}.$$

Cherchons enfin, pour terminer, le lieu du point R, conjugué harmonique de C par rapport aux points M et P.

La relation, dans ce cas, est

$$-8pt^3\zeta - 4p^2t^2 = 0, \qquad \text{et} \qquad \zeta = -\frac{p}{2t};$$

alors

$$2t\alpha - \frac{p}{2t} - 4pt^3 - 2pt = 0, \qquad \alpha = p\frac{1 + 4t^2 + 8t^4}{4t^2}.$$

Les équations paramétriques de ce dernier lieu sont

$$(3) \qquad x = p\frac{1 + 4t^2 + 8t^4}{4t^2}, \qquad y = -\frac{p}{2t};$$

l'équation cartésienne s'obtient immédiatement et est $px = y^2 + p^2 + \frac{p^4}{2y^2}$.

Le lieu est une courbe du quatrième degré qui admet pour asymptote l'axe des x et pour parabole asymptote la parabole.

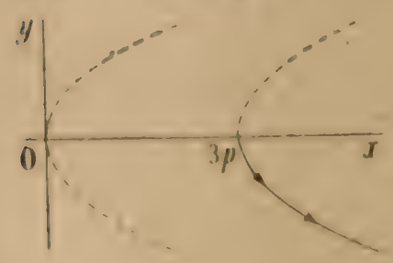
$$px = y^2 + p^2;$$

de plus, comme cela était évident *a priori*, le lieu est symétrique par rapport à Ox.

Le lecteur construira cette courbe sans peine.

Pour construire la courbe (1), nous remarquons que le changement de t en $-t$ laisse x invariable et change y en $-y$; la courbe est symétrique par rapport à Ox, ce qui était évident aussi, et, en tenant compte de cette symétrie, il suffit de faire varier t de 0 à $+\infty$.

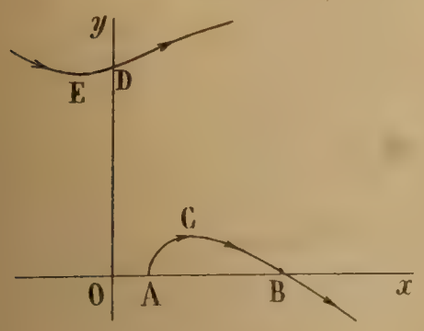
Pour $t = 0$, $x = 3p$, $y = 0$; pour $t = +\infty$, x est infini comme t^2, et y, comme $-t$; il y a une branche parabolique dans la direction Ox. En prenant les dérivées de x et de y, nous voyons de suite que x est toujours croissante et y, toujours décroissante; la première tangente est verticale, et la direction de la tangente tourne dans le sens positif. La courbe, bien qu'étant du quatrième degré, a l'aspect d'une parabole.



Pour contruire la courbe (2), nous faisons les mêmes remarques initiales; puis, nous classons les valeurs particulières de t : 0, $\frac{1}{\sqrt{8}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sqrt{\frac{2 + \sqrt{6}}{4}}$.

Pour $t = 0$ ($t = +\varepsilon$), $x = \frac{p}{2} + \varepsilon$, $y = \varepsilon$; la courbe part du point A de $Ox\left(x = \frac{p}{2}\right)$ et s'élève; pour $t = \frac{1}{\sqrt{8}}$, y devient nul (et négatif ensuite), x prend la valeur $\frac{5p}{2}$; la courbe traverse l'axe

Ox en un point B; pour $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$, x et y deviennent infinis ($x=\pm\infty$, $y=\mp\infty$), et ensuite, changent de signes tous deux; pour $t=\sqrt{\frac{2+\sqrt{6}}{4}}$, x devient nul et positif ensuite. y prend une certaine valeur positive, voisine de $7p$; et, enfin, pour $t=+\infty$, x est infini comme t^2, et y, comme t; il y a une branche parabolique, dans la direction Ox. Nous pouvons donc tracer le schéma, placé à côté.



Il nous reste à vérifier ou à modifier cette forme par l'étude des dérivées :

$$\frac{dx}{dt}=\frac{pt}{2}\cdot\frac{20-32t^2+32t^4}{(1-2t^2)^2};$$

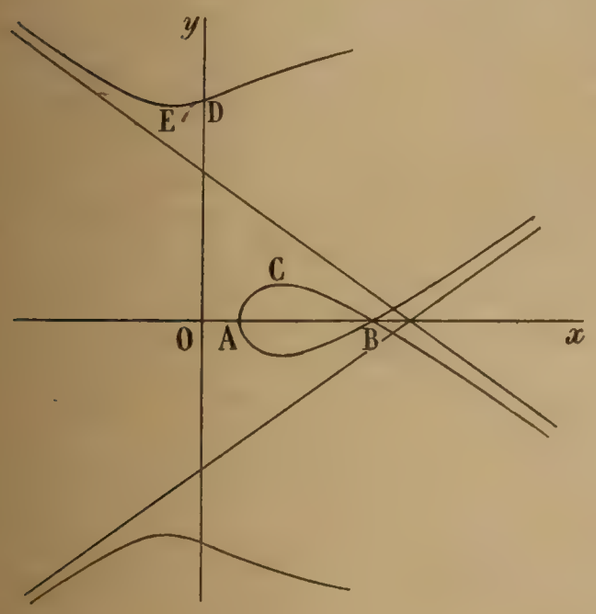
$$\frac{dy}{dt}=p\frac{(1-22t^2+16t^4)}{(1-2t^2)^2}.$$

La dérivée de x ne s'annule jamais, elle est toujours positive; la fonction x est toujours croissante.

La dérivée de y s'annule deux fois; la première valeur de t^2 est comprise entre 1 et $\frac{1}{8}$; le maximum, C, de y est compris entre A et B; la deuxième valeur de t^2 est plus grande que 1 et plus petite que $\frac{2+\sqrt{6}}{4}$; le minimum E de y a lieu avant le point D : le schéma est exact.

Il reste à trouver l'asymptote. Nous avons d'abord

$$\frac{y}{x}=\frac{2t(1-8t^2)}{1+8t^2-8t^4};$$



pour $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$, la valeur de $\frac{y}{x}$ est

$$c=\sqrt{2}\,\frac{-3}{3}=-\sqrt{2};$$

c'est le coefficient angulaire de l'asymptote. Pour avoir l'ordonnée à l'origine, nous formons

$$y-cx=y+x\sqrt{2},$$

$$y+x\sqrt{2}=p\frac{t(1-8t^2)\sqrt{2}+1+8t^2-8t^4}{(1-2t^2)\sqrt{2}},$$

$$y+x\sqrt{2}=p\frac{1+t\sqrt{2}+8t^2-8t^4\sqrt{2}-8t^4}{(1-2t^2)\sqrt{2}};$$

le numérateur est divisible par $1-t\sqrt{2}$ et $y+x\sqrt{2}$ s'écrit

$$y+x\sqrt{2}=p\frac{1+2t\sqrt{2}+12t^2+4\sqrt{2}t^3}{(1+t\sqrt{2})\sqrt{2}}$$

et prend la valeur $\frac{11p}{2\sqrt{2}}$; l'asymptote est déterminée, et, comme la courbe est une quartique, la position de la courbe par rapport à l'asymptote est évidente.

Bonnes solutions : MM. G. Lach, à Douai; A. Hutinel, à Cannes.

PHYSIQUE ET CHIMIE

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES

Concours de 1919.

2306. — *Avec un même liquide, on réalise les expériences suivantes :*

1° *Un microscope, dont l'axe est vertical, est mis au point sur l'intersection* J *de deux traits finement tracés sur un plan horizontal; puis, ayant déposé en* J *une goutte sphérique du liquide, on rétablit la mise au point par un déplacement* h *du microscope suivant son axe.*

2° *Après avoir provoqué l'accroissement de la goutte* G *par l'absorption d'une goutte voisine* G', *on perd la mise au point que l'on retrouve par un nouveau déplacement* h' *du microscope.*

3° *On enfonce l'extrémité d'un tube capillaire en verre de* a^{mm} *de diamètre dans un vase renfermant du liquide donné de masse spécifique* p *et, après avoir aspiré du liquide dans le tube pour mouiller le tube, on constate que le liquide prend une dénivellation verticale permanente* H.

4° *Un miroir plan renvoie verticalement de bas en haut la lumière provenant d'un collimateur. Cette lumière tombe sur une lentille plan-convexe* L, *faite avec un verre d'indice* N, *et obturant un tube dont l'axe est vertical; la face plane de la lentille est tournée du côté d'où vient la lumière et le rayon de la face courbe a pour mesure* r. *Ayant versé du liquide étudié dans le tube jusqu'à ce que l'image de la fente du collimateur se forme dans le plan de la surface libre du liquide, on mesure la hauteur* H_1 *de la colonne liquide ainsi obtenue.*

Déduire de là :

a) le rapport des masses des gouttes G *et* G',

b) l'indice n *du liquide et les rayons des deux gouttes* G *et* G',

c) la tension superficielle A *du liquide.*

Application numérique :

$$h = 2^{mm}; \qquad h = 0^{mm},5; \qquad p = 1,02;$$

intensité de la pesanteur, $g = 981$; $H = 6^{cm}$; $N = 1,52$; $r = 5^{cm},2$; $H_1 = 37^{cm}$.

En supposant une erreur possible de 5 microns sur les longueurs mesurées, évaluer l'ordre de grandeur des erreurs qui en résulteraient sur les résultats calculés.

1° Désignons par J' l'image du point J donnée par la goutte et remarquons qu'elle est formée par des rayons réfractés exclusivement par la face supérieure de la goutte. Soit ρ le rayon de celle-ci. Appliquons à la réfraction dans la face supérieure S la formule aux distances conjuguées

$$\frac{n_1}{p_1} - \frac{n_2}{p_2} = \frac{n_1 - n_2}{\rho}.$$

Il vient

$$\frac{n}{2\rho} - \frac{1}{SJ} = \frac{n-1}{\rho}, \qquad \text{d'où} \qquad SJ = \frac{2}{2-n}\rho \qquad \text{et} \qquad JJ' = h = \frac{2(n-1)}{2-n}\rho.$$

On en déduit

$$(1) \qquad \rho = \frac{2-n}{2(n-1)}h = kh.$$

2° De même, σ étant le rayon de la goutte après son accroissement, on a

$$\sigma = \frac{2-n}{2(n-1)}(h+h') = k(h+h'). \tag{2}$$

Soit ρ' le rayon de la goutte G′ et $x = \frac{m'}{m}$ le rapport des masses des gouttes G′ et G.

On a

$$x = \frac{\rho'^3}{\rho^3} \qquad \text{et d'autre part} \qquad \sigma^3 = \rho^3 + \rho'^3 = (1+x)\rho^3,$$

d'où, à l'aide des expressions (1) et (2),

$$1 + x = \left(\frac{h+h'}{h}\right)^3 = 1{,}953, \qquad x = 0{,}953.$$

Pour évaluer l'erreur possible, assimilons les erreurs à des différentielles et différentions l'expression de x :

$$dx = 3\left(\frac{h+h'}{h}\right)^2 \frac{h\,dh' - h'\,dh}{h^2}.$$

Faisons $dh' = -dh = 0{,}005$, on trouve

$$dx = 0.015.$$

3° Écrivons que, dans le tube capillaire, le poids du liquide soulevé est équilibré par la tension superficielle le long de la ligne de raccordement :

$$\pi a A = \pi \frac{a^2}{4} H p g.$$

Évaluons les grandeurs en unités C. G. S. :

$$a = 0{,}05, \qquad H = 6, \qquad p = 1.02, \qquad g = 981.$$

On trouve

$$A = 75.$$

Erreur possible :

$$dA = \frac{pg}{4}(a\,dH + H\,da) \qquad \text{avec} \qquad da = dH = 0^{cm}.0005.$$

On trouve

$$dA = 0{,}75.$$

4° La face plane de la lentille, recevant normalement la lumière qui vient du collimateur, ne produit pas de réfraction. L'équation générale des dioptres, appliquée à la seconde face, donne

$$\frac{n}{H_1} = \frac{N-n}{r}, \qquad \text{d'où} \qquad n = \frac{H_1}{H_1 + r} N = \frac{37}{42{,}2} \times 1{,}52 = 1{,}33.$$

Erreur possible :

$$dn = N \frac{r\,dH_1 - H_1\,dr}{(H_1 + r)^2}.$$

Faisons $dH_1 = -dr = 0^{mm}{,}005$, précision d'ailleurs invraisemblable ici. Il vient

$$dn = 1{,}52 \times \frac{1}{422} \times 0{,}005 \times 0.000018.$$

Enfin, pour avoir ρ et ρ', remplaçons d'abord dans la formule (1) n et h par leur valeur :

$$\rho = \frac{0{,}67}{0{,}66} \times 2 = 2^{mm}{,}03.$$

D'autre part, on a

$$\rho' = \sqrt[3]{x}\,\rho = 0{,}984\rho = 2^{mm}{,}00.$$

Erreur possible :

$$d\rho = dh = 0^{mm}{,}005.$$

Solution partielle de M. E. Logeard

2307. — *On traite, à chaud, par un excès d'acide chlorhydrique concentré, 3g,36 de sulfure d'antimoine. Décrire la réaction et indiquer la nature et le volume du gaz obtenu.*

On prélève 30cm³ du gaz obtenu, supposé pur, et on l'introduit dans une cloche courbe où l'on a placé un morceau d'étain. On chauffe longuement, puis on laisse refroidir.

Indiquer la nature et le volume du gaz restant.

Montrer comment cette dernière expérience permet de déterminer la composition du gaz fourni par la première expérience.

Données et renseignements numériques : Poids atomiques : Sb = 120, S = 32.

Le volume de 30cm³ a été mesuré sec à 0° et sous la pression de 760mm.

Les volumes demandés seront évalués dans les mêmes conditions.

L'action de l'acide chlorhydrique concentré sur le sulfure d'antimoine produit du chlorure d'antimoine qui reste dissous dans l'excès d'acide chlorhydrique et un dégagement d'acide sulfhydrique qui, lavé avec un peu d'eau puis desséché sur le chlorure de calcium, peut être recueilli pur sur la cuve à mercure. La réaction se formule

$$6HCl + Sb^2S^3 = 3H^2S + 2SbCl^3.$$

Cette réaction n'a lieu qu'autant que la concentration de l'acide est supérieure à HCl, 6H²O environ; vers la fin de l'expérience, on constate sur les parois du ballon un dépôt rouge orangé qui n'est autre que du sulfure d'antimoine formé par réaction inverse de l'hydrogène sulfuré qui se dégage avec le chlorure projeté sur les parois.

Un poids de sulfure représenté par Sb^2S^3, c'est-à-dire 336g, fournit 3 molécules de gaz, c'est-à-dire un volume de $3 \times 22^l,4 = 67^l,2$. Le poids donné, qui est 100 fois plus petit, fournit 672cm³.

Au contact de l'étain chauffé, le soufre de l'acide sulfhydrique se fixe sur le métal et l'hydrogène est libéré :

$$H^2S + Sn = SnS + H^2.$$

Le volume du gaz restant est donc le même que celui de l'acide sulfhydrique et, par conséquent, de 30cm³.

Inversement, la constatation de ce résultat montre que l'acide sulfhydrique contient son volume d'hydrogène et qu'une molécule d'acide contient une molécule d'hydrogène H². Un poids d'acide sulfhydrique représenté par sa densité 1,19 contient donc un poids d'hydrogène représenté par la densité de ce gaz 0,07 et, par conséquent, un poids de soufre représenté par 1,12. Or ce nombre est précisément la moitié de la densité de la vapeur de soufre à haute température, c'est-à-dire de soufre diatomique. La molécule d'acide sulfhydrique contient donc un atome de soufre et sa formule est H^2S.

PAUL LABAT, élève à l'École polytechnique.

Bonnes solutions de MM. J. BOUCHARY, A. HUTINEL, E. LOGEARD.

QUESTIONS PROPOSÉES

2506. — Un point pesant est astreint à se mouvoir sur un cercle situé dans un plan vertical et est attiré par une des extrémités, B, du diamètre horizontal proportionnellement à la distance. Il est lancé en l'autre extrémité, A, de ce même diamètre avec une vitesse v_0.

Trouver la loi des vitesses du point matériel sur le cercle et étudier sommairement le mouvement de ce point, à l'aide de cette loi. Quels sont les divers cas qui peuvent se présenter ?

Trouver les positions d'équilibre du point sur le cercle et dire si en ces points l'équilibre est stable ou instable.

Voir ce qui arrive quand la force émanant du point B est une répulsion proportionnelle à la distance.

E. H.

2507. — Une conique (Σ) est tangente à une droite (D) en un point A. Par un point, P, fixe aussi dans le plan de cette conique, on mène une sécante variable qui rencontre la conique aux deux points M et N; les tangentes en M et N coupent la droite (D) en M′ et N′.

1° Trouver le lieu du point de rencontre des droites MN′ et M′N. Montrer que ce lieu est une conique tangente à la droite (D) au point A et qui rencontre encore la conique (Σ) aux points de contact des tangentes issues de P.

2° Dire ce qui arrive lorsque le point P est sur (D) ou sur (Σ).

3° Étudier les cas particuliers où la conique (Σ) est un cercle et le point P le centre de ce cercle, où la conique (Σ) est une parabole, la droite (D) la droite de l'infini et le point P le foyer de la parabole.

R. DÉAUX, professeur à Chimay (Belgique).

2508. — Soit A_n le point de coordonnées x_n, y_n. On considère l'ensemble des points $A_0, A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ défini par un premier point $A_0(x_0, y_0)$, non situé sur un axe de coordonnées, et par les formules de récurrence

$$x_{n+1} = ax_n + by_n, \qquad y_{n+1} = cx_n + dy_n,$$

où

$$ad - bc = 1, \qquad |a + d| < 2.$$

Dans quels cas ces points sont-ils en nombre infini?

Montrer qu'ils sont alors distribués sur une courbe (Γ) sur laquelle ils forment un ensemble, dense en tout point.

Puis, en supposant les coordonnées rectangulaires, prouver que l'aire du secteur A_nOA_{n+1} limité à l'arc A_nA_{n+1} de (Γ) a la même valeur quel que soit n.

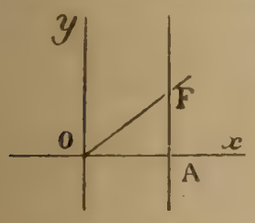
M., à Guéret.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE CENTRALE

Concours de 1917.

2357. — *Soient* Ox *et* Oy *deux axes de coordonnées rectangulaires et* AB *la droite dont l'équation, par rapport à ces axes, est* $x - a = 0$, *a étant une longueur positive donnée. A chaque point* F *de cette droite correspond une parabole* (P) *ayant pour foyer* F, *pour axe principal la droite* OF *et tangente à l'axe* Ox.



On demande de trouver, de reconnaître et de construire, le point F *décrivant* AB,

1° *le lieu du sommet* S *de* (P);

2° *le lieu du point* Q, *pied de la directrice de* (P) *sur son axe* OF;

3° *l'enveloppe de la directrice de* (P).

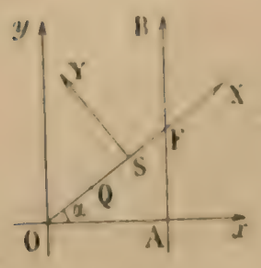
Nota. — *Les considérations géométriques seront appréciées.*

1° Prenons pour axes de coordonnées l'axe OF de la parabole et sa tangente au sommet SY. Son équation sera

$$Y^2 - 2pX = 0.$$

Posons $(\widehat{Ox, OF}) = \alpha$; on a

$$OF = \frac{a}{\cos\alpha}, \qquad OS = OF - SF = \frac{a}{\cos\alpha} - \frac{p}{2}.$$



L'équation de Ox est

$$Y = -\operatorname{tg}\alpha\left(X + \frac{a}{\cos\alpha} - \frac{p}{2}\right),$$

ou

$$X\sin\alpha + Y\cos\alpha + a\operatorname{tg}\alpha - \frac{p}{2}\sin\alpha = 0.$$

Écrivons que les coefficients $u = \sin\alpha$, $v = \cos\alpha$, $w = a\operatorname{tg}\alpha - \frac{p}{2}\sin\alpha$ satisfont à l'équation tangentielle $pv^2 - 2uw = 0$; il vient

$$p\cos^2\alpha - 2a\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + p\sin^2\alpha = 0,$$

d'où

$$p = 2a\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{et} \qquad OS = \frac{a}{\cos\alpha} - a\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = a\cos\alpha.$$

Les coordonnées du point S par rapport aux axes Ox, Oy sont donc

$$x = a\cos^2\alpha, \qquad y = a\cos\alpha\sin\alpha,$$

et le lieu de S est le cercle de diamètre OA :

$$x^2 + y^2 - ax = 0.$$

2° De même,

$$OQ = OS + \overline{QS} = a\cos\alpha - \frac{p}{2} = a\cos\alpha - a\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = a\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$$

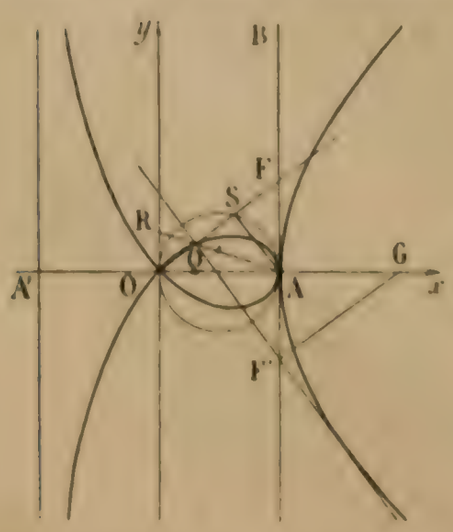
et les coordonnées du point Q sont

$$x = a\cos 2\alpha, \qquad y = a\cos 2\alpha\operatorname{tg}\alpha.$$

Éliminons α, nous obtenons l'équation cartésienne du lieu de Q :

$$x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2).$$

C'est une strophoïde droite d'axe Ox, ayant l'origine comme point double, tangente en A à la droite $x - a = 0$ et admettant la droite $x + a = 0$ pour asymptote.



3° La directrice de (P) a pour équation

$$x - a\cos 2\alpha + (y - a\cos 2\alpha\operatorname{tg}\alpha)\operatorname{tg}\alpha = 0,$$

ou

$$x + y\operatorname{tg}\alpha - a(1 - \operatorname{tg}^2\alpha) = 0.$$

Éliminons le paramètre $\operatorname{tg}\alpha$ entre cette équation et l'équation dérivée par rapport à $\operatorname{tg}\alpha$,

$$y - 2a\operatorname{tg}\alpha = 0,$$

nous obtenons l'équation de l'enveloppe :

$$y^2 = 4a(x - a).$$

C'est la parabole d'axe Ox, de sommet A et de directrice Oy.

Solution géométrique. — 1° La perpendiculaire menée par le foyer F de la parabole à la tangente Ox rencontre cette tangente en un point A situé sur la tangente au sommet. Le sommet S est donc le pied de la normale à OF issue de A et le lieu du point S est le cercle de diamètre OA.

2° Soit R l'intersection de AQ avec Oy. Nous avons QS = SF et le triangle QAF est isocèle. Il en est de même du triangle semblable QRO et OR = RQ. Le lieu du point Q est la strophoïde droite ayant O pour point double, Ox pour axe et tangente à AB au point A.

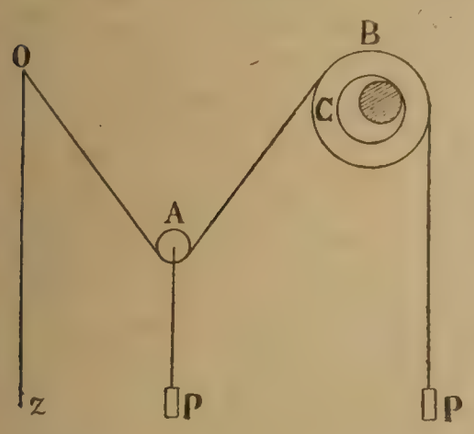
3° Soit F′ le point où la directrice QF′ coupe AF; on a évidemment F′A = AF. Joignons F′ au point G symétrique de O par rapport au point A. Les droites OF et F′G sont parallèles et par suite F′G et QF′ sont rectangulaires.

L'enveloppe de la directrice QF′ de (P) est donc la parabole de foyer G et de directrice Oy.

CH. PACÉ, enseigne de vaisseau, à bord de la *Ville d'Ys*.

Bonnes solutions de MM. P. BERNARD, à Paris; A. BROUSSE; L. CHIGANNE, à Strasbourg; J. CONTE, conducteur des Ponts et Chaussées, à Espalion; C. DELORGE, à Caen; R. DUFOUR, E. P. S., à Givet; Émile DUVAL, à Lambézellec; L. GAUTHIER, conducteur des Ponts et Chaussées, à Craponne; HORIET, lycée de Saint-Étienne; A. HUTINEL, à Cannes; G. LACH, à Douai; H.-L. MENNESSIER, à Evreux; ROHMER, conducteur des Ponts et Chaussées; A.-O. GUIBERT, candidat à la licence, à Nantes; M. N., à Toulouse; M. ROUX, instituteur au Creusot; A. TENOT, Arts et Métiers d'Angers.

2358. — *Dans un plan vertical* V *pris pour plan de la figure, on considère un point fixe* O *et deux poulies circulaires non déformables : l'une* A *mobile, l'autre* B *fixe, c'est-à-dire soutenue par une tige cylindrique* C *invariable de forme et de position et dont les génératrices rectilignes sont perpendiculaires à* V. *Le rayon de la poulie* B *est le triple de celui de son œil, de même centre et circulaire, et la section droite de la tige cylindrique* C *par* V *est un cercle de rayon quelconque moindre que celui de l'œil.*



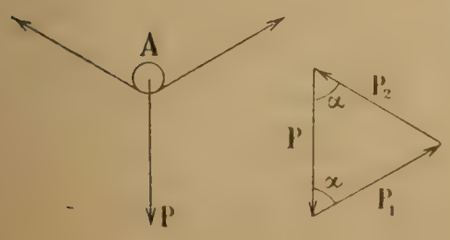
Un cordon flexible, de résistance illimitée et d'épaisseur négligeable, est attaché au point fixe O; *il soutient la poulie* A, *passe sur la poulie* B *et supporte un poids tenseur* P. *Au centre de la poulie* A *est suspendue une charge égale aussi à* P. *On admettra qu'il n'y a pas de frottement du cordon sur la poulie* A *et que ce cordon ne peut pas glisser sur la poulie* B. *On ne tiendra pas compte des poids des poulies et du cordon.*

1° *Dans l'hypothèse où il n'y a pas de frottement de la poulie* B *sur la tige* C, *calculer l'angle aigu* α *que fait le cordon avec la verticale* Oz, *lorsque l'appareil est en équilibre.*

2° *Dans l'hypothèse où il y a frottement, de coefficient égal à l'unité, de la poulie* B *sur la tige* C, *calculer à un millième près les cosinus des angles aigus* α' *et* α'', *valeurs de l'angle* α *qui correspondent aux positions d'équilibre limite de l'appareil, et, pour chacune de ces positions, calculer à un gramme près les réactions du point fixe* O *et de la tige fixe* C, *sachant que* P = 1 750^g.

Nota. — *On suppose la distance de* C *à* Oz *assez grande, les rayons des poulies assez petits et la longueur totale du cordon assez grande pour assurer le libre jeu de l'appareil, tout au moins dans les limites qui comprennent les positions d'équilibre visées ci-dessus.*

1° Dans l'hypothèse où il n'y a pas de frottement de la poulie B sur la tige C, la tension du cordon est égale à P; cette tension équilibrant une charge P sur la poulie mobile A, la somme géométrique de trois vecteurs P, P_1, P_2, égaux à P est nulle; le triangle des vecteurs équipollents à P, P_1, P_2 est un triangle équilatéral dont le côté P est placé verticalement; les deux autres côtés P_1 et P_2 donnent les directions du cordon reliant respectivement la poulie A à la poulie B(P_1) et la poulie A au point fixe O(P_2). L'angle α est égal à 60°.



2° Dans l'hypothèse où il y a frottement, désignons par Q la

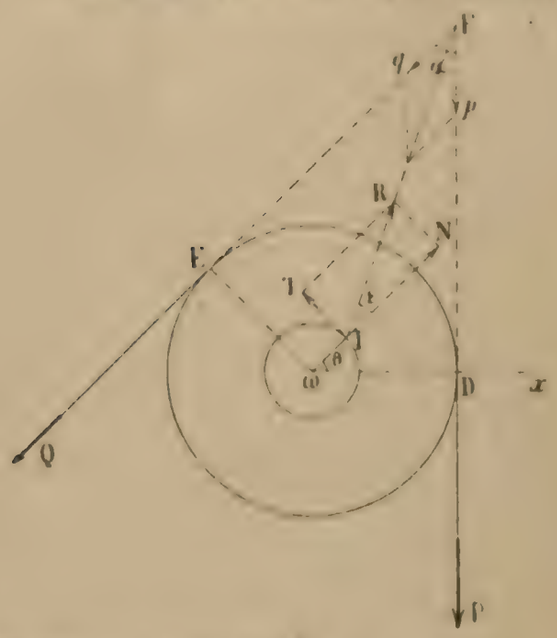
tension du cordon; la condition d'équilibre de la poulie mobile $(P)+(Q_1)+(Q_2)=0$, équivaut à

$$Q=\frac{P}{2\cos\alpha};$$

elle nous donne à la fois la tension du cordon et la réaction du point O, égale et opposée à Q_2. Reste à étudier l'équilibre de la poulie fixe. Soient ω le centre de l'œil, I le point de contact avec l'axe, θ l'angle de ωI avec ωx (horizontale), N et T les composantes normale et tangentielle de la réaction R de l'axe sur l'œil, ε l'angle que fait le vecteur R avec la normale ωN aux deux surfaces en contact. Écrivons les trois équations d'équilibre pour un système plan :

$$N\cos\theta - T\sin\theta = Q\sin\alpha, \qquad N\sin\theta + T\cos\theta = P + Q\cos\alpha, \qquad (P-Q)\times 3r = T.r.$$

Remplaçant N et T respectivement par $R\cos\varepsilon$, $R\sin\varepsilon$ et Q par sa valeur $\frac{P}{2\cos\alpha}$, il vient pour les deux premières équations,



$$R\cos(\theta+\varepsilon) = Q\sin\alpha = \frac{P}{2}\operatorname{tg}\alpha,$$

$$R\sin(\theta+\varepsilon) = P + Q\cos\alpha = \frac{3P}{2},$$

d'où $R=\frac{P}{2}\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+9}$, et pour la troisième,

$$3\left(P-\frac{P}{2\cos\alpha}\right) = R\sin\varepsilon,$$

d'où

$$\sin\varepsilon = \frac{3(2\cos\alpha-1)}{\sqrt{\sin^2\alpha+9\cos^2\alpha}}.$$

Pour que l'équilibre ait lieu, il faut que

$$|\varepsilon| \leqslant \varphi = 45^\circ,$$

ou encore $|\sin\varepsilon| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ et, par suite,

$$\frac{9(2\cos\alpha-1)^2}{1+8\cos^2\alpha} \leqslant \frac{1}{2}, \qquad 64\cos^2\alpha - 72\cos\alpha + 17 \leqslant 0.$$

Les racines du premier membre sont $\frac{9\mp\sqrt{13}}{16}$, séparées par la valeur $\frac{1}{2}$ ($\sin\varepsilon=0$).

Il faudra que l'on ait $\cos\alpha'' < \cos\alpha < \cos\alpha$ et par suite $\alpha' < \alpha < \alpha''$.

Calcul numérique. — On trouve :

$$\cos\alpha'' = \frac{9-\sqrt{13}}{16} = 0{,}33715 \qquad (\alpha'' = 70^\circ\,18' \text{ environ}),$$

$$\cos\alpha' = \frac{9+\sqrt{13}}{16} = 0{,}78785 \qquad (\alpha' = 38^\circ\,50').$$

Réaction du point O : $Q=\frac{P}{2\cos\alpha}=\frac{875}{\cos\alpha}$,

$$Q'' = 2\,595^g, \qquad Q' = 1\,111^g.$$

Réaction de la tige : $R=\frac{P\sqrt{1+8\cos^2\alpha}}{2\cos\alpha} = Q.3\sqrt{2}\times|2\cos\alpha-1|$,

$$R'' = 3\,586^g, \qquad R' = 2\,713^g.$$

P. L.

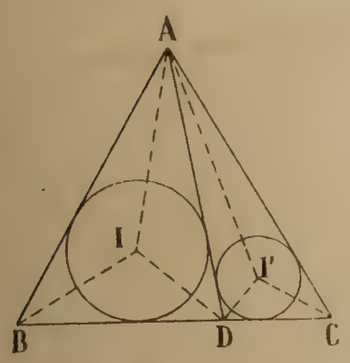
Bonnes solutions de MM. J. Conte, conducteur des Ponts et Chaussées, à Espalion; L. Gauthier, conducteur des Ponts et Chaussées, à Craponne; A. Hutinel, à Cannes; Rohmer, conducteur des Ponts et Chaussées; A. Tenot, Arts et Métiers, Angers.

2359. — *Étant donné un triangle équilatéral* ABC *dont le côté est égal à l'unité de longueur, on considère un point variable* D *sur le côté* BC *entre* B *et* C, *et on désigne par* x *l'angle* ADB.

1° *Exprimer en fonction de* x *les distances du point* A *aux centres des cercles inscrits dans les deux triangles* ADB *et* ADC, *puis étudier les variations de la somme et du produit de ces deux distances quand on fait varier* x.

2° *Déterminer* x *de façon que la somme des rayons des cercles inscrits dans ces deux triangles* ADB *et* ADC *soit égale à une quantité donnée* k. *Discuter, calculer le produit de ces deux rayons en fonction de leur somme* k *et trouver pour quelle valeur de* k *l'un des rayons est double de l'autre.*

1° Dans le triangle ABI, les angles ont pour valeurs $B = 30°$, $A = 60° - \frac{x}{2}$, $I = 90° + \frac{x}{2}$; on a



donc
$$\frac{AI}{\sin 30°} = \frac{AB}{\sin\left(90° + \frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\cos\frac{x}{2}},$$

d'où $AI = \dfrac{1}{2\cos\frac{x}{2}}$; de même, dans le triangle AI'C,

$$C = 30°, \qquad A = \frac{x}{2} - 30°, \qquad I' = 180° - \frac{x}{2},$$

$$\frac{AI'}{\sin 30°} = \frac{AC}{\sin\left(180° - \frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}, \qquad AI' = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Désignant par y la somme et par z le produit des deux distances AI et AI', on a

$$y = \frac{1}{2\cos\frac{x}{2}} + \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}, \qquad z = \frac{1}{4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\sin x}.$$

Lorsque D parcourt le côté BC, x varie de 120° à 60°; on voit de suite que le produit z décroît de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ jusqu'à un minimum égal à $\frac{1}{2}$ (pour $x = 90°$, correspondant au milieu de BC) et croît ensuite de $\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{\sqrt{3}}$ en prenant des valeurs égales pour des positions de D symétriques par rapport au milieu de BC.

Pour étudier la variation de y, on calculera la dérivée :

$$y' = \frac{\sin^3\frac{x}{2} - \cos^3\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}.$$

$\frac{x}{2}$ variant de 60° à 30° et par conséquent en décroissant, y' d'abord positive s'annule pour $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$ ($x = 90°$), puis devient négative; x décroissant de 120° à 90°, y varie dans le même sens que x et décroît de $1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ à un minimum égal à $\sqrt{2}$; x continuant à décroître de 90° à 60°, y varie en sens contraire et croît de $\sqrt{2}$ à $1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$; comme z, la fonction y prend des valeurs égales pour des positions de D symétriques par rapport au milieu de BC.

2° Soient r et r' les rayons des cercles inscrits dans les deux triangles ABD, ADC. On a

$$r = AI.\sin\left(60° - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2\cos\frac{x}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\right),$$

$$r' = AI'.\sin\left(\frac{x}{2} - 30°\right) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right),$$

d'où

$$r + r' = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sin x}.$$

$r - r'$ varie entre $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ et $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Si donc on prend $\frac{1}{2\sqrt{3}} < k < \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, on aura $r + r' = k$ pour les valeurs de x fournies par la formule

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{3} - 2k}.$$

Calculons enfin le produit rr' :

$$rr' = \frac{1}{4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8\sin x} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8}(\sqrt{3} - 2k) = \frac{2k\sqrt{3} - 1}{8}.$$

Soit $r = 2r'$: comme $r + r' = k$, on aura $r = \frac{2k}{3}$, $r' = \frac{k}{3}$ et, par suite, $rr' = \frac{2k^2}{9}$; il faudra donc prendre k de façon à vérifier l'équation du second degré

$$\frac{2k^2}{9} = \frac{2k\sqrt{3} - 1}{8},$$

c'est-à-dire

$$16k^2 - 18k\sqrt{3} + 9 = 0.$$

Substituons dans le premier membre de cette équation les valeurs limites $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ et $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, il vient

$$f\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{3} > 0, \qquad f\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = -2 + \sqrt{3} < 0;$$

on en conclut que les racines sont réelles, et que la plus petite seule convient au problème, savoir

$$k = \frac{9\sqrt{3} - 3\sqrt{11}}{16}.$$

Les valeurs correspondantes de r et de r' sont $r = \frac{3\sqrt{3} - 11}{8}$ et $r' = \frac{3\sqrt{3} - 11}{16}$.

P. L.

ALGÈBRE ET ANALYSE

2347. — *On considère la fraction rationnelle*

$$\frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + \alpha x + \beta}{x^2 - 2x + \gamma x - 2x + 1},$$

et on demande de déterminer γ, ainsi que la relation qui doit exister entre α et β pour que l'intégrale soit rationnelle.

2° On fait ensuite $\alpha = \beta$ et on demande de calculer cette intégrale, ainsi que la dérivée seconde de cette fraction rationnelle. Donner aussi le développement en série pour les petites valeurs de x.

1° Pour que l'intégrale de la fraction rationnelle soit rationnelle aussi, il faut évidemment qu'il n'entre aucun facteur linéaire au premier degré seulement dans le dénominateur. Celui-ci doit donc être un carré parfait, c'est évidemment le carré parfait de $x^2 - x + 1$; or, en développant

$(x^2-x+1)^2$, nous avons $x^4-2x^3+3x^2-2x+1$; par conséquent, $\gamma=3$, et la fraction s'écrit

$$R(x)=\frac{x^5-2x^4+3x^3-2x^2+\alpha x+\beta}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}=x+\frac{(\alpha-1)x+\beta}{(x^2-x+1)^2}.$$

Décomposons cette fraction en éléments simples; nous aurons

$$R(x)=x+\frac{A}{(x+j)^2}+\frac{A'}{(x+j)}+\frac{B}{(x+j^2)^2}+\frac{B'}{(x+j^2)},$$

j et j^2 désignant comme habituellement les racines cubiques de l'unité. Pour que l'intégrale $\int R(x)dx$ soit rationnelle, il faut et il suffit que A' et B' soient nuls, c'est-à-dire que l'on ait

$$R(x)=x+\frac{A}{(x+j)^2}+\frac{B}{(x+j^2)^2}.$$

Développons et identifions; nous aurons

$$A+B=0,\qquad Aj^2+Bj=\frac{\alpha-1}{2},\qquad Aj+Bj^2=\beta,$$

car $j^3=1$.

Nous tirons de là $B=-A$, $A(j^2-j)=\frac{\alpha-1}{2}$, $A(j-j^2)=\beta$; par suite, la relation entre α et β s'obtient immédiatement par l'addition des deux dernières relations; c'est

$$\alpha+2\beta-1=0.$$

2° Faisons $\beta=\alpha$; ceci nous donne $3\alpha=1$, $\alpha=\frac{1}{3}$; les relations précédentes nous donnent

$$A=\frac{1}{3(j-j^2)}.$$

Prenons $j=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$; nous aurons alors

$$j^2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\qquad\text{et}\qquad j-j^2=-i\sqrt{3},\qquad A=\frac{-1}{3i\sqrt{3}}=\frac{i}{3\sqrt{3}}=\frac{i\sqrt{3}}{9}.$$

La fraction $R(x)$ est donc

$$R(x)=x+\frac{i\sqrt{3}}{9}\left(\frac{1}{(x+j)^2}-\frac{1}{(x+j^2)^2}\right)$$

ou

$$R(x)=x-\frac{1}{3}\frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}.$$

Comme $2x-1$ est la dérivée de x^2-x+1, l'intégrale est immédiate et est

$$\int R(x)dx=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3(x^2-x+1)}.$$

Écrivons maintenant

$$R(x)=x+\frac{i\sqrt{3}}{9}[(x+j)^{-2}-(x+j^2)^{-2}];$$

nous aurons de suite, en dérivant deux fois successivement,

$$R''(x)=\frac{2i\sqrt{3}}{3}[(x+j)^{-4}-(x+j^2)^{-4}]$$

ou

$$R''(x)=\frac{2i\sqrt{3}}{3}\left[\frac{1}{(x+j)^4}-\frac{1}{(x+j^2)^4}\right].$$

Le second membre peut s'écrire

$$\frac{2i\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{(x+j^2)^4-(x+j)^4}{(x^2-x+1)^4},$$

ou

$$\frac{2i\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{4(j^2-j)x^3+6(j^2-j^2)x^2+4(j^2-j)x+j^2-j^2}{(x^2-x+1)^2},\qquad \frac{2i\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{(j^2-j)(4x^3-6x^2+1)}{(x^2-x+1)^2};$$

donc enfin

$$R''(x)=-2\frac{4x^3-6x^2+1}{(x^2-x+1)^2}.$$

Telle est la dérivée seconde de la fraction $R(x)$.

Pour développer cette fraction en série convergente pour les petites valeurs de x, nous écrirons la fraction $R(x)$ ainsi :

$$R(x)=x+\frac{A}{(x+j)^2}-\frac{A}{(x+j^2)^2}.$$

$$\frac{A}{(x+j)^2}=\frac{A}{j^2}\frac{1}{\left(1+\frac{x}{j}\right)^2}=\frac{A}{j^2}\left(1+\frac{x}{j}\right)^{-2}.$$

et nous appliquerons la formule du binome

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)x^2}{1.2}+\ldots.$$

ce qui nous donnera

$$\left(1+\frac{x}{j}\right)^{-2}=1-2\frac{x}{j}+3\frac{x^2}{j^2}-4\frac{x^3}{j^3}+\ldots.$$

$$\frac{A}{j^2}\left(1+\frac{x}{j}\right)^{-2}=A\left(\frac{1}{j^2}-2x+\frac{3x^2}{j}-\frac{4x^3}{j^2}+5x^4\ldots\right);$$

nous avons de même

$$\frac{A}{j}\left(1+\frac{x}{j^2}\right)^{-2}=A\left(\frac{1}{j}-2x+\frac{3x^2}{j^2}-\frac{4x^3}{j}+5x^4\ldots\right).$$

Retranchons la seconde égalité de la première; nous aurons finalement

$$R(x)=x+A\left(\frac{1}{j^2}-\frac{1}{j}\right)(1-3x^2-4x^3+6x^5+7x^6\ldots);$$

or,

$$A\left(\frac{1}{j^2}-\frac{1}{j}\right)=A(j-j^2)=\frac{1}{3};$$

le développement en série de $R(x)$, valable pour les valeurs de x plus petits que 1 en valeur absolue, est donc

$$R(x)=x+\frac{1}{3}(1-3x^2-4x^3+6x^5+7x^6\ldots).$$

La loi de formation est évidente.

On peut obtenir aussi ce développement en divisant le numérateur $\frac{1}{3}(1-2x)$ par le dénominateur et ordonnant par rapport aux puissances croissantes de x. La loi de formation des termes du quotient serait plus difficile à établir; ici, elle découle du calcul même qui a été suivi.

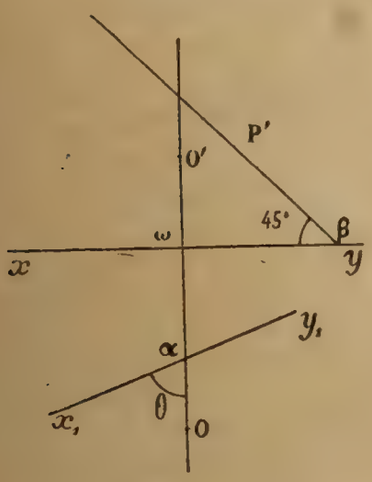
Bonnes solutions : MM. P. Bernard, à Paris; M., à Guéret; Ch. Page, enseigne de vaisseau.
Assez bonne solution : M. H. Picard, à Parthenay.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

2333. — *La ligne de terre xy est le petit axe du cadre;*

$$x\omega = \omega y, \qquad \omega o' = 6^{cm}, \qquad \omega o = 13^{cm}, \qquad \omega\beta = 12^{cm}.$$

Une surface gauche de révolution, qui a son axe vertical, a pour centre le point o, o'; les génératrices rectilignes font avec le plan horizontal un angle de 45° et le rayon du cercle de gorge est de 4cm.



Un cône de révolution a pour sommet le point le plus à gauche du cercle de gorge; son axe est parallèle à xy et les génératrices rectilignes font avec l'axe un angle de 45°.

On demande de représenter par ses deux projections le solide commun au cône et à l'hyperboloïde, limité au plan horizontal de projection et au plan de bout P'.

On demande aussi une seconde projection verticale de ce solide, en prenant $x_1\alpha y_1$ pour nouvelle ligne de terre. $\omega\alpha = 7^{cm}$, $\operatorname{tg}\theta = 2,15$.

(*École centrale*, 1916.)

Sur les deux projections principales, horizontale et verticale, les contours apparents des deux solides se construisent immédiatement. Pour l'hyperboloïde, nous utiliserons la génératrice frontale qui a pour trace horizontale (k, k').

L'intersection des deux surfaces se construit par la méthode des sphères auxiliaires ayant pour centre commun le point de rencontre des axes de révolution, c'est-à-dire ici le centre (o, o') de l'hyperboloïde. La tangente $(mt, m't')$, en chaque point (m, m') ainsi obtenu, se détermine facilement par la méthode du plan normal.

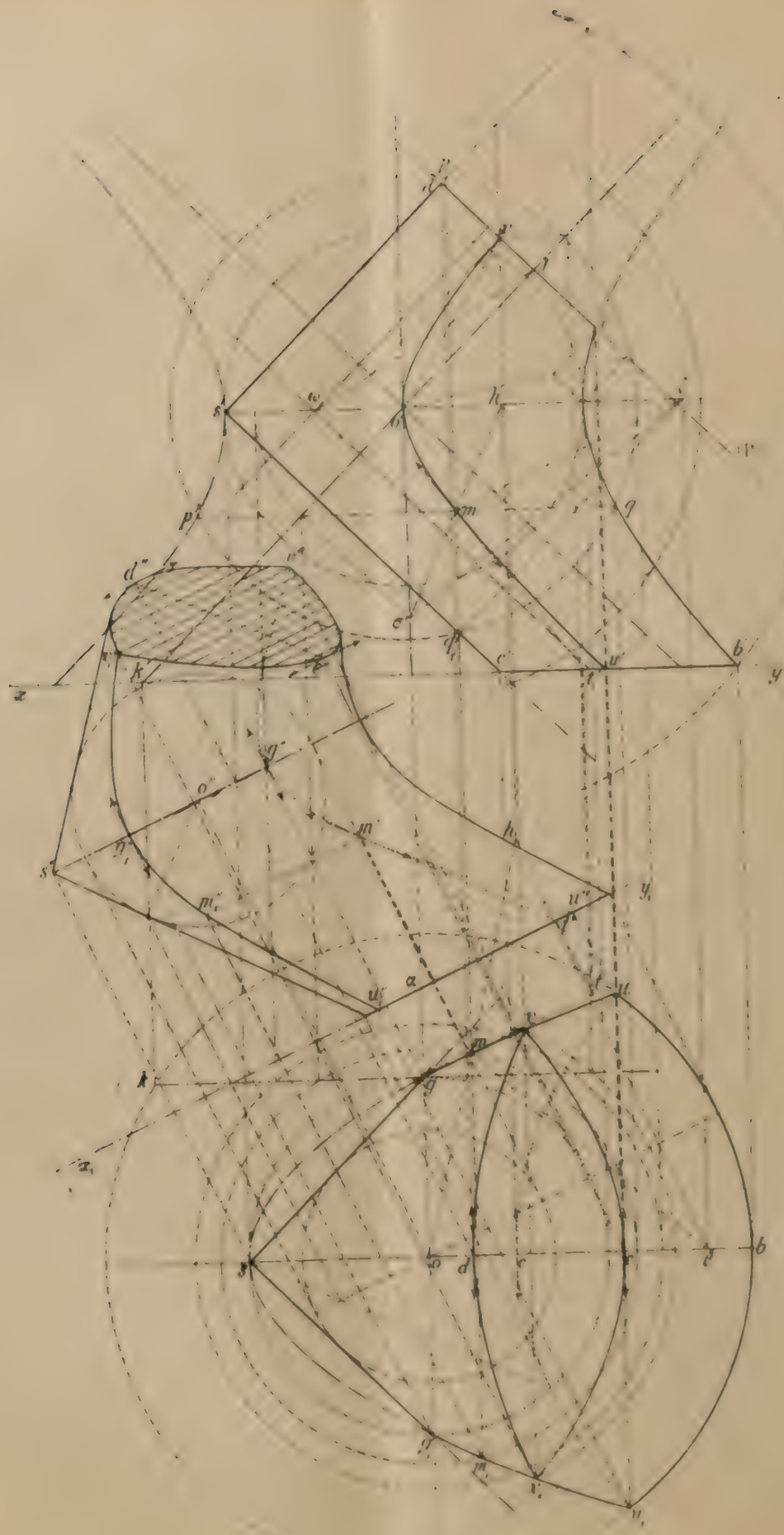
Le plan du cercle de gorge et le plan méridien frontal étant des plans de symétrie communs aux deux surfaces, les deux projections de la courbe d'intersection seront deux coniques. Pour en déterminer la nature, cherchons les points à l'infini, en substituant à l'hyperboloïde son cône asymptotique qui aurait même sommet (s, s') que le cône proposé. Les deux cônes se toucheront suivant leurs génératrices de contour apparent vertical; et il en résulte que la conique du plan vertical est une hyperbole équilatère, homothétique à la méridienne de l'hyperboloïde, tandis que dans le plan horizontal, avec une direction asymptotique unique et frontale, nous aurons une parabole.

Par raison de symétrie, l'hyperbole a un sommet en s', et l'autre est fourni par la sphère limite inscrite dans l'hyperboloïde; on trouve ainsi le point o'. L'hyperbole rencontre xy en un point u', déduit de la sphère auxiliaire contenant le point (k, k'). Quant au point v' où cette hyperbole s'arrête sur la trace du plan (P'), le plus simple est de le considérer comme l'intersection de la courbe et d'une parallèle à l'une de ses asymptotes. La corde $o'v'$ étant considérée comme diagonale d'un rectangle dont les côtés seraient parallèles aux asymptotes, la seconde diagonale sera le diamètre conjugué de cette corde. On l'obtiendra en joignant le centre ω' au point l' où la droite $o'k'$ rencontre la trace de (P'), et le tracé s'achève d'une manière évidente.

Les points u' et v' se rappellent horizontalement, le premier en u et u_1, le second en v et v_1, sur les parallèles correspondants de l'hyperboloïde. Le sommet o' étant rappelé, de son côté, en g et g_1 sur le cercle de gorge, la parabole horizontale qui, complétée, aurait pour sommet s, se réduit aux deux arcs symétriques gvu et $g_1v_1u_1$, les portions gv et g_1v_1 comptant chacune deux fois, comme on le constate en suivant la projection verticale.

Le plan horizontal de projection donne, dans les deux solides, l'arc de cercle ubu_1 appartenant à la base de l'hyperboloïde, et l'arc d'hyperbole équilatère ucu_1 situé sur la surface du cône. Le centre est en s, et le sommet c est déterminé par la génératrice frontale $(sc, s'c')$. On peut en construire d'autres points, avec leurs tangentes, soit en coupant, par les sphères auxiliaires qui nous ont déjà servi, le cône et le plan horizontal, soit en faisant simplement une perspective horizontale, avec le point de vue (s, s'), des points (m, m') et de leurs tangentes.

Il nous reste à représenter les sections faites par le plan (P') dans les deux solides. Comme il est parallèle à la fois à deux plans, dont l'un serait tangent au cône donné et l'autre au cône asymptote de l'hyperboloïde, les deux courbes sont des paraboles, projetées verticalement suivant deux segments de droites, et horizontalement suivant deux arcs de paraboles rdr_1 et rer_1, d'axe commun so, et dont les sommets d et e proviennent des



Echelle : $\frac{3}{5}$

points de rencontre d', e' de la trace du plan (P') avec la génératrice de contour apparent $s'd'$ du cône et la méridienne de l'hyperboloïde. Le point e' se construit comme le point v'.

Nouvelle projection. — Le nouveau contour apparent du cône se déduisant du premier à l'aide d'une sphère inscrite, on n'a plus à effectuer que des rappels de points et de tangentes, en appliquant la méthode des changements de plans. L'intérêt consiste dans la séparation des deux branches de la courbe gauche et l'apparition de véritables arcs de paraboles, remplaçant la droite primitive $d'e'$.

Aucune difficulté pour la ponctuation. On remarquera, sur la projection horizontale, la moitié conservée du cercle de gorge, constituant un contour apparent virtuel. J. L.

M. H.-L. Mennessier, à Evreux, a envoyé une très bonne épure.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1920)

ÉCOLE CENTRALE

Trigonométrie.

10607. — Calculer $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$, $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$. Calculer également $\operatorname{sh} 3x$ en fonction de $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} 3x$ en fonction de $\operatorname{ch} x$.

— **608.** — Calculer $\sin\frac{x}{2}$ en fonction de $\sin x$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ en fonction de $\sin x$.

— **609.** — Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{1}{\cos 4t - \cos 4a}$; on pose $\cos t = x$, $\cos a = b$.

— **610.** — On considère deux nombres x et y liés par la relation $\sin x . \operatorname{ch} y = 1$. Calculer les lignes trigonométriques de x et $\frac{x}{2}$ en fonction des lignes hyperboliques de y et inversement. Calculer la dérivée de x par rapport à y et inversement la dérivée de y par rapport à x.

— **611.** — Théorème d'addition pour les fonctions hyperboliques; calculer $\operatorname{sh}(x+y)$ et $\operatorname{ch}(x+y)$.

— **612.** — Vérifier que les solutions réelles de l'équation $\operatorname{tg}^3 x \times \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$ satisfont à l'équation $\cos 2x = 1 - \sqrt{5}$.

— **613.** — Démontrer que l'équation $\sin x = \frac{1}{5}\sin(2y + x)$ est équivalente à celle-ci : $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{3}{2}\operatorname{tg} y$.

— **614.** — Résoudre l'équation $a\cos x + b\sin x = c$. Montrer que résoudre cette équation revient à trouver l'intersection d'une droite avec un cercle de rayon 1.

— **615.** — Résoudre l'équation $\sin 3x = m \sin x$.

— **616.** — Résoudre l'équation $8\cos x = \frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$.

— **617.** — Rendre calculables par logarithmes les racines d'une équation du second degré.

— **618.** — On considère la quantité $\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a+b+c)$; rendre cette quantité calculable par logarithmes. Que devient cette expression quand a, b, c sont les angles d'un triangle ? Que devient-elle si l'on fait $a = \pi - A$, $b = \pi - B$, $c = \pi - C$, A, B, C étant les angles d'un triangle ?

— **619.** — Entre les angles et les côtés d'un triangle, on a les relations

$$a = b\cos C + c\cos B, \qquad b = c\cos A + a\cos C, \qquad c = a\cos B + b\cos A.$$

L'équation obtenue en éliminant a, b, c entre ces trois équations équivaut-elle à la relation $A + B + C = \pi$?

— **620.** — On donne l'équation $x^3 - px^2 + qx - r = 0$; ses trois racines sont les côtés d'un triangle. Trouver l'équation qui admet comme racines $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$.

— **621.** — Résoudre un triangle connaissant les trois angles et le périmètre $2p$.

— **622.** — Résoudre un triangle connaissant la base a, la médiane m relative à ce côté et la différence $B - C$ des angles à la base.

— **623.** — Construire et résoudre un triangle connaissant la base a, la bissectrice l et l'angle A. Discussion.

— **624.** — Résoudre un triangle isocèle, connaissant la base a et la longueur d'une bissectrice d'un angle à la base.

— **625.** — Démontrer que, dans un triangle dont les côtés sont en progression arithmétique $(2a = b + c)$, on a $\operatorname{tg}\frac{B}{2} . \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{3}$ et $A < 60°$.

Géométrie analytique et mécanique (MM. Tresse et Valiron).

Géométrie analytique à deux dimensions.

10626. — Un point N décrit la droite $x = a$; connaissant les coordonnées d'un point M pris sur la droite ON, trouver les coordonnées du point M', conjugué harmonique de M par rapport à O et à N.

— **627.** — Construire la courbe $y = x \pm \sqrt{2x^2 - 3}$; asymptotes.

— **628.** — Asymptotes de la courbe $y = \sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{x^2 + 2} - 2x$.

— **629.** — Construire les courbes suivantes :

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{t-1} + \dfrac{3}{t+1}, \\ y = \dfrac{4}{(t-1)^2} + \dfrac{8}{t+1}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{(t-4)(t+1)}, \\ y = \dfrac{2t}{(t+1)(t-2)}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{(t-2)(t+1)}, \\ y = \dfrac{1}{(t-3)(t+1)}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{(t-1)^3} - \dfrac{8}{(t-2)^3}, \\ y = \dfrac{1}{(t+1)^3} - \dfrac{8}{(t+2)^3}; \end{cases}$$

— **630.** — Construire la courbe $x = t^3$, $y = \dfrac{t^2}{t+1}$; étudier la concavité.

— **631.** — On donne la courbe $x(x+y)^2 - y^2 = 0$; exprimer les coordonnées x et y d'un point de cette courbe en fonction d'un paramètre. Tangente en un point (x_0, y_0).

— **632.** — On donne la courbe $y = x^3 + x$ et la tangente en un point M; elle rencontre la courbe en un second point M'; lieu du milieu du segment MM'.

— **633.** — Soit la courbe $x^3 + y^3 - axy = 0$; lui mener des tangentes par le point A de Ox, d'abscisse a.

— **634.** — On donne la cubique $x(x^2 + y^2) - y^2 + x = 0$; la droite $y = tx$ la coupe en deux points A et B autres que le point O. Équation du faisceau des parallèles menées par l'origine aux tangentes à la courbe en A et B.

— **635.** — On coupe la cubique $x(x^2 + y^2) - ay^2 + bx = 0$ par la droite $y = tx$; relation entre les angles que font avec le rayon vecteur les tangentes aux deux points d'intersection (autres que O).

— **636.** — On donne la strophoïde droite $x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0$; équation générale des cordes vues de l'origine sous un angle droit.

— **637.** — On considère la courbe $(2x + 3y)(x^2 + y^2) - 5xy = 0$; on mène une droite OM et la perpendiculaire OM'; M et M' étant les points de rencontre de ces droites avec la courbe; former l'équation de la droite MM' en fonction du coefficient angulaire de OM.

— **638.** — Construire les courbes suivantes :

$$x(y - x)^2 = x + y \qquad \text{(tangentes parallèles à } Ox\text{)}.$$

$$x^2(y - x) - y^2 = 0, \qquad x^3 + 8y^3 - 3xy = 0, \qquad x^4 - 2xy^2 + x^2 + y^2 = 0, \qquad (x^2 - 4y^2)(x + y) - x^2 - y^2 = 0,$$

$$(x + y)(x^2 - 4y^2) - 4xy = 0, \qquad x^4 - 2x^3y + x^2y^2 + y^2 - y = 0, \qquad x(x - y)(x + 2y) + y^2 + x = 0,$$

$$y^2(x + 1) - 2y(x + 1) + x^2 + 1 = 0.$$

— **639.** — Construire les courbes suivantes :

$$\rho = \operatorname{tg}\omega + \operatorname{tg} 2\omega, \qquad \rho = \frac{\operatorname{tg}\omega}{\sin\omega + \cos\omega}, \qquad \rho = \frac{2}{1 + 2\cos\omega}, \qquad \rho = \frac{\cos\omega + \sin\omega}{3\cos\omega + 4\sin\omega}, \qquad \rho = \frac{\cos\omega}{2\cos^2\omega - 1},$$

$$\rho = \frac{\cos^2\omega - 2\sin^2\omega}{\cos\omega}, \qquad \rho = \frac{\sin 2\omega}{1 + \cos 2\omega}, \qquad \rho = \frac{\sin 3\omega}{\sin 4\omega}, \qquad \rho = \operatorname{tg} 3\omega, \qquad \rho = \frac{1}{\cos\dfrac{3\omega}{2}},$$

$$\rho = \frac{2}{\sqrt{1 - 4\cos^2\omega}}, \qquad \rho = 1 - \sqrt[3]{2}\cos\omega, \qquad \frac{1}{\rho} = 1 - \sqrt[3]{2}\cos\omega, \qquad \rho = \frac{1}{L\omega}, \qquad \rho = \frac{\omega}{\sin\omega}$$

(directions asymptotiques et asymptotes).

— **640.** — Déterminer sur la courbe $\rho = \sin\omega . e^{-\omega}$ les points où la tangente est parallèle à une direction faisant l'angle α avec l'axe polaire.

— **641.** — Conchoïdes; définition. Conchoïde d'une droite.

— **642.** — Rayon de courbure en un point de la courbe $xy^2 = a^3$.

— **643.** — Développée de $xy^2 = a^3$.

— **644.** — On donne la courbe $\rho = a.\cos^2\dfrac{\omega}{2}$; on demande de déterminer sa développante, en prenant pour origine des arcs le point A ($\omega = 0$, $\rho = a$).

— **645.** — Un triangle isocèle OPR, de sommet O et dont l'un des côtés égaux, OP, est situé sur Ox, se déforme de telle façon que le sommet R décrive une droite donnée; du point O on abaisse la perpendiculaire sur RP; lieu du pied M de cette perpendiculaire.

— **646.** — On donne deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy et deux points A, A' sur Ox, d'abscisses a et a'. Lieu des centres des cercles tangents à Oy et qui coupent Ox en deux points conjugués harmoniques l'un de l'autre par rapport aux points A et A'.

— **647.** — On donne deux circonférences tangentes en O; l'une des circonférences est fixe, l'autre varie; on leur mène une tangente commune; lieu du point de contact M de cette tangente avec la circonférence variable.

— **648.** — On donne un cercle fixe O et sur ce cercle un point A; on considère les cercles ω passant par le point A et orthogonaux au cercle O, et on mène les tangentes communes MN, M'N'; lieu des points de contact N et N' avec le cercle ω.

10649. — On donne une circonférence de centre A $(x = a,\ y = 0)$ et de rayon R; on considère les cercles orthogonaux C à la circonférence A et tangents à Oy. Enveloppe de l'axe radical des cercles A et C; reconnaître la nature de cette enveloppe.

— **650.** — Réduire en axes rectangulaires l'équation $(y - 2x)^2 + x + 3y - 2 = 0$. Théorie générale de la réduction des coniques.

— **651.** — On a la conique $(y - 8x)^2 - 2x + 5y = 0$; sa nature? Équation de la tangente au sommet.

— **652.** — On donne une ellipse rapportée à ses axes et une circonférence concentrique; lieu des milieux des cordes de l'ellipse qui sont tangentes à la circonférence.

— **653.** — On donne l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ et un diamètre fixe MM′ de cette ellipse; déterminer le point P sur la courbe de façon que le cercle circonscrit au triangle MPM′ ait le plus grand rayon possible.

— **654.** — On donne l'ellipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} - 1 = 0$; déterminer les coefficients angulaires des tangentes menées à cette ellipse par un point donné $P(x = 2,\ y = 3)$.

— **655.** — On donne l'ellipse $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$ et la droite $y = 2x$; trouver sur cette droite les points d'où l'on peut mener à l'ellipse des tangentes faisant entre elles un angle de 45°.

— **656.** — On donne l'ellipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} - 1 = 0$ et un cercle de centre $x = 3,\ y = 0$ et de rayon $\frac{1}{2}$; tangente commune à ces deux courbes.

— **657.** — Lieu des projections de l'origine (centre) sur les normales à l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

— **658.** — Soit l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$; la normale en M coupe l'ellipse en un second point, P; lieu du milieu de MP.

— **659.** — On donne l'ellipse $x^2 + 4y^2 - a^2 = 0$; lui mener des normales par le point $x = \frac{a}{4},\ y = 0$.

— **660.** — Étant donnée l'hyperbole $y^2 - \frac{x^2}{4} + 1 = 0$, trouver les deux tangentes parallèles dont la distance est égale à 1.

— **661.** — On donne une hyperbole équilatère $xy = a^2$; un point M est variable sur cette hyperbole; lieu de l'intersection de la normale MN avec le diamètre conjugué à sa direction.

— **662.** — On donne la courbe $xy = a^2$; soit M un point de la courbe, MN la normale en ce point. On prend la bissectrice de l'angle OMN; lieu de la projection de l'origine sur cette bissectrice.

— **663.** — On donne l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ et la parabole $y^2 = 2px$; on mène à la parabole la tangente en un point P; elle coupe l'ellipse aux deux points A et B; lieu du milieu de AB quand la tangente varie.

— **664.** — On considère un triangle OBC dont le sommet B décrit la parabole $y^2 = 2px$, l'angle BOC est constan et de plus le côté BC est vertical; lieu du point C.

— **665.** — On donne la parabole $y^2 = 2px$; par un point M pris sur la parabole, on mène la parallèle à Oy; lieu du point de rencontre P de cette droite avec la bissectrice de l'angle MOy.

— **666.** — On donne la parabole $y^2 = 2px$ et un point M sur cette parabole, enveloppe de la droite menée par le point M et faisant avec OM le même angle que OM avec Ox.

— **667.** — On considère la parabole $y^2 = 2px$; soit A le pied de la directrice sur l'axe de la parabole; on le joint à un point M variable sur la courbe. Lieu du centre du cercle inscrit dans le triangle OAM.

— **668.** — On donne la parabole $y^2 = 2px$, un point M sur cette courbe, la tangente en ce point qui coupe l'axe des x en T et le foyer F; lieu du point de concours des hauteurs du triangle MTF.

— **669.** — Soient les deux paraboles $y^2 = 2px$, $x^2 = 2qy$; lieu des points de rencontre des tangentes rectangulaires aux deux paraboles.

— **670.** — Normale en un point d'une parabole; équation du cercle circonscrit au triangle formé par les pieds des normales issues d'un point.

— **671.** — Lieu des projections de l'origine sur les normales à la parabole $y^2 = 2px$.

— **672.** — Équation de la normale en un point de la parabole; équation de la normale en fonction de son coefficient angulaire. Lieu des points d'où on peut mener à la parabole deux normales rectangulaires.

— **673.** — Soit une droite $x'x$, une droite Δ, dans son plan, non parallèle à $x'x$, et un point quelconque A; construire une parabole d'axe $x'x$ et telle que Δ soit la polaire du point A par rapport à cette parabole.

— **674.** — Position de la courbe $y^2 = 2px + qx^2$. Trouver sur la droite $x = a$ (ou sur la droite $y = b$) le ou les points d'où l'on peut mener à cette conique des tangentes rectangulaires.

— **675.** — Foyers de la courbe $y^2 = 2px + qx^2$. Foyers de la courbe $y^2 - 2x + 3x^2 = 0$.

— **676.** — Condition pour que deux coniques ayant les mêmes axes se coupent orthogonalement en leurs quatre points d'intersection.

— **677.** — On donne deux axes rectangulaires Ox et Oy; sur Ox un point A, d'abscisse $x = a$, sur Oy un point B d'ordonnée $y = b$; on prend en outre un point M sur la droite MN d'équation $x = 2a$. Former l'équation générale des coniques passant par les quatre points O, A, B, M.

10678. — On donne deux axes rectangulaires Ox et Oy : former l'équation d'une conique tangente à Ox en un point d'abscisse $x = 1$, à Oy en un point d'ordonnée $y = 2$, sachant que le centre de cette conique est situé sur la première bissectrice.

— **679.** — Équation d'une conique tangente en A et B aux axes de coordonnées et dont un axe est parallèle à la première bissectrice.

— **680.** — Équation des paraboles tangentes à Ox et ayant pour axe $y = mx + h$.

— **681.** — Soient deux axes rectangulaires Ox, Oy et une droite $y = mx$: on donne un point quelconque S de coordonnées a et b. Équation générale des coniques admettant Ox pour axe, la droite $y = mx$ étant la polaire du point S par rapport à ces coniques.

(*A suivre.*)

QUESTIONS PROPOSÉES

2509. — On considère une ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

dont les quatre sommets sont les points A et A', B et B' ; le point A' est, sur Ox, le sommet de gauche ; le point B est, sur Oy, celui dont l'ordonnée est positive.

1° On porte les axes parallèlement à eux-mêmes au sommet de gauche, A' ; on considère ensuite une droite variable qui passe au sommet A et qui rencontre le nouvel axe des y en P. Trouver l'équation de la droite (D) conjuguée de celle-ci, et qui rencontre le nouvel axe des y en P', tel que $A'P.A'P' = b^2$. Montrer que cette droite passe par un point fixe et trouver le lieu du point de rencontre de la droite (D) avec la première droite.

2° On fait varier l'ellipse de façon que l'axe et la tangente au point A' restent fixes et que le rapport $\frac{b^2}{a}$ reste constant et égal à p. Former l'équation de la droite AB ; trouver son enveloppe et le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point A' sur la droite AB.

3° Dans chacune des ellipses, il y a une droite (D) parallèle à AB. Trouver cette droite et son enveloppe.

4° Trouver les lieux des sommets du rectangle formé par cette droite (D) et le segment AB. Trouver le lieu du centre de ce rectangle et construire ce dernier lieu.

E. H.

2510. — On donne deux axes rectangulaires Ox et Oy et un point M (x, y) mobile dans ce plan, de masse 2^g, sous l'action de la force $X = -8x$, $Y = -2y$.

Démontrer qu'il y a une fonction de forces et trouver les courbes de niveau et les lignes de forces.

Déterminer les coordonnées du point M en fonction du temps t, sachant qu'au moment initial, $t = 0$, le mobile M se trouve au point A $(1, 0)$, où la vitesse initiale est égale à 1^{cm} et est perpendiculaire à OA.

Trouver l'équation et construire la trajectoire du point M. Étudier le mouvement du mobile sur cette courbe.

Calculer le travail de la force donnée quand le mobile se déplace du point A au point où il se trouve après un temps égal à $\frac{\pi}{4}$ sec.

N. ABRAMESCO, maître de conférences à l'Université de Cluj (Roumanie).

Hig

2511. — Une conique variable, inscrite dans un triangle, est telle que les normales aux trois points de contact soient concourantes. Trouver le lieu de leur point de rencontre. Montrer que ce lieu est une cubique qui a ses asymptotes perpendiculaires aux côtés du triangle. et concourantes au centre du c. circonscrit

G. LACH, à Douai.

2512. — Construire la courbe

$$\rho = \frac{\cos 2\omega}{1 - 2\sin\omega},$$

et trouver l'aire située à l'intérieur des deux boucles.

G. LACH, à Douai.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

Coulommiers. — Imprimerie PAUL BRODARD.

31e Année. Juin 1921. N° 9.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

SUR LES DÉVELOPPEMENTS DE CONES ET CYLINDRES

par M. **Chenevier**, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Toulouse.

I. Cylindre. — 1° Le cylindre est rapporté à trois axes rectangulaires. Oz étant parallèle aux génératrices. La section du cylindre par le plan xOy est définie par les coordonnées d'un de ses points, m, en fonction de l'arc $Am = \sigma$:

$$x = f(\sigma), \qquad y = g(\sigma).$$

Ce choix de variables entraîne

$$dx^2 + dy^2 = d\sigma^2;$$

par suite,

$$x'^2 + y'^2 = 1. \tag{1}$$

Un point M du cylindre est défini par l'abscisse curviligne, σ, du point correspondant de la section droite, et par sa cote, z.

Associons à ce point le point M_1 d'un plan XOY défini par

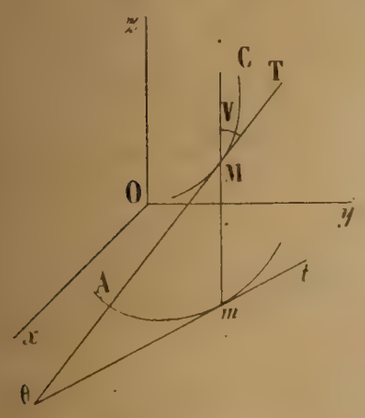
$$X = \sigma, \qquad Y = z.$$

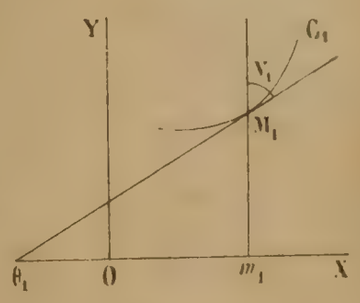
Nous créons ainsi une correspondance parfaite entre les points du cylindre et ceux du plan.

A une courbe, C, tracée sur le cylindre correspondra une courbe, C_1, tracée sur le plan.

2° La courbe C est définie par z fonction de σ, et l'on a, pour cette courbe,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\sigma^2 + dz^2.$$





Dans le plan XOY on a, pour C_1,

$$ds_1^2 = dX^2 + dY^2 = d\sigma^2 + dz^2;$$

donc

$$ds^2 = ds_1^2,$$

et, en faisant les mêmes conventions de signe dans les deux cas,

$$ds = ds_1.$$

Donc à un arc AB du cylindre correspond un arc A_1B_1 de même longueur.

3° Choisissons sur C un sens de parcours qui sera, par exemple, si cela est pratique dans le cas d'espèce considéré, celui des σ croissants. La demi-tangente MT à C fait avec Oz un angle défini par

$$\cos V = \frac{dz}{ds}.$$

L'existence de $\frac{dz}{ds}$ entraine l'existence d'une tangente à C_1. La demi-tangente M_1T_1 orientée dans le sens des σ croissants fait avec OY un angle V_1 défini par

$$\cos V_1 = \frac{dY}{ds_1} = \frac{dz}{ds}.$$

Donc $V = V_1$.

L'angle de la demi-tangente à une courbe avec une direction positive choisie sur les génératrices est donc conservé dans le développement, et, par suite, l'angle de deux courbes est aussi conservé.

4° La sous-tangente $m\theta$, qu'un calcul immédiat montre être égale à $\frac{z}{z'}$, est susceptible d'un signe si on la compte sur la demi-tangente mt; il est facile de constater que $\overline{m\theta} = \frac{-z}{z'}$.

Or, la sous-tangente $m_1\theta_1$ du développement est donnée par

$$\overline{m_1\theta_1} = \frac{-Y}{Y'} = \frac{-z}{z'}.$$

Les vecteurs sous-tangentes sont donc les mêmes.

5° Si A, B, C sont les coefficients de l'équation du plan osculateur à la courbe C, son rayon de courbure en M est

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad \text{ou} \qquad R = \frac{(1 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Le rayon de courbure de la courbe C_1, en M_1, est donné par

$$R_1 = \frac{(1 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}{|z''|}.$$

La comparaison de R et R_1 est aisée si l'on introduit l'angle du plan osculateur avec le plan tangent au cylindre en M.

Les directions de ces plans sont

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = 0, \\ y'x - x'y = 0. \end{cases}$$

Donc, si θ est leur angle,

$$\cos\theta = \frac{Ay' - Bx'}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(x'^2 + y'^2)}};$$

Or,

$$A = y'z'' - z'y'', \qquad B = z'x'' - x'z'', \qquad Ay' - Bx' = z''(x'^2 + y'^2) - z(x'x'' + y'y'').$$

Mais ceci se réduit à z'', d'après (1), puisque $x'x'' + y'y''$ est la dérivée de $x'^2 + y'^2$ au facteur 2 près.

On a donc

$$\cos\theta = \frac{z''}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

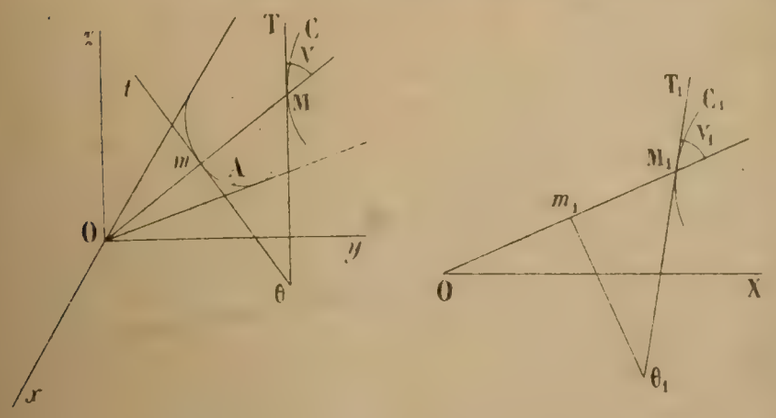
On en déduit alors

$$R = R_1 \cos\theta.$$

R_1 sera donc infini si R l'est aussi, ou si $\cos\theta$ est nul; on retrouve le théorème classique.

II. Cône. — Appliquons aux cônes une méthode semblable.

Le cône est rapporté à trois axes rectangulaires dont l'origine est le sommet. Il est défini par une directrice sphérique de rayon 1. Un point m de cette directrice est défini par son abscisse curviligne, σ.



$$x = f(\sigma), \qquad y = g(\sigma), \qquad z = h(\sigma).$$

Ce choix de variables exige

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\sigma^2,$$

ou

$$(2) \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

Il faut ajouter

$$(3) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Un point M du cône est défini par l'abscisse curviligne, σ, du point correspondant de la directrice sphérique et par le nombre algébrique ρ :

$$\rho = \frac{\overline{OM}}{\overline{Om}}.$$

Associons à ce point le point M_1 d'un plan rapporté à un axe polaire OX et défini par $\omega = \sigma$, $r = \rho$.

Pour que la correspondance ainsi créée soit parfaite, il faut supposer, par exemple, $0 \leqslant \sigma \leqslant 2\pi$, $\rho > 0$, ce qui revient à ne développer qu'une nappe du cône. Nous ferons ces hypothèses, qui ne sont nullement restrictives.

A une courbe C tracée sur le cône, correspondra une courbe C_1 tracée sur le plan.

2° La courbe C est définie par ρ fonction de σ, et un point M de cette courbe a pour coordonnées

$$X = \rho x, \qquad Y = \rho y, \qquad Z = \rho z.$$

On a, dès lors,

$$(4) \qquad \begin{cases} dX = \rho\, dx + x\, d\rho, \\ dY = \rho\, dy + y\, d\rho, \\ dZ = \rho\, dz + z\, d\rho; \end{cases}$$

d'où

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\sigma^2,$$

en tenant compte des relations (2) et (3) et de leur conséquence $x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$.

Dans le plan de C_1, on a

$$ds_1^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\sigma^2;$$

donc $ds^2 = ds_1^2$, et, par suite, en faisant les mêmes conventions de signe dans les deux cas,

$$ds = ds_1$$

Donc, à un arc AB du cône correspond un arc plan A_1B_1 de même longueur.

3° Choisissons sur C un sens de parcours qui sera, par exemple, si cela est pratique, celui des σ croissants. La demi-tangente MT à C fait avec OM un angle V défini par

$$\cos V = x\frac{dX}{ds} + y\frac{dY}{ds} + z\frac{dZ}{ds},$$

ou, d'après (4),

$$\cos V = \frac{d\rho}{ds}.$$

L'existence de $\frac{d\rho}{ds}$ entraine celle de $\frac{d\rho}{d\sigma}$ et, par suite, l'existence d'une tangente à C_1. Nous laissons

au lecteur le soin de voir qu'en coordonnées polaires, en supposant r positif, l'angle V_1 de OM_1 avec la demi-tangente orientée dans le sens des ω croissants est défini par

$$\cos V_1 = \frac{dr}{ds_1} = \frac{d\rho}{ds};$$

on a donc encore

$$V = V_1.$$

Les angles sont conservés dans le développement.

4° Si θ est le point commun aux deux tangentes MT et mt, le triangle $Mm\theta$ est conservé dans le développement, puisque la base mM l'est et aussi les deux angles à la base.

Le développement de la directrice est un cercle de rayon 1, ce qui donne une construction simple de la tangente en M_1.

On pourrait prendre aussi bien une sous-tangente polaire.

5° Enfin avec les notations précédentes, le rayon de courbure R de la courbe C en M est

$$R = \frac{(X'^2 + Y'^2 + Z'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Le rayon de courbure de C_1 en M_1 est

$$R_1 = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''|}.$$

Introduisons encore l'angle θ du plan tangent au cylindre avec le plan osculateur.

Les coefficients du plan tangent sont les mineurs du tableau

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial X}{\partial \rho} & \frac{\partial Y}{\partial \rho} & \frac{\partial Z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial X}{\partial \sigma} & \frac{\partial Y}{\partial \sigma} & \frac{\partial Z}{\partial \sigma} \end{matrix} \right\| \quad \text{ou} \quad \left\| \begin{matrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{matrix} \right\|;$$

posons $\qquad \alpha = yz' - zy', \qquad \beta = zx' - xz', \qquad \gamma = xy' - yx',$

et observons en passant que

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) - (xx' + yy' + zz')^2 = 1.$$

On a donc

$$\cos\theta = \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Or on a

$$\begin{aligned} X' &= \rho x' + \rho' x, & X'' &= \rho x'' + 2\rho' x' + \rho'' x, \\ Y' &= \rho y' + \rho' y, & Y'' &= \rho y'' + 2\rho' y' + \rho'' y, \\ Z' &= \rho z' + \rho' z, & Z'' &= \rho z'' + 2\rho' z' + \rho'' z, \end{aligned}$$

$$A = Y'Z'' - Z'Y'' = \alpha(2\rho'^2 - \rho\rho'') + \rho\rho'(yz'' - zy'') + \rho^2(y'z'' - z'y'')$$

et, en posant

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{d\sigma} = yz'' - zy'',$$

on a

$$\begin{aligned} A &= \alpha(2\rho'^2 - \rho\rho'') + \alpha'\rho\rho' + \rho^2(y'z'' - z'y''), \\ B &= \beta(2\rho'^2 - \rho\rho'') + \beta'\rho\rho' + \rho^2(z'x'' - x'z''), \\ C &= \gamma(2\rho'^2 - \rho\rho'') + \gamma'\rho\rho' + \rho^2(x'y'' - y'x''); \end{aligned}$$

donc

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 2\rho'^2 - \rho\rho'' + \rho^2 \sum (y'z'' - z'y'')(yz' - zy').$$

Or le facteur de ρ^2 s'écrit, en l'ordonnant par rapport aux dérivées secondes,

$$\sum x''[x'(yy' + zz') - x(y'^2 + z'^2)],$$

ou encore

$$\sum x''[-x(x'^2+y'^2+z'^2)] = -\sum xx''.$$

Comme

$$xx'+yy'+zz'=0,$$

on en déduit

$$xx''+yy''+zz''+x'^2+y'^2+z'^2=0, \qquad -\sum xx''=1,$$

et, par suite,

$$\cos\theta = \frac{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

De là,

$$R = R_1\cos\theta.$$

C'est la même formule, avec les mêmes conséquences, que dans le cas du cylindre.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE

Concours spécial de 1919.

2393. — *Soit, dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *les courbes* (c) *admettant pour équations*

$$y = x\frac{(a-\mu)^2}{(x-\mu)^2},$$

a est un nombre fixe; le nombre μ *pourra varier.*

1° *On choisit l'une des courbes* (c). *Se rendre compte de sa forme.*

Montrer qu'elle admet un point d'inflexion I. *Chercher les coordonnées du point* I *et l'équation de la tangente en ce point.*

Montrer qu'on peut lui mener trois tangentes par un point donné du plan.

Montrer, en particulier, qu'on peut lui mener trois tangentes de pente donnée m *et discuter leur réalité quand* m *varie.*

2° *Faire correspondre à chaque courbe* (c) *une courbe du second degré dont l'équation soit de la forme*

$$\frac{1}{y} = px+q \qquad (p \text{ et } q \text{ sont des nombres})$$

et qui jouisse de la propriété de n'avoir aucun point commun à distance finie avec la courbe (c) *considérée.*

On définit ainsi une famille de courbes du second degré (S) *dépendant du paramètre* μ. *On cherchera le lieu de leurs sommets et le lieu de leurs foyers.*

3° *Il passe, en général, deux courbes* (c) *par un point donné du plan. Dans quels cas sont-elles réelles? Peuvent-elles être confondues?*

On envisage les deux courbes (c_1) *et* (c_2) *obtenues en donnant au paramètre* μ *les valeurs* μ_1 *et* μ_2. *Montrer que les deux courbes* (c_1) *et* (c_2) *ont, à distance finie, trois points communs, à savoir : l'origine* O *des coordonnées, le point* A *de coordonnées* (a, a) *et un autre point. Vers quelle position limite tend ce dernier point en supposant que* μ_1 *reste constant et que* μ_2 *tende vers* μ_1?

4° *On associe les courbes* (c) *deux à deux de telle façon que leurs tangentes au point* A (a, a) *se correspondent dans deux faisceaux en involution donnés, c'est-à-dire qu'entre les pentes* m *et* m' *de ces tangentes il existe une relation de la forme*

$$\alpha mm' + \beta(m+m') + \gamma = 0 \qquad (\alpha, \beta, \gamma \text{ sont des nombres donnés}).$$

On demande de trouver le lieu du point commun variable aux deux courbes (c) ainsi associées.

On étudiera jusqu'au bout les cas particuliers suivants :

a. Les tangentes en A aux deux courbes (c) associées sont symétriques en direction par rapport aux axes de coordonnées;

b. Elles sont symétriques en direction par rapport aux bissectrices des axes de coordonnées;

c. Elles sont rectangulaires.

3° On considère une transformation de la forme

$$X = \frac{ux + vy + w}{u''x + v''y + w''} \qquad Y = \frac{u'x + v'y + w'}{u''x + v''y + w''}$$

(u, v, w, u', v', w', u'', v'', w'' désignent des nombres).

Cette transformation fait correspondre au point m de coordonnées x, y le point M de coordonnées X, Y.

Si le point m décrit une droite, le point M décrit une droite et inversement.

Si le point m décrit une courbe algébrique, le point M décrit une courbe algébrique de même degré. A un point double ou à un point d'inflexion de l'une de ces courbes correspondent un point double ou un point d'inflexion sur l'autre.

Justifier ces remarques; les étendre à des points à l'infini par l'emploi des coordonnées homogènes; les utiliser pour trouver simplement les coefficients u, ..., w'' de telle façon que la transformée d'une courbe (c) déterminée soit la courbe (C) d'équation $X^2Y = 1$.

Déduire de ce qui précède une solution précise de la question suivante : Discuter la réalité des trois tangentes menées d'un point P à l'une des courbes (c), quand le point P varie dans le plan.

Les coefficients u, ..., w'' entrant dans les transformations trouvées qui font correspondre à une courbe (c) la courbe (C) dépendent du paramètre μ et d'un autre paramètre.

Chercher parmi ces transformations celles pour lesquelles il n'existe qu'un point à distance finie confondu avec son transformé ($x = X$, $y = Y$) et trouver le lieu de ce point.

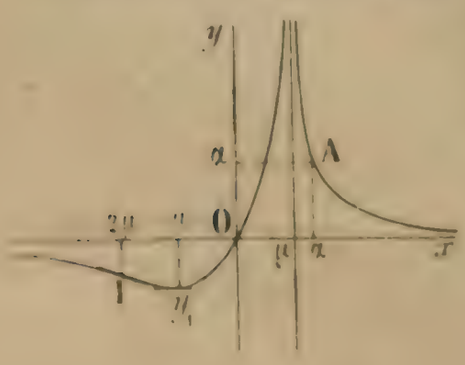
1° Considérons les courbes (c) ayant pour équations

$$y = x\frac{(a-\mu)^2}{(x-\mu)^2}.$$

Nous allons construire la courbe correspondant à une valeur particulière de μ, positive pour fixer les idées. Nous remarquons que y a toujours le même signe que x et que toutes les courbes (c) passent par l'origine et par le point A(a, a). Quand x tend vers l'infini, y tend vers 0 : la courbe est donc asymptote à l'axe des x, au-dessous à gauche, au-dessus à droite. Pour $x = \mu$, $y = +\infty$: il y a donc une autre asymptote, la droite $x = \mu$, et les deux branches infinies de la courbe s'éloignent vers le haut.

$$y' = -\frac{(a-\mu)^2(x+\mu)}{(x-\mu)^3}.$$

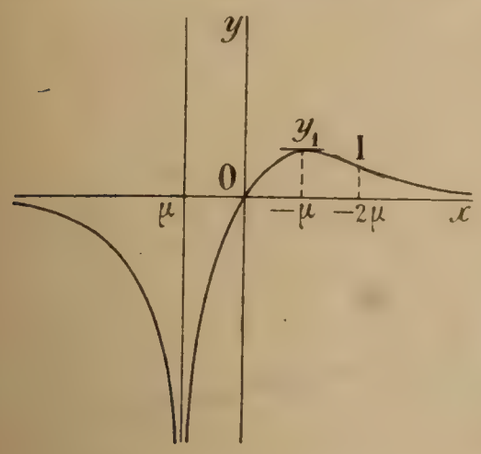
La dérivée change de signe pour $x = -\mu$ ($y' = 0$) et pour $x = +\mu$ ($y' = \infty$). Elle est négative dans le premier intervalle, positive dans le deuxième, négative dans le troisième. Par conséquent, quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$, y part de 0, décroît, passe, pour $x = -\mu$, par un minimum, $y_1 = \frac{-(a-\mu)^2}{4\mu}$, croît jusqu'à $+\infty$, enfin décroît de $+\infty$ à 0. On obtient une courbe ayant la forme ci-contre.



On aperçoit un point d'inflexion pour une valeur de x plus petite que $-\mu$. Si nous prenons la dérivée seconde :

$$y'' = \frac{2(a-\mu)^2(x+2\mu)}{(x-\mu)^4},$$

nous voyons qu'elle s'annule et change de signe pour $x = -2\mu$. Il y a donc bien un point d'inflexion I dont les coordonnées sont -2μ, $\frac{-2(a-\mu)^2}{9\mu}$. La tangente en ce point a pour pente



$$y'_1 = \frac{-(a-\mu)^2}{27\mu^2}.$$

Elle a donc pour équation

$$y + \frac{2(a-\mu)^2}{9\mu} = \frac{-(a-\mu)^2}{27\mu^2}(x+2\mu),$$

ou

$$(a-\mu)^2(x+8\mu) + 27\mu^2 y = 0.$$

Si j'avais supposé μ négatif, j'aurais obtenu une courbe ayant la forme ci-contre.

Il y a trois valeurs particulières de μ pour lesquelles la courbe (c) se décompose : 1° $\mu = 0$: $x(xy - a^2) = 0$, axe des y et hyperbole équilatère; 2° $\mu = a$: $y(x-\mu)^2 = 0$, axe des x et deux fois la droite $x = \mu$; 3° $\mu = \infty$: $z^2(y-x) = 0$, première bissectrice et deux fois la droite de l'infini.

En résumé, les courbes (c) sont des cubiques ayant un point de rebroussement à l'infini (sur Oy) et un point d'inflexion.

La tangente au point (x, y) de la courbe (c) a pour équation

$$Y - x\frac{(a-\mu)^2}{(x-\mu)^2} = -\frac{(a-\mu)^2(x+\mu)}{(x-\mu)^3}(X-x). \quad \text{ou} \quad (a-\mu)^2(x+\mu)X + (x-\mu)^3 Y - 2x^2(a-\mu)^2 = 0.$$

En écrivant qu'elle passe en un point (x_0, y_0) donné, nous aurons l'équation aux abscisses des points de contact des tangentes issues de ce point :

$$(a-\mu)^2(x+\mu)x_0 + (x-\mu)^3 y_0 - 2x^2(a-\mu)^2 = 0.$$

Cette équation est du troisième degré, en général. Donc par un point quelconque du plan on peut mener trois tangentes à une courbe (c). Ces courbes (c) sont des cubiques de troisième classe.

En particulier, en égalant y' à un nombre donné m, on a l'équation aux abscisses des points de contact des tangentes de pente m :

$$-\frac{(a-\mu)^2(x+\mu)}{(x-\mu)^3} = m, \qquad \text{ou} \qquad (a-\mu)^2(x+\mu) + m(x-\mu)^3 = 0.$$

Pour simplifier, posons $x - \mu = x'$. L'équation devient

$$mx'^3 + (a-\mu)^2 x' + 2\mu(a-\mu)^2 = 0.$$

Pour discuter la réalité des racines, nous formons le discriminant :

$$\Delta = \frac{4(a-\mu)^6 + 27 \times 4\mu^2(a-\mu)^4 m}{m^3}.$$

Cette quantité a le même signe que $\Delta' = m[(a-\mu)^2 + 27m\mu^2]$. Elle est nulle pour $m = 0$ et pour $m = -\frac{(a-\mu)^2}{27\mu^2}$ pente de la tangente d'inflexion. Si $-\frac{(a-\mu)^2}{27\mu^2} < m < 0$, Δ est négatif, les trois tangentes de pente m sont réelles. Si $m < -\frac{(a-\mu)^2}{27\mu^2}$ ou $m > 0$, Δ est positif, une seule tangente est réelle. On pouvait apercevoir ces résultats sur la figure.

2° La conique $\frac{1}{y} = px + q$ ou $pxy + qy - 1 = 0$ est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes de coordonnées et dont le centre est le point $\left(-\frac{q}{p}, 0\right)$.

Les deux courbes $y = x\frac{(a-\mu)^2}{(x-\mu)^2}$ et $\frac{1}{y} = px + q$ ont déjà en commun les points à l'infini sur Ox et sur Oy. Les abscisses des autres points d'intersection sont données par l'équation

$$\frac{(a-\mu)^2}{x(a-\mu)^2} = px + q, \qquad \text{ou} \qquad 1 - p(a-\mu)^2 x^2 - [q(a-\mu)^2 + 2\mu]x + \mu^2 = 0.$$

Pour que tous les points communs aux deux courbes soient à l'infini, il faut et il suffit que cette équation s'abaisse au degré zéro, c'est-à-dire qu'on ait

$$1 - p(a-\mu)^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad q(a-\mu)^2 + 2\mu = 0.$$

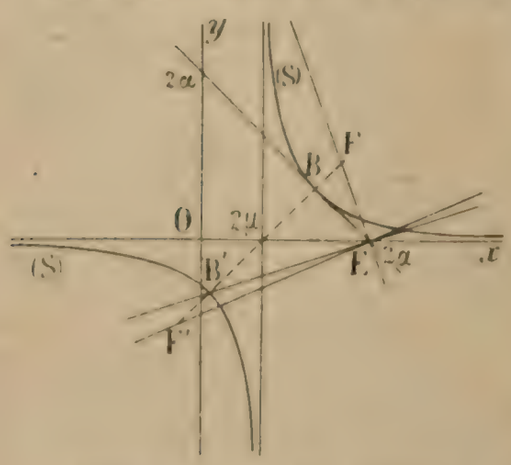
D'où

$$p = \frac{1}{(a-\mu)^2} \qquad \text{et} \qquad q = -\frac{2\mu}{(a-\mu)^2}.$$

L'hyperbole équilatère (S) a donc pour équation

$$\frac{(a-\mu)^2}{y} = x - 2\mu, \qquad \text{ou} \qquad (x-2\mu)y = (a-\mu)^2.$$

Son centre est le point $(2\mu, 0)$. Cherchons ses sommets et ses foyers. On voit immédiatement que son axe transverse est parallèle à la première bissectrice; c'est la droite $x = y + 2\mu$.



Les sommets sont les points d'intersection de cette droite avec l'hyperbole.

Leurs ordonnées sont les racines de l'équation

$$y^2 = (a-\mu)^2.$$

Les ordonnées des sommets sont donc $a-\mu$ et $\mu - a$ et leurs abscisses sont $a+\mu$ et $3\mu - a$. Quand μ varie, la conique (S) varie. Le lieu du sommet B $(x = a+\mu,\ y = a-\mu)$ est la droite $x + y - 2a = 0$; le lieu du sommet B' $(x = 3\mu - a,\ y = \mu - a)$ est la droite $x - 3y - 2a = 0$.

Soient F et F' les foyers et O' le centre. L'hyperbole étant équilatère, on a $(O'F) = (O'B)\sqrt{2}$, $(O'F') = (O'B')\sqrt{2}$. Par conséquent, les ordonnées des foyers sont $(a-\mu)\sqrt{2}$ et $(\mu - a)\sqrt{2}$ et leurs abscisses sont $(a-\mu)\sqrt{2} + 2\mu$ et $(\mu - a)\sqrt{2} + 2\mu$.

Le lieu du foyer F $[x = (a-\mu)\sqrt{2} + 2\mu,\ y = (a-\mu)\sqrt{2}]$ est la droite $y = \left(a - \frac{x-y}{2}\right)\sqrt{2}$, ou $\frac{\sqrt{2}}{2}x - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)y - a\sqrt{2} = 0$.

Le lieu du foyer F' $[x = (\mu - a)\sqrt{2} + 2\mu,\ y = (\mu - a)\sqrt{2}]$ est la droite $y = \left(\frac{x-y}{2} - a\right)\sqrt{2}$, ou $\frac{\sqrt{2}}{2}x - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)y - a\sqrt{2} = 0$.

Ces quatre droites sont tracées sur la figure. Elles concourent en E $(2a, 0)$.

3° Soit (x_0, y_0) un point donné du plan. Écrivons qu'une courbe (c) passe par ce point : $y_0 = x_0\frac{(a-\mu)^2}{(x_0-\mu)^2}$. Nous obtenons une équation du second degré en μ :

$$(y_0 - x_0)\mu^2 + 2x_0(a - y_0)\mu + x_0(x_0 y_0 - a^2) = 0.$$

Donc il passe, en général, deux courbes (c) par un point du plan. Remarquons que μ est indéterminé si le point donné est l'origine ou le point $A(a, a)$, toutes les courbes (c) passant par ces deux points.

Formons le discriminant :

$$\delta = x_0^2(a - y_0)^2 - x_0(x_0 y_0 - a^2)(y_0 - x_0) = x_0 y_0 (x_0 - a)^2.$$

Les deux courbes seront réelles si le point donné est situé dans le premier ou dans le troisième angle des axes de coordonnées. Elles seront imaginaires s'il est dans l'un des deux autres.

L'équation a ses deux racines confondues dans trois cas :

1° $x_0 = 0$, racine double : $\mu = 0$;

2° $y_0 = 0$, racine double : $\mu = a$;

3° $x_0 = a$, racine double : $\mu = a$. Dans ces trois cas, la cubique (c) se décompose, comme nous l'avons vu. Par conséquent, dans tous les cas où les deux courbes (c) qui passent par un point sont confondues, elles se décomposent.

Considérons les deux courbes

$$(c_1) \quad y = x\frac{(a-\mu_1)^2}{(x-\mu_1)^2} \qquad \text{et} \qquad (c_2) \quad y = x\frac{(a-\mu_2)^2}{(x-\mu_2)^2}.$$

Les abscisses des points communs à distance finie sont données par l'équation

$$x\frac{(a-\mu_1)^2}{(x-\mu_1)^2} = x\frac{(a-\mu_2)^2}{(x-\mu_2)^2}.$$

Cette équation se décompose en trois autres :

1° $x = 0$, d'où $y = 0$: c'est l'origine;

2° $\dfrac{x-\mu_1}{a-\mu_1} - \dfrac{x-\mu_2}{a-\mu_2} = 0$, d'où $x = a$, et $y = a$: c'est le point $A(a,a)$;

3°
$$\frac{x-\mu_1}{a-\mu_1} + \frac{x-\mu_2}{a-\mu_2} = 0.$$

Cette équation donne l'abscisse du troisième point commun :

$$x_3 = \frac{a(\mu_1+\mu_2) - 2\mu_1\mu_2}{2a-(\mu_1+\mu_2)}.$$

Lorsque μ_2 tend vers μ_1, x_3 tend vers $\dfrac{a \times 2\mu_1 - 2\mu_1^2}{2a - 2\mu_1} = \mu_1$ et la position limite du point est le point de rebroussement à l'infini.

4° La tangente à la courbe (c) au point A a pour pente

$$m = y'_A = -\frac{a+\mu}{a-\mu}.$$

La relation entre m et m' se traduit par une relation entre les paramètres μ et μ' des deux courbes (c) considérées ;

$$\alpha\frac{a+\mu}{a-\mu}\cdot\frac{a+\mu'}{a-\mu'} - \beta\left(\frac{a+\mu}{a-\mu} + \frac{a+\mu'}{a-\mu'}\right) + \gamma = 0, \quad (\alpha+2\beta+\gamma)\mu\mu' + a(\alpha-\gamma)(\mu+\mu') + a^2(\alpha-2\beta+\gamma) = 0;$$

μ et μ' sont liés aussi par une relation involutive.

Posons $\mu + \mu' = u$, $\mu\mu' = v$. Les coordonnées du point variable M commun aux deux courbes sont $x = \dfrac{au-2v}{2a-u}$, $y = x\dfrac{(a-\mu)^2}{(x-\mu)^2}$.

Or, nous avons tiré x de la relation $\dfrac{x-\mu}{a-\mu} + \dfrac{x-\mu'}{a-\mu'} = 0$. Cette relation peut s'écrire

$$\frac{a-\mu}{x-\mu} = -\frac{a-\mu'}{x-\mu'} = \frac{2a-(\mu+\mu')}{\mu'-\mu},$$

d'où

$$y = \frac{au-2v}{2a-u} \times \frac{(2a-u)^2}{u^2-4v} = \frac{(au-2v)(2a-u)}{u^2-4v}.$$

On obtiendra le lieu de M en éliminant u et v entre les trois équations

$$\begin{cases} x = \dfrac{au - 2v}{2a - u}, \\ y = \dfrac{(au - 2v)(2a - u)}{u^2 - 4v}, \\ (\alpha + 2\beta + \gamma)v + a(\alpha - \gamma)u + a^2(\alpha - 2\beta - \gamma) = 0. \end{cases}$$

On résoudra, par rapport à u et v, la première et la troisième équations, qui sont linéaires en u et v, et on portera les valeurs trouvées dans la deuxième. On aura ainsi l'équation du lieu.

Cas particuliers : a) La relation involutive est $m + m' = 0$. Par conséquent, il suffit de prendre $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$. La troisième équation se réduit à $v = a^2$, d'où $x = \dfrac{au - 2a^2}{2a - u} = -a$.

Le lieu du point M est la droite $x + a = 0$.

b) La somme des inclinaisons des deux tangentes est égale à $\dfrac{\pi}{2}$. Par conséquent, la relation entre les pentes est $mm' = 1$. Il suffit de prendre $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = -1$. La troisième équation donne alors $u = 0$, d'où $y = \dfrac{-4av}{-4v} = a$.

Le lieu du point M est la droite $y = a$.

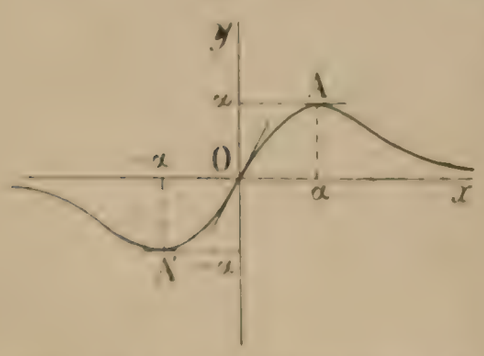
c) Si les tangentes sont rectangulaires, on a $mm' = -1$. Il faut prendre alors $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$. La troisième équation se réduit à $v = -a^2$. En portant cette valeur dans la première équation :

$$x = \frac{au + 2a^2}{2a - u} = a\frac{2a + u}{2a - u}, \qquad \text{d'où} \qquad u = 2a\frac{x - a}{x + a}.$$

Remplaçons u et v par leurs valeurs dans la deuxième équation :

$$y = a\frac{4a^2 - u^2}{4a^2 + u^2} = a\frac{1 - \dfrac{(a - x)^2}{(a + x)^2}}{1 + \dfrac{(a - x)^2}{(a + x)^2}} = \frac{2a^2x}{a^2 + x^2}.$$

Construisons la courbe $y = \dfrac{2a^2x}{a^2 + x^2}$, lieu du point M. C'est une cubique. Elle est symétrique par rapport à l'origine; il suffit donc de l'étudier dans l'intervalle $(0, +\infty)$. La courbe passe par l'origine et elle y est tangente à la droite $y = 2x$. Elle passe aussi par le point $A(a, a)$. Enfin y est constamment positif dans l'intervalle considéré et, quand x tend vers $+\infty$, y tend vers 0 : la courbe est asymptote à l'axe des x.



$$y' = \frac{2a(a^2 - x^2)}{(a^2 + x^2)^2}.$$

La dérivée s'annule pour $x = a$ (nous supposons a positif pour fixer les idées); elle est positive pour $x < a$, négative pour $x > a$. Par conséquent, la courbe présente un maximum au point A. Elle a la forme ci-dessus, une fois complétée par symétrie.

5° Considérons la transformation homographique.

$$X = \frac{ux + vy + w}{u'x + v'y + w'}, \qquad Y = \frac{u'x + v'y + w'}{ux + vy + w},$$

qui fait correspondre au point $m(x, y)$ le point $M(X, Y)$.

Cette transformation appliquée à une équation algébrique en x et y ne modifie pas son degré. Par conséquent, à une droite correspond une droite, à une courbe algébrique de degré n correspond une

courbe algébrique de même degré, et inversement (car les formules inverses de transformation sont de la même forme que les formules directes).

A un point commun à une droite (d) et à une courbe (c) correspond un point commun à la droite (D) et à la courbe (C). Si nous supposons qu'un deuxième point d'intersection de la droite (d) avec la courbe (c) vient se confondre avec le premier, il en sera de même pour les transformés et nous aurons le résultat suivant : à la tangente en un point de (c) correspond la tangente au point correspondant de (C). Autrement dit : à un élément de contact correspond un élément de contact, point à point, droite à droite. Par conséquent à un point double ou à un point d'inflexion correspondent un point double ou un point d'inflexion. Ces remarques s'étendent à des points à l'infini.

Nous allons démontrer directement ces résultats par le calcul en nous servant des coordonnées homogènes

$$\frac{X}{Z}=\frac{u\frac{x}{z}+v\frac{y}{z}+w}{u''\frac{x}{z}+v''\frac{y}{z}+w''},\qquad \frac{Y}{Z}=\frac{u'\frac{x}{z}+v'\frac{y}{z}+w'}{u''\frac{x}{z}+v''\frac{y}{z}+w''}.$$

d'où

$$\frac{X}{ux+vy+wz}=\frac{Y}{u'x+v'y+w'z}=\frac{Z}{u''x+v''y+w''z}.$$

Nous pouvons prendre, pour définir la transformation,

$$X=ux+vy+wz,\qquad Y=u'x+v'y+w'z,\qquad Z=u''x+v''y+w''z.$$

Soit $f(x,y,z)=0$ l'équation homogène d'une courbe (c), $F(X,Y,Z)=0$ l'équation homogène de sa transformée (C). On a, par rapport à x, y, z, l'identité

$$f(x,y,z)\equiv F(X,Y,Z).$$

Dérivons les deux membres successivement par rapport à x, y, z :

$$f'_x=uF'_X+u'F'_Y+u''F'_Z,\qquad f'_y=vF'_X+v'F'_Y+v''F'_Z,\qquad f'_z=wF'_X+w'F'_Y+w''F'_Z.$$

Si (x,y,z) est un point double de (c), on a

$$f'_x=0,\qquad f'_y=0,\qquad f'_z=0.$$

D'où

$$F'_X=0,\qquad F'_Y=0,\qquad F'_Z=0,$$

et le point (X, Y, Z) est un point double de (c). On peut faire d'ailleurs le raisonnement inverse.

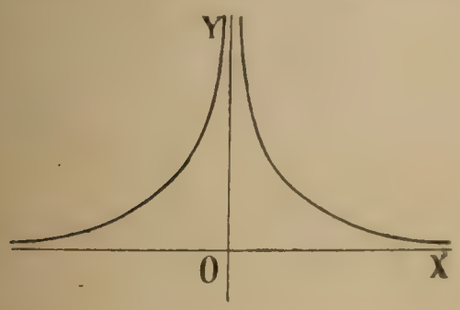
Considérons maintenant les deux déterminants

$$h=\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz}\\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz}\\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{z^2}\end{vmatrix},\qquad H=\begin{vmatrix} F''_{X^2} & F''_{XY} & F''_{XZ}\\ F''_{YX} & F''_{Y^2} & F''_{YZ}\\ F''_{ZX} & F''_{ZY} & F''_{Z^2}\end{vmatrix};$$

on vérifie facilement qu'on a l'identité

$$h\equiv H\left(\begin{vmatrix} u & u' & u''\\ v & v' & v''\\ w & w' & w''\end{vmatrix}\right)^2.$$

Si (x,y,z) est un point d'inflexion de (c), on a $h=0$, d'où $H=0$ et le point (X, Y, Z) est un point d'inflexion de (C). Inversement, si H est nul, h est nul.



Ces raisonnements sont valables pour des points à l'infini.

Considérons la courbe (C) d'équation $X^2Y=1$.

Elle est symétrique par rapport à OY, Y est toujours positif. Quand X croît de 0 à $+\infty$, $Y=\frac{1}{X^2}$ décroît constamment de $+\infty$ à 0. La courbe a la forme ci-contre, une fois complétée par symétrie. Elle présente un point d'inflexion à l'infini sur OX et un point de rebroussement à l'infini sur OY.

Supposons que la transformée de la courbe (c) $y = x\frac{(a-\mu)^2}{(x-\mu)^2}$ soit la courbe (C). D'après les remarques précédentes :

1° à la tangente de rebroussement $x - \mu = 0$ correspond la tangente de rebroussement $X = 0$; on a donc

$$ux + vy + w = u(x - \mu);$$

2° à la tangente d'inflexion $(a-\mu)^2(x + 8\mu) + 27\mu^2 y = 0$ correspond la tangente d'inflexion $Y = 0$; on a donc

$$u'x + v'y + w' = \frac{u'}{(a-\mu)^2}[(a-\mu)^2(x + 8\mu) + 27\mu^2 y];$$

3° à la droite $x + 2\mu = 0$, qui joint le point d'inflexion au point de rebroussement, correspond la droite de l'infini $Z = 0$; on a donc

$$u''x + v''y + w'' = u''(x + 2\mu).$$

Par conséquent, la transformation sera de la forme

$$X = \alpha\frac{x-\mu}{x+2\mu}; \qquad Y = \beta\frac{(a-\mu)^2(x+8\mu) + 27\mu^2 y}{x+2\mu},$$

en posant

$$\frac{u}{u''} = \alpha, \qquad \frac{u'}{u''(a-\mu)^2} = \beta.$$

Pour déterminer α et β, j'écris que le transformé de l'origine est un point de la courbe (C) :

$$X_0 = -\frac{\alpha}{2}, \qquad Y_0 = 4\beta(a-\mu)^2,$$

d'ou

$$\frac{\alpha^2}{4} \times 4\beta(a-\mu)^2 = 0, \qquad \beta = \frac{1}{\alpha^2(a-\mu)^2}.$$

La transformation envisagée est déterminée autant qu'elle peut l'être par les formules

$$X = \alpha\frac{x-\mu}{x+2\mu}, \qquad Y = \frac{1}{\alpha^2}\frac{(a-\mu)^2(x+8\mu) + 27\mu^2 y}{(a-\mu)^2(x+2\mu)}.$$

En effet, soit (x, y) un point de la courbe (c), (X, Y) son transformé. On voit immédiatement que, dans le produit X^2Y, le dernier coefficient inconnu, α, s'élimine. Par conséquent, il est arbitraire; quel que soit α, on aura $X^2Y = 1$ et le point (X, Y) sera sur la courbe (C).

La tangente au point (x, y) de la courbe $X^2Y = 1$ a pour équation

$$2xyX + x^2Y - 3 = 0.$$

Écrivons qu'elle passe par le point (X_0, Y_0) du plan $2xyX_0 + x^2Y_0 - 3 = 0$.

En remplaçant xy par $\frac{1}{x}$, nous aurons l'équation aux abscisses des points de contact des tangentes issues du point (X_0, Y_0) :

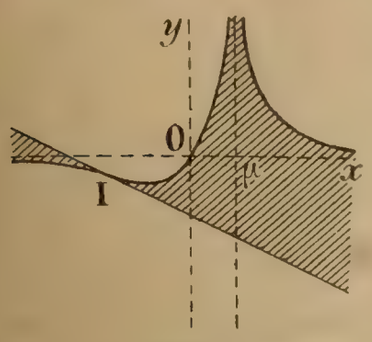
$$Y_0x^3 - 3x + 2X_0 = 0.$$

On peut mener par un point du plan trois tangentes à la courbe (c). On devait s'y attendre : le point (X_0, Y_0) est le transformé d'un point (x_0, y_0); les trois tangentes menées par (X_0, Y_0) à la courbe (C) sont les transformées des trois tangentes qu'on peut mener par le point (x_0, y_0) à la courbe (c). Par conséquent, la discussion de la réalité des trois tangentes menées d'un point P à la courbe (c) revient à celle de la réalité des trois tangentes menées d'un point P' à la courbe (C). La condition pour que l'équation aux abscisses ait ses trois racines réelles est

$$-27.4.\frac{1}{Y_0^3} + 27.4\frac{X_0^2}{Y_0} < 0 \qquad Y_0(X_0^2Y_0 - 1) < 0.$$

Cette inégalité exprime que le point (X_0, Y_0) se trouve dans la région du plan comprise entre (C) et

l'axe des X. La courbe (c) et sa tangente d'inflexion partagent le plan en cinq régions. En prenant le point (x_0, y_0) à l'infini et se reportant à la discussion de la réalité des tangentes de pente m, on arrive au résultat suivant : si P se trouve dans une des régions hachurées, les trois tangentes issues de P sont réelles; sinon une seule est réelle.

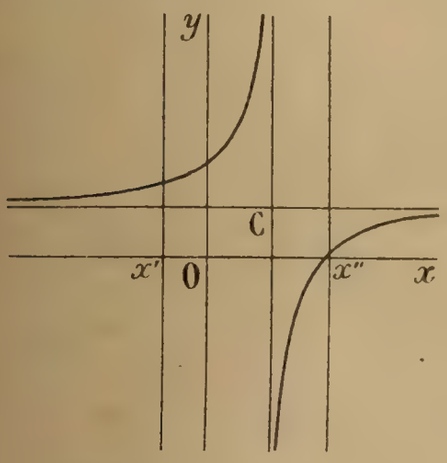


Les formules de transformation trouvées dépendent de deux paramètres : μ et α. Écrivons que le point (x, y) est confondu avec son transformé (X, Y) :

$$(1) \qquad x = \alpha \frac{x-\mu}{x+2\mu},$$

$$(2) \qquad y = \frac{1}{\alpha^2} \frac{(a-\mu)^2(x+8\mu)+27\mu^2 y}{(a-\mu)^2(x+2\mu)}.$$

Ces deux équations en x et y représentent deux coniques qui se coupent en quatre points. La première se compose de deux droites parallèles à l'axe des y $(x = x', x = x'')$. La seconde est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes de coordonnées. Le point à l'infini sur Oy est un point double de l'intersection. Il y a donc en général à distance finie deux points confondus avec leurs transformés.



Pour qu'il n'y en ait qu'un, il faudrait en toute rigueur que l'autre aille à l'infini. Ce cas se présentera si l'une des deux droites parallèles coïncide avec l'asymptote de l'hyperbole qui est parallèle à Oy. Celle-ci s'obtient en faisant $y = \infty$ dans la deuxième équation. Son abscisse est donnée par

$$\alpha^2(a-\mu)^2(x+2\mu) - 27\mu^2 = 0, \qquad x = \frac{27\mu^2 - 2\mu\alpha^2(a-\mu)^2}{\alpha^2(a-\mu)^2}.$$

J'écris que cette valeur de x vérifie la première équation :

$$\frac{27\mu^2 - 2\mu\alpha^2(a-\mu)^2}{\alpha^2(a-\mu)^2} = \alpha \frac{27\mu^2 - 3\mu\alpha^2(a-\mu)^2}{27\mu^2}, \qquad (a-\mu)^4\alpha^5 - 9\mu(a-\mu)^2\alpha^3 - 18\mu^2(a-\mu)^2\alpha^2 + 243\mu^3 = 0.$$

Cette équation, du cinquième degré en α, est insoluble dans le cas général. Le point de vue où nous nous sommes placés est donc peu intéressant.

En fait lorsque les deux points, tout en restant à distance finie, viennent se confondre, il n'y a plus qu'un point du plan à distance finie qui soit confondu avec son transformé. Ce cas se présentera si les deux droites parallèles sont confondues : $x' = x''$. Écrivons que l'équation $x^2 + (2\mu - \alpha)x + \alpha\mu = 0$ a ses deux racines égales :

$$(2\mu - \alpha)^2 - 4\alpha\mu = 0, \qquad \alpha^2 - 8\mu\alpha + 4\mu^2 = 0,$$

d'où

$$\alpha = 4\mu \pm 2\sqrt{3}\mu = 2(2 \pm \sqrt{3})\mu.$$

Il y a deux systèmes de valeurs de α en fonction de μ; par conséquent, on obtiendra deux lieux correspondant au double signe devant le radical. Posons $\pm\sqrt{3} = \varepsilon$, $\varepsilon^2 = 3$;

$$\alpha = 2(2+\varepsilon)\mu.$$

La racine double est alors

$$x = \frac{\alpha - 2\mu}{2} = (1+\varepsilon)\mu.$$

Remplaçons α et x par leurs valeurs dans l'équation (2) :

$$y = \frac{(a-\mu)^2(x+8\mu)}{\alpha^2(a-\mu)^2(x+2\mu) - 27\mu^2} = \frac{(a-\mu)^2(9+\varepsilon)\mu}{4(2+\varepsilon)^2(3+\varepsilon)(a-\mu)^2\mu^3 - 27\mu^2} = \frac{(a-\mu)^2(9+\varepsilon)}{4(33+19\varepsilon)(a-\mu)^2\mu^2 - 27\mu}.$$

Nous obtenons deux courbes par leurs équations paramétriques en fonction de μ :

$$\begin{cases} x = (1 + \varepsilon)\mu, \\ y = \dfrac{(a-\mu)^2(9+\varepsilon)}{4(33+19\varepsilon)(a-\mu)^2\mu^2 - 27\mu}. \end{cases}$$

Ce sont deux courbes algébriques unicursales du cinquième degré (la représentation est évidemment propre). Par conséquent le lieu total est du dixième degré.

MAZET, élève du lycée Louis-le-Grand.

Bonnes solutions : MM. G. Lach, à Douai; P. Robert, école normale supérieure de Saint-Cloud.
Solutions satisfaisantes : MM. G. R., à Paris; J. Favard; F. Millon, à Paris.

QUESTIONS PROPOSÉES

2513. — On considère un paraboloïde hyperbolique,

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x,$$

rapporté à trois axes rectangulaires, et les deux paraboles principales des plans xOy et xOz, ainsi que leurs cercles osculateurs au point O, C_1 et C_2. Le cercle C_2, tournant autour de l'axe du cercle C_1, engendre un tore, T. Trouver l'équation de ce tore.

On suppose ensuite les deux paramètres p et q égaux à 1; former les équations des projections (γ_1), (γ_2) et (γ_3) de la courbe commune au tore et au paraboloïde, sur les plans xOy, xOz et yOz.

Montrer que les deux courbes (γ_1) et (γ_2) se décomposent chacune en deux ellipses, et que chacune de ces ellipses est la projection d'un cercle situé dans un plan directeur du paraboloïde.

La courbe (γ_3) se décompose en deux quartiques : l'une est imaginaire et n'a qu'un point réel; l'autre se compose de deux boucles dont on demande l'aire. Construire les tangentes au point double et les tangentes parallèles aux axes.

(P. GENEVEY, lycée de Dijon.)

2514. — On considère un système de forces dont les éléments de réduction à l'origine sont 0, 0, a, pour la résultante générale et 0, 0, b, pour le moment résultant.

1° Former les composantes du moment MM', relatif à un point quelconque, M(x, y, z), de l'espace. Étudier la correspondance qui existe entre le point M et le point M'(x', y', z').

2° Trouver le lieu des points M pour lesquels la droite MM' passe en un point donné, P(α, β, γ). Ce lieu est une cubique (C). Former le cône engendré, dans ces conditions, par la droite MM'.

3° Trouver le lieu des points P pour lesquels ce cône passe par un point donné A, du plan des xy. Ce lieu est une quadrique. Lieu des ombilics de cette quadrique quand le point A varie.

4° Former les équations de la tangente à la cubique (C) au point P, et l'équation du complexe engendré par cette tangente quand le point P décrit tout l'espace.

E. H.

2515. — On considère un polynome du quatrième degré,

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + f,$$

dont les racines sont α, β, γ, δ, et les points racines, sur Ox, A, B, C, D.

1° Trouver la condition pour que le point O soit le milieu de l'un des segments AB, AC, ...

2° Le polynome étant quelconque, on déplace l'origine, on amène l'origine en un point O', $OO' = h$, tel que ceci soit réalisé. Montrer qu'il y a six valeurs de h pour lesquelles il en est ainsi, et que l'équation qui donne h peut, à l'aide de transformations simples, s'abaisser au troisième degré.

3° Trouver, par cette voie, la condition pour que les racines soient harmoniques, c'est-à-dire que

$$\overline{O'A}^2 = O'C.O'D.$$

E. H.

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRE ET ANALYSE

2363. — *On considère la fonction*

$$y = x^2 L(1+x) - x;$$

calculer les dérivées première, seconde et troisième. Étudier les variations de cette fonction.

Mêmes questions pour

$$y = \frac{L(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^2},$$

$$y = x^2 L\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x + \frac{1}{2}.$$

1° Considérons la fonction

$$y = x^2 L(1+x) - x;$$

elle n'est définie que pour $x > -1$, à droite de -1; elle est continue pour ces valeurs.

Pour $x = -1 + \varepsilon$, nous avons $y = -\infty$; pour $x = 0$, $y = 0$; et, enfin, pour $x = +\infty$, y est infini, car le premier terme, $x^2 L(1+x)$, est égal à x^2 multiplié par un facteur qui devient égal à $+\infty$; ce terme l'emporte sur le second; la fonction est infinie et au-dessus de la parabole $y = x^2$. La branche infinie est parabolique dans la direction Oy.

Prenons les dérivées; nous avons :

$$y' = 2x L(1+x) + \frac{x^2}{1+x} - 1; \qquad y'' = 2L(1+x) + \frac{4x}{1+x} - \frac{x^2}{(1+x)^2};$$

$$y''' = \frac{2}{1+x} + \frac{4}{1+x} - \frac{4x}{(1+x)^2} - \frac{2x}{(1+x)^2} + \frac{2x^2}{(1+x)^3},$$

$$y''' = \frac{6}{(1+x)} - \frac{6x}{(1+x)^2} + \frac{2x^2}{(1+x)^3} = \frac{2(x^2+3x+3)}{(1+x)^3}.$$

Comme $1+x$ est toujours positif et que le trinome x^2+3x+3 a ses racines imaginaires, nous voyons que y''' est toujours positif.

Alors y'' est une fonction croissante; comme elle est nulle pour $x = 0$, elle est négative dans le premier intervalle, de -1 à 0, et positive dans le second, de 0 à $+\infty$.

La fonction y' est donc d'abord décroissante, puis, croissante; pour $x = -1 + \varepsilon$, elle est égale à $+\infty$; pour $x = 0$, à -1; et, pour $x = +\infty$, elle est égale à $+\infty$, car il est visible que le premier terme l'emporte sur le second; d'ailleurs, le second est aussi égal à $+\infty$.

Il résulte de là que la dérivée y' s'annule entre -1 et 0 et aussi entre 0 et $+\infty$; la première racine, α, est suffisamment déterminée; pour mieux séparer la seconde, nous ferons $x = 1$; nous voyons que $y'(1)$ est positive; par conséquent la deuxième racine, β, est comprise entre 0 et 1.

De -1 à α, y' est positive, la fonction est croissante; de α à β, y' est négative, la fonction est décroissante; et enfin, de β à $+\infty$, y' est positive, la fonction est croissante.

La fonction est donc représentée par la courbe (1) que l'on peut préciser avec quelques détails : par exemple, la tangente à l'origine a pour coefficient angulaire -1 et ce point est un point d'inflexion.

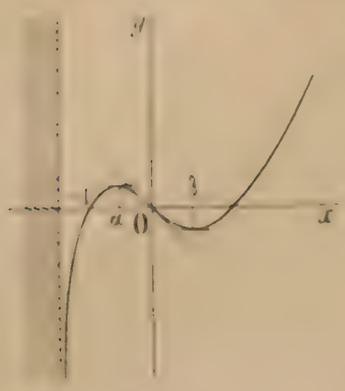


Fig. 1.

Le tracé que nous venons d'indiquer montre que l'équation $y=0$ a trois racines, y compris la racine 0.

2° Étudions la fonction

$$y=\frac{L(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x^2}.$$

Cette fonction n'est définie que pour $x>-1$; elle est continue pour ces valeurs de x.

Pour $x=-1+\varepsilon$, le logarithme est infini, la fonction y est égale à $-\infty$.

Pour $x=0$, indétermination qui se lève par le développement de $L(1+x)$ en série; nous trouvons ainsi

$$y=\frac{\frac{x^3}{3}\cdots}{x^2}.$$

nous voyons que y est nul.

Pour $x=+\infty$, le numérateur est infini comme le terme $\frac{x^2}{2}$; la fonction est égale à $\frac{1}{2}$.

Prenons la dérivée; nous aurons

$$y'=-\frac{2L(1+x)}{x^3}+\frac{1}{x^2(1+x)}+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^3}\left[x+\frac{x}{1+x}-2L(1+x)\right],$$

et nous sommes ramenés à l'étude de la fonction

$$z=x+\frac{x}{1+x}-2L(1+x);$$

nous avons

$$z'=1+\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{2}{1+x}=\left(\frac{1}{1+x}-1\right)^2=\frac{x^2}{(1+x)^2}.$$

la fonction z' est toujours positive, la fonction z est croissante. Or, pour $x=0$, elle est nulle; elle est donc négative dans le premier intervalle, de -1 à 0, et, positive dans le second, de 0 à $+\infty$. Par conséquent, la fonction $y'=\frac{z}{x^3}$ est toujours positive, et la fonction y est toujours croissante. Pour $x=0$, y' est indéterminé; en prenant le quotient des dérivées, nous avons

Fig. 2.

$$\frac{\frac{x^2}{(1+x)^2}}{3x^2}=\frac{1}{3(1+x)^2};$$

la limite, pour $x=0$, est égale à $\frac{1}{3}$, la tangente à l'origine a pour coefficient angulaire $\frac{1}{3}$. La courbe est donnée par la figure 2.

3° Il nous reste à étudier la fonction

$$y=x^2L\left(1+\frac{1}{x}\right)-x+\frac{1}{2}.$$

Cette fonction n'est définie que si $1+\frac{1}{x}$ est positif, $x(1+x)>0$; elle n'est pas définie entre -1 et 0; elle est définie dans tout autre intervalle, et continue.

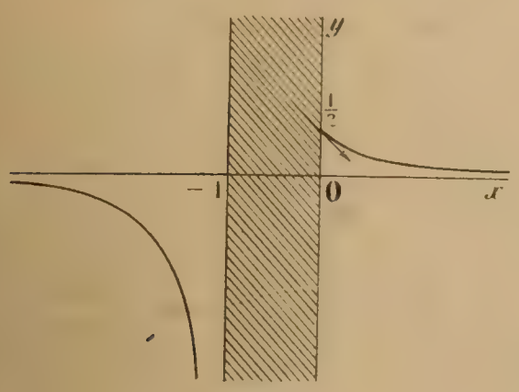


Fig. 3.

Pour $x=\pm\infty$, développons $L\left(1+\frac{1}{x}\right)$ en série; nous aurons

$$y=x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}\cdots\right)-x+\frac{1}{2}=\frac{1}{3x}\cdots;$$

la fonction est nulle, elle est négative pour $x=-\infty$ et positive pour $x=+\infty$, la courbe est asymptote à Ox.

Pour $x=-1-\varepsilon$, le logarithme est égal à $-\infty$, la fonction elle-même est égale à $-\infty$.

Pour $x=0$, le terme $x^2L\left(1+\frac{1}{x}\right)$ s'écrit

$$x^2L(1+x)-x^2Lx;$$

chaque partie tend vers 0; donc y a pour limite $\frac{1}{2}$.

Prenons maintenant les trois premières dérivées, comme il est indiqué; nous aurons successivement :

$$y'=2xL\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{x}{1+x}-1,\qquad y''=2L\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2},$$

$$y'''=-\frac{2}{x(1+x)}+\frac{2}{(1+x)^2}+\frac{2}{(1+x)^3},$$

ensuite,

$$y'''=\frac{2x+2x(1+x)-2(1+x)^2}{x(1+x)^3}=\frac{-2}{x(1+x)^3}.$$

Or, dans les intervalles que nous étudions, $x(1+x)^3$ est positif; donc la fonction y''' est toujours négative. Par suite la fonction y'' décroît; pour $x=-\infty$, elle est nulle; donc elle est négative dans le premier intervalle, de $-\infty$ à -1; pour $x=+\infty$, elle est nulle encore; elle est donc positive dans le second intervalle, de 0 à $+\infty$.

Pour $-\infty$, la dérivée y' est nulle, comme il est facile de s'en assurer en développant $L\left(1+\frac{1}{x}\right)$ en série; par conséquent, y' est négative depuis $-\infty$ jusqu'à -1. Pour $x=+\infty$, elle est nulle aussi, et, comme elle croît dans le second intervalle, de 0 à $+\infty$, elle est négative encore dans tout cet intervalle.

La fonction y est toujours décroissante; elle est représentée par la figure 3. La tangente au point d'arrêt, $x=0$, $y=\frac{1}{2}$, est parallèle à la deuxième bissectrice.

Remarque. — Pour la deuxième fonction, nous n'avons pas calculé y'', ni y'''; ce sont de purs exercices de calcul ne présentant aucun intérêt particulier.

Assez bonnes solutions : MM. L. Vuichard, à Vuillecin; P. Bernard, à Paris; M. N., à Toulouse.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2348. — *On considère la courbe gauche définie en coordonnées rectangulaires par les équations suivantes où t désigne un paramètre variable*

$$x = (1 - t^2)\sin t - 2t\cos t + 2\sin t,$$
$$y = 2t\sin t + 2\cos t,$$
$$z = (1 + t^2)\sin t + 2t\cos t - 2\sin t.$$

1° *Déterminer en fonction de t les cosinus directeurs α, β, γ de la tangente, et la longueur d'arc comptée à partir du point $t = 0$.*

2° *En appliquant les formules de Serret et Frenet, calculer les cosinus directeurs de la normale principale et la longueur du rayon de courbure.*

(*Certificat de Mathématiques générales, Rennes, novembre* 1913.)

1° On a

$$dx = (1 - t^2)\cos t\,dt, \qquad dy = 2t\cos t\,dt, \qquad dz = (1 + t^2)\cos t\,dt;$$

en faisant la somme des carrés, on obtient

$$ds^2 = 2(1 + t^2)^2\cos^2 t\,dt^2,$$

ou

$$ds = \pm\sqrt{2}(1 + t^2)\cos t\,dt.$$

Prenons pour sens positif des abscisses curvilignes le sens des t croissants; $\frac{ds}{dt}$ doit être positif, on prendra

$$ds = \varepsilon\sqrt{2}(1 + t^2)\cos t\,dt,$$

ε étant égal à ± 1 et ayant le signe de $\cos t$.

Ceci peut s'écrire

$$ds = \varepsilon\sqrt{2}\,dz, \qquad \text{d'où} \qquad s = \varepsilon\sqrt{2}z + C.$$

Comme, pour $t = 0$, s doit être nul, on a $C = 0$ et, par suite,

$$s = \varepsilon\sqrt{2}z = \varepsilon\sqrt{2}(1 + t^2)\sin t + 2t\cos t - 2\sin t).$$

D'autre part, les cosinus directeurs de la tangente sont

$$\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \qquad \beta = \frac{dy}{ds} = \varepsilon\sqrt{2}\cdot\frac{t}{1 + t^2}, \qquad \gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Comme γ est constant, la tangente fait un angle constant avec Oz : la courbe est une hélice.

2° On trouve aisément

$$d\alpha = -\varepsilon\frac{2\sqrt{2}t}{(1 + t^2)^2}dt, \qquad d\beta = \varepsilon\sqrt{2}\frac{1 - t^2}{(1 + t^2)^2}dt, \qquad d\gamma = 0,$$

et, en divisant par ds,

$$\frac{d\alpha}{ds} = -\frac{2t}{(1 + t^2)^3\cos t}, \qquad \frac{d\beta}{ds} = \frac{1 - t^2}{(1 + t^2)^3\cos t}, \qquad \frac{d\gamma}{ds} = 0.$$

Le rayon de courbure R est donné par la formule

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2 = \frac{1}{(1 + t^2)^6\cos^2 t},$$

ou

$$R = (1 + t^2)^3|\cos t| = \varepsilon(1 + t^2)^3\cos t.$$

Les cosinus directeurs α', β', γ' de la normale principale sont alors

$$\alpha' = R\frac{d\alpha}{ds} = -\varepsilon\frac{2t}{1+t^2}, \qquad \beta' = R\frac{d\beta}{ds} = \varepsilon\frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \gamma' = 0.$$

A. O. GUIBERT, étudiant à Nantes.

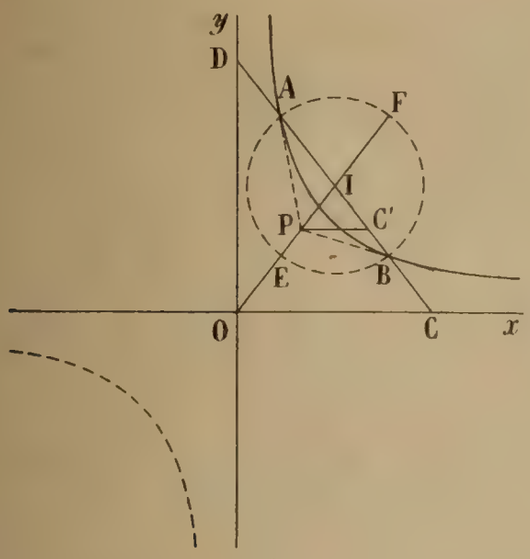
Bonnes solutions par MM. Paul Bernard, à Paris; R. Dufour, à Givet; René Fardin; H. Heinemann, instituteur à Levallois; G. Lach, à Douai; L. Long, à Châtellerault; Ch. Pacé, à bord de la *Ville d'Ys*; Henri Picard, école normale de Parthenay; Marcel Vasseur, étudiant à Lille.

2364. — *Le centre d'une hyperbole équilatère et le pôle d'une corde* AB *de cette conique sont conjugués par rapport au cercle ayant pour diamètre* AB.

Considérons l'hyperbole équilatère $xy = a^2$, et le point $P(\alpha, \beta)$. La polaire de ce point, la droite AB, a pour équation

$$\alpha y + \beta x - 2a^2 = 0;$$

elle rencontre l'hyperbole aux deux points A et B, qui ont pour coordonnées (x', y') et (x'', y''). L'équation du cercle décrit sur AB comme diamètre est



$$(x - x')(x - x'') + (y - y')(y - y'') = 0,$$

ou

$$x^2 + y^2 - (x' + x'')x - (y' + y'')y + x'x'' + y'y'' = 0.$$

Formons alors l'équation aux abscisses des points de rencontre de la droite AB avec l'hyperbole; pour cela, remplaçons y par $\frac{a^2}{x}$ dans l'équation de la droite; nous aurons

$$\beta x^2 - 2a^2 x + \alpha a^2 = 0;$$

par suite, $$x' + x'' = \frac{2a^2}{\beta}, \qquad x'x'' = \frac{\alpha a^2}{\beta}.$$

Nous aurons de même

$$y' + y'' = \frac{2a^2}{\alpha}, \qquad y'y'' = \frac{\beta a^2}{\alpha},$$

et l'équation du cercle sera

$$x^2 + y^2 - \frac{2a^2 x}{\beta} - \frac{2a^2 y}{\alpha} + \frac{\alpha a^2}{\beta} + \frac{\beta a^2}{\alpha} = 0.$$

La polaire de l'origine par rapport à ce cercle est $f'_z = 0$ ou,

$$-\frac{a^2 x}{\beta} - \frac{a^2 y}{\alpha} + \frac{\alpha a^2}{\beta} + \frac{\beta a^2}{\alpha} = 0,$$

et il est visible qu'elle passe au point $P(\alpha, \beta)$.

Solution géométrique. — Le rayon OP est le diamètre conjugué de AB: il passe au centre du cercle, au milieu I de AB; il coupe le cercle en deux points E et F et il faut prouver que le point P est conjugué harmonique de O par rapport à E et F.

Les deux droites PA et PB sont tangentes à l'hyperbole. La polaire du point C par rapport à l'hyperbole passe au point à l'infini sur Ox; c'est la droite PC' parallèle à l'asymptote Ox. Les deux points C et C' sont conjugués harmoniques par rapport à A et B. D'ailleurs, le triangle IOC est isocèle, puisque I est le milieu de l'hypoténuse du triangle rectangle OCD; il en est de même du triangle semblable IPC'. Si donc nous faisons tourner la ponctuelle ABCC' autour du point I, elle vient s'appliquer sur la ponctuelle FEOP, et nous voyons ainsi que cette dernière est harmonique.

Bonnes solutions analytiques : MM. Ch. Pacé, enseigne de vaisseau; A. Tenot, à Angers; G. Lach, à Douai; R. Dufour, à Givet; M. Vasseur, à Lille; L. Gauthier, à Craponne; G. de Fontaines, école Sainte-Geneviève.

Solutions géométriques : MM. P. Bernard, à Paris; G. Roy, à Paris; Mennessier, à Evreux; G. Vasseur, lycée de Rouen; M. N., à Toulouse; Derrien, à Rennes; A. Hutinel, à Cannes.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1920)

ÉCOLE CENTRALE (*suite.*)

10682. — Équation générale des coniques tangentes aux deux bissectrices des angles des axes et passant par deux points A et B symétriques par rapport à Ox.

— **683.** — Équation d'une parabole tangente aux axes rectangulaires Ox et Oy en deux points donnés A et B. Sommet.

— **684.** — Équation d'une parabole passant par deux points $A(a, 0)$ et $B(0, b)$ et admettant l'origine comme foyer. Traiter le problème géométriquement. Nombre de solutions.

— **685.** — Lieu des foyers des paraboles égales à une parabole donnée et tangentes aux axes de coordonnées Ox et Oy (rectangulaires).

— **686.** — Équation des ellipses dont les longueurs d'axes sont $2a$ et $2b$, qui sont tangentes à Ox et à Oy et dont la direction du grand axe est $y = x \operatorname{tg} \alpha$. Lieu du centre.

— **687.** — On donne deux axes rectangulaires Ox et Oy et une droite Δ parallèle à Oy; équation générale des paraboles admettant l'origine comme sommet et qui sont normales à la droite Δ.

— **688.** — On donne deux axes rectangulaires Ox et Oy; une parabole a pour foyer le point O et est normale à la droite $x = a$; lieu du sommet; enveloppe de la directrice.

— **689.** — Lieu des centres des cercles tangents à une ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ et passant par l'un des sommets de cette ellipse.

— **690.** — Équation générale des cercles bitangents à une ellipse donnée.

— **691.** — On donne une ellipse rapportée à ses axes. Le cercle osculateur en un point M rencontre l'ellipse en un quatrième point N; condition pour que ce point N soit sur la normale en M à l'ellipse.

— **692.** — Lieu des centres des cercles tangents à Ox et à la parabole $y^2 = 2px$.

— **693.** — Équation générale des paraboles d'axe parallèle à Ox, passant par un point A donné et tangentes au cercle $x^2 + y^2 - R^2 = 0$; lieu des sommets de ces paraboles.

— **694.** — Démontrer que, dans une ellipse, le rapport $\frac{N^3}{R}$ est constant, N désignant la longueur de la normale, R le rayon de courbure.

— **695.** — Déterminer les courbes du second degré passant par l'origine et admettant en ce point pour cercle de courbure le cercle $x^2 + y^2 - 2ay = 0$.

— **696.** — On considère une ellipse et un point M sur cette ellipse; on considère le cercle osculateur en ce point. Trouver le point d'intersection de ce cercle avec l'ellipse.

— **697.** — Trouver sur l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ un point tel que le cercle osculateur en ce point passe par le centre de l'ellipse.

— **698.** — Tracer la courbe $xy = a^2$; équation du cercle osculateur en un point M. Lieu des projections du centre de courbure C au point M sur le diamètre OM. Déterminer une parabole passant par le point M et tangente en ce point à l'hyperbole équilatère ayant même rayon de courbure en M que l'hyperbole, sachant de plus que son axe est parallèle à Oy.

— **699.** — Hyperbole équilatère tangente en O à l'axe des y et dont le centre de courbure en O a pour abscisse a.

— **700.** — On donne deux axes rectangulaires; un point M décrit la droite $x = a$, parallèle à Oy. Pour chaque position de M, on mène par le point M la parallèle à Ox, puis la perpendiculaire à OM au point O; ces deux droites se coupent en un point P par lequel on mène Δ perpendiculaire à OP. Enveloppe de cette droite Δ.

— **701.** — On donne une circonférence tangente en O à Oy; on considère un point variable M de cette circonférence; en M on mène la parallèle à Ox, qui rencontre Oy en Q; enveloppe de la bissectrice de l'angle OMQ.

— **702.** — Un vecteur MP de longueur constante glisse sur la droite $x = a$; enveloppe du cercle circonscrit au triangle OMP.

— **703.** — Enveloppe des cercles de rayon donné et tels que la somme des segments interceptés sur Ox et Oy soit égale à l.

— **704.** — On donne les courbes d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \lambda^2 = 0$; quelles sont les propriétés de cette famille de courbes? On prend l'intersection avec la droite $x = a$; enveloppe des normales aux points d'intersection.

— **705.** — Un point M décrit une ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$; on le joint à l'un des sommets A de l'ellipse et on considère les cercles décrits sur AM comme diamètre; enveloppe de ces cercles; lieu des centres

10706. — On donne une ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ et la tangente en un point M de cette ellipse; enveloppe de la symétrique de la tangente par rapport à l'ordonnée du point de contact.

— **707.** — On donne l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ et un point M sur cette ellipse. Enveloppe de la droite ML symétrique de la normale MN par rapport au diamètre OM.

— **708.** — On considère deux axes rectangulaires Ox et Oy et un point A sur Ox; enveloppe des directrices des hyperboles admettant A pour foyer et Oy pour asymptote.

— **709.** — On considère l'hyperbole $xy=a^2$; on joint l'origine O à un point M de la courbe et on considère le triangle équilatéral OAM; enveloppe du cercle circonscrit à ce triangle (axes rectangulaires).

— **710.** — On donne l'hyperbole équilatère $xy=a^2$. Soit $M(x, y)$ un point sur la courbe; on mène la normale en M, qui coupe les axes en P et Q. Enveloppe du cercle décrit sur PQ comme diamètre.

— **711.** — On donne l'hyperbole équilatère $xy=a^2$; on joint l'origine à un point M sur la courbe; en M on élève la perpendiculaire à OM jusqu'à la rencontre en M' avec le diamètre conjugué de OM. Enveloppe du cercle circonscrit au triangle OMM'; lieu du centre de ce cercle.

— **712.** — Enveloppe des droites coupant les axes en deux points P et Q, tels que, si par les points P et Q on mène les parallèles aux axes, leur point d'intersection décrive la parabole $y^2=2px$.

— **713.** — Étant donnée la parabole $y^2=2px$, on joint le sommet O à un point M de la courbe et par le point M on mène la droite Δ faisant avec OM un angle donné α. Enveloppe de cette droite Δ.

— **714.** — On donne un point P sur la parabole $y^2=2px$ et on considère la normale en ce point; soit Q son point de contact avec la développée de la parabole. Par ce point Q on mène l'autre normale, dont le pied sur la parabole est R; équation de PR et enveloppe de cette droite quand P décrit la parabole.

— **715.** — On donne une parabole $y^2=2px$; on mène la tangente en un point M de cette parabole. On considère le cercle ayant son centre sur la tangente, passant par l'origine et le point M. Enveloppe de ce cercle, quand M décrit la parabole.

— **716.** — On donne la parabole $y^2=2px$; on mène en un point M la normale qui rencontre Ox au point N; enveloppe du cercle de diamètre MN.

— **717.** — Enveloppe des hyperboles admettant la droite $x=a$ pour asymptote et l'origine pour sommet.

— **718.** — Enveloppe des axes des paraboles tangentes à Ox en un point fixe A et à Oy en un point variable.

Géométrie analytique à trois dimensions.

— **719.** — On donne trois axes de coordonnées, Ox, Oy, Oz, et un point $M(x_0, y_0, z_0)$; mener par M une droite Δ rencontrant : 1° l'axe Oz et 2° une droite $x=a$ du plan xOy; calculer les coordonnées du point M' conjugué harmonique de M par rapport aux points P et Q où la droite Δ rencontre Oz et la droite $x=a$.

— **720.** — On considère un triangle isocèle OPQ (OP = OQ) dont un côté, OP, est placé sur Oz; on donne les coordonnées (a, b, c) du point M milieu de PQ. Calculer les coordonnées du point Q; quand ce point décrit un plan, quel est le lieu décrit par le point M?

— **721.** — On donne deux points : $A(x=a,\ y=0,\ z=c)$ et $B(x=-a,\ y=0,\ z=c')$ dans le plan xOz et une droite Δ dans le plan xOy. Enveloppe des droites Δ telles que les distances des points A et B à cette droite soient égales.

— **722.** — Soient le cercle $z=0,\ x^2+y^2-R^2=0$ et la droite $x=0,\ y=a$. On considère les sphères passant par ce cercle. Lieu des points de contact des plans tangents menés à la sphère par la droite.

— **723.** — On donne deux droites, $z=h,\ y=0$ et $z=-h,\ x=0$; écrire que deux plans menés par ces droites font un angle constant. Lieu de la droite d'intersection de ces deux plans.

— **724.** — On donne trois axes rectangulaires, Ox, Oy, Oz, et une droite quelconque $\Delta(x=az+h,\ y=bz+k)$. On considère une droite mobile D, qui pivote autour du point O dans le plan des yz et la perpendiculaire commune à D et Δ; lieu du pied de cette perpendiculaire sur D.

— **725.** — On donne trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz et deux droites,

$$D(z=a,\ y=mx) \qquad \text{et} \qquad D'(z=-a,\ y=-mx).$$

On demande le lieu des projections de l'origine des coordonnées sur toutes les droites s'appuyant sur D et D'.

— **726.** — On considère la courbe $x=\frac{t}{t-1}$, $y=\frac{t}{(t-1)(t+2)}$, $z=\frac{t}{(t+1)(t+2)}$; 1° équation du cône ayant pour sommet l'origine et s'appuyant sur cette courbe; 2° étudier la projection de la courbe sur le plan des xy et le cylindre ayant pour base cette projection et de génératrices parallèles à Oz; 3° intersection de ces deux surfaces; 4° on considère les quadriques passant par l'intersection des deux surfaces : équation générale de ces quadriques; que peuvent être ces quadriques?

— **727.** — On donne la courbe $x=t,\ y=t^2,\ z=\frac{1}{t}$; définition et recherche du plan osculateur.

— **728.** — Lieu des perpendiculaires abaissées de l'origine sur les plans osculateurs à la courbe

$$x=3t, \qquad y=3t^2, \qquad z=2t^3.$$

— **729.** — Plan tangent à une surface.

10730. — On donne l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, $z=0$. Équation du cône ayant pour base l'ellipse et pour sommet un point $S(x_0, y_0, z_0)$.

— **731.** — Équation du cône ayant pour sommet un point du plan des zx et pour directrice la parabole

$$z=0, \qquad y^2=2px.$$

— **732.** — Lieu des sommets des cônes qui sont coupés par le plan des yz suivant un cercle et qui s'appuient sur la parabole $z=0$, $y^2=2px$.

— **733.** — On donne trois axes rectangulaires et un point A(1, 2, 3). On fait passer par A la droite D parallèle à l'intersection des plans $y=z$, $x+y-3z=0$; c'est l'axe d'un cône de révolution dont une génératrice est OA. Équation de ce cône.

— **734.** — On donne la surface $ax^2+by^2+cz^2=0$: la reconnaître. Surface engendrée par les normales menées de l'origine aux plans tangents à la surface donnée.

— **735.** — On considère la surface $x^2+y^2=z^2$ et la droite $x=1$, $z=0$. Équation de la surface engendrée par la perpendiculaire commune à cette droite et à une génératrice de la surface.

— **736.** — Surface engendrée par une droite s'appuyant sur trois droites fixes parallèles à un même plan.

— **737.** — On donne la courbe $y=x^3$, $z=x^4$; équation de la surface engendrée par les droites normales à cette courbe et qui sont parallèles au plan xOy.

— **738.** — On donne trois axes rectangulaires, Ox, Oy, Oz, et dans le plan des xy la parabole $y^2-2px=0$; on prend un point A sur Oz et de ce point on mène la parallèle à Oy; on prend également un point B sur le prolongement de Oz (OB = OA) et de ce point on mène la parallèle à Ox. On demande de trouver la surface engendrée par une droite mobile s'appuyant sur ces deux droites et sur la parabole.

— **739.** — Surface engendrée par un cercle dont le plan reste parallèle au plan zOy, qui s'appuie sur la droite D($y=b$, $z=c$) et qui rencontre en deux points la parabole $z=0$, $y^2=2px$.

— **740.** — Surface engendrée par la courbe $z=x$, $(x-a)^2+y^2=r^2$, en tournant autour de Oz.

— **741.** — On donne la courbe $(x-a)^2+y^2+z^2=R^2$, $y=mz$; surface engendrée par cette courbe en tournant autour de Oz.

— **742.** — Surface engendrée par un arc d'hélice tournant autour d'une génératrice du cylindre sur lequel elle est tracée.

— **743.** — Lieu des centres des sphères tangentes au cône $x^2+2y^2-z^2=0$ et au plan horizontal.

— **744.** — Étant donné l'ellipsoïde $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2-1=0$, et le point P dans le plan des xy, former l'équation du cône de sommet P circonscrit à l'ellipsoïde; axes de ce cône.

— **745.** — Cylindre circonscrit à l'ellipsoïde $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{1}-1=0$, parallèlement à une direction du plan des xz. Cône circonscrit au même ellipsoïde, le sommet du cône étant un point quelconque.

— **746.** — On donne l'ellipsoïde $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}+z^2-1=0$; déterminer une droite parallèle à la direction $x+y=0$, $z=0$ telle qu'on puisse mener par cette droite des plans tangents rectangulaires.

— **747.** — On mène à l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ la normale en un point M(x, y, z); soit P l'intersection de cette normale avec le plan des xy; lieu des points de l'ellipsoïde tels que $MP=C^{te}$.

— **748.** — Lieu des points de l'espace dont les plans polaires par rapport à l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ sont tangents au cercle $z=0$, $x^2+y^2-R^2=0$.

— **749.** — On fait tourner un ellipsoïde autour de l'un de ses axes; lieu du pôle d'un plan fixe par rapport à cet ellipsoïde.

— **750.** — Diamètres dans l'ellipsoïde.

— **751.** — On considère l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ et la droite (D) : $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$; lieu des centres des sections planes passant par cette droite.

— **752.** — On donne l'ellipsoïde $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{1}-1=0$; couper cette surface par un plan parallèle au plan $x+y+z=0$ et tel que la surface de l'ellipse de section soit égale à π.

— **753.** — Mener par la droite $x=a$, $z=c$ un plan coupant le cône $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ suivant une ellipse d'aire donnée, S.

— **754.** — Mener d'un point P(4, 3, 2) des normales au cône $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{1}=0$.

— **755.** — On considère la surface $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$; lieu des points de l'espace tels que leurs plans polaires par rapport à la surface soient tangents à la courbe $z=h$, $x^2+y^2-R^2=0$.

10756. — Étant donné l'hyperboloïde $x^2 + 2y^2 - z^2 - 1 = 0$ et l'une des génératrices qui passent par le sommet A, sur $Ox (x = 1,\ y = 0,\ z = 0)$, trouver une génératrice de l'autre système faisant avec la première un angle de 45°.

— **757.** — Trouver, sur l'hyperboloïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, les génératrices qui passent à une distance donnée, d, du centre de cet hyperboloïde.

— **758.** — Sections circulaires du paraboloïde elliptique. Placer sur un paraboloïde elliptique un cercle de rayon donné. Étant donné le paraboloïde $x^2 + 4y^2 - 2z = 0$, placer sur cette surface un cercle de rayon 1. Placer un cercle de rayon 2 sur le paraboloïde $x^2 + 4y^2 - 8z = 0$.

— **759.** — Soit le paraboloïde elliptique $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} - 2z = 0$; lieu des points M tels que le plan polaire de M soit perpendiculaire à la droite MM_0 qui joint le point M à un point donné M_0 du plan xOz.

— **760.** — On considère le paraboloïde elliptique $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0$ et sur cette surface un point fixe de coordonnées $x = a,\ y = b,\ z = \frac{a^2}{2p} + \frac{b^2}{2q}$. Lieu des sommets des paraboles tracées sur le paraboloïde elliptique et passant par ce point.

— **761.** — On donne les deux surfaces $x^2 + y^2 - 2z = 0$, $x^2 + z^2 - 2y = 0$; on leur mène deux plans tangents parallèles ayant pour points de contact M et M'; lieu du milieu de MM'.

— **762.** — On donne l'équation d'une surface, $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2z = 0$, et un point sur cette surface : $x = a,\ y = b,\ z = \frac{a^2}{2p} - \frac{b^2}{2q}$; on considère les paraboles passant par ce point et tracées sur la surface; lieu de leurs sommets.

— **763.** — On donne un paraboloïde hyperbolique, $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} - 2z = 0$; asymptotes de la section par $x + y + z = \lambda$.

— **764.** — Sections circulaires du cylindre $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

— **765.** — Équation d'une quadrique admettant comme plans de symétrie les trois plans de coordonnées et qui soit normale à une droite donnée, $y = mx + h,\ z = nx + k$.

— **766.** — Discuter les quadriques :

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 2\lambda z + 2x + 6\lambda y - 1 = 0, \qquad x^2 + (\lambda + 1)y^2 + \lambda z^2 + 2xy + 2\lambda zx - 2\lambda x = 0,$$
$$x^2 + 2y^2 + (5 + \lambda)z^2 + 2xy + 2zx - 2zy - 2\lambda z + \lambda^2 + \lambda = 0.$$

Cinématique.

— **767.** — On considère la droite $y = a$; un mobile se déplace sur cette droite de façon que son vecteur vitesse soit constamment vu du point O sous un angle droit. Chercher les caractéristiques du mouvement de M.

— **768.** — Soit une barre AB de longueur constante a, dont les extrémités se déplacent sur les axes (rectangulaires). Le point A décrit Ox d'un mouvement uniforme, en partant de O à l'origine des temps : vitesse du point B sur Oy, à l'instant t.

— **769.** — AB est une droite de longueur constante dont les extrémités décrivent deux axes rectangulaires Ox et Oy; le point A est animé d'un mouvement vibratoire simple sur Ox. Un point P se déplace sur AB d'un mouvement vibratoire simple également : étudier le mouvement du point P.

— **770.** — Soient deux axes rectangulaires Ox, Oy et une barre AB de longueur constante dont les extrémités décrivent ces deux axes. Le point A décrit Ox d'un mouvement vibratoire simple; loi du mouvement du point de contact de AB avec son enveloppe.

— **771.** — Un point M décrit un cercle de centre O d'un mouvement uniforme; un autre point, P, décrit le rayon OM d'un mouvement vibratoire simple entre O et M; quel est le mouvement du point P ?

— **772.** — Soit le cercle $x^2 + y^2 - 2Rx = 0$; sachant que la vitesse en un point M est proportionnelle à la distance OK de l'origine à la tangente au cercle en M, trouver la loi du mouvement, $\theta = f(t)$, et l'accélération.

— **773.** — Un point M se déplace sur une circonférence de rayon a en tournant toujours dans le même sens; le mouvement de la projection de M sur un diamètre est donné par $x = a(1 + \cos^3 t)$. Vitesse de M. Hodographe.

— **774.** — On donne un cercle, un point A fixe sur ce cercle et on mène le diamètre AOB. Soit un point M sur le cercle, défini par l'angle polaire $BAM = \theta$; on donne $\theta = \frac{\pi}{2} \sin t$. Trouver l'hodographe et l'accélération.

— **775.** — On donne un cercle rapporté à son centre et un point A à l'extrémité du diamètre horizontal. Un mobile M part du point A et décrit le cercle d'un mouvement vibratoire simple. Hodographe de ce mouvement.

— **776.** — On considère un cercle et une de ses tangentes; un point M se déplace sur cette droite d'un mouvement uniforme de vitesse v; la demi-droite OM coupe le cercle en P; déterminer la vitesse de P et son accélération.

— **777.** — On donne, dans un plan, deux points fixes A et B et on définit le mouvement d'un point M en donnant $AM = r = a \cos \omega t$ et $BM = r' = a \sin \omega t$. Trajectoire; étude du mouvement.

— **778.** — Soit la chaînette $y = a.\mathrm{ch}\frac{x}{a}$; un mobile se déplace sur cette courbe d'un mouvement uniforme de vitesse v; calculer l'accélération.

(A suivre.)

QUESTIONS PROPOSÉES

2516. — Un polynome du quatrième degré, $P(x)$, est de la forme

$$P(x) = (x-\alpha)^2(x^2+ax-b),$$

les trois nombres α, a et b étant négatifs.

1° On demande de déterminer ce polynome par les conditions suivantes : le trinome x^2+ax-b est la pente d'une droite variable dont l'angle avec Ox est une fonction de x, et la dérivée de cette fonction par rapport à x est infiniment petite, en même temps que $\frac{1}{x}$, et les trois premiers termes du développement, par rapport aux puissances croissantes de $\frac{1}{x}$, sont

$$\frac{2}{x^3} - \frac{9}{x^4} + \frac{28}{x^5};$$

en outre, la dérivée seconde de $P(x)$ prend la valeur 12, pour $x=\alpha$.

2° Former le polynome du troisième degré $Q(x)$, tel que la fraction rationnelle $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ soit égale à $\frac{-1}{(x-\alpha)^2} + \frac{1}{x-x'} + \frac{1}{x-x''}$, x' et x'' étant les racines du trinome x^2+ax-b.

Calculer

$$\int_3^x R(x)\,dx \qquad (x>3).$$

Montrer que, si on retranche de cette intégrale un terme de la forme $AL.x$, la fonction ainsi obtenue est finie pour $x=\infty$. Donner sa valeur, ainsi que la valeur de A.

E. H.

2517. — On considère une ellipse,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \qquad a>b,$$

Conique (hyperbole) dont les foyers aux pts où la dte coupe l'ellipse et passe aux foyers de l'ellipse

droite

et une ~~tangente~~ fixe ~~à cette ellipse, (T)~~.

1° Chaque cercle doublement tangent à cette ellipse et ayant son centre sur le grand axe forme avec la droite (T) un faisceau linéaire de cercles. On demande le lieu des points limites de ce faisceau quand le cercle envisagé varie.

varie

2° Ce lieu est une conique. Trouver le lieu du centre de cette conique quand la droite (T) ~~enveloppe l'ellipse~~.

E. H.

2518. — Par un point $A(\alpha, \beta)$ de la parabole, $y^2-2px=0$, on mène les trois normales à cette courbe.

1° Déterminer les pieds des deux normales autres que la normale en A. Trouver la droite qui joint ces deux points et l'enveloppe de cette droite.

2° Trouver le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point A sur cette droite et construire ce lieu.

E. H.

2519. — Trouver le lieu des foyers d'une hyperbole asymptote à Oy et tangente à Ox en un point donné A.

Strophoïde droite

E. H.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

Coulommiers. — Imp. PAUL BRODARD.

31e Année. Juillet 1921. N° 10.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Concours de 1919.

2365. — 1° *Sur la surface conoïde* (C) *ayant pour équation en coordonnées rectangulaires* $z = a\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}(a > 0)$ *on considère la courbe* (A) *dont la projection sur le plan* Oxy *a pour équation polaire* $\rho^2 = b^2 \sin 2\theta$; O *étant le pôle et* Ox *l'axe polaire.*

Vérifier que le plan tangent à la surface (C) *en un point quelconque de la courbe* (A) *est osculateur à* (A).

Exprimer les coordonnées d'un point de (A) *en fonction rationnelle d'un paramètre.*

Par la courbe (A) *on peut faire passer un hyperboloïde* (H) *dont l'équation est de la forme* $Axy + Bz^2 + C = 0$. *Chaque génératrice de* (H) *rencontre* (A) *en un point ou trois points.*

On considère une génératrice de (H) *rencontrant* (A) *en trois points* M_1, M_2, M_3. *Trouver le lieu du centre des moyennes distances de* M_1, M_2, M_3 *lorsque la génératrice varie.*

2° *Former l'équation tangentielle de la surface* (C).

Montrer que (C) *est sa propre polaire réciproque par rapport à une infinité de quadriques* (Q) *ayant pour équation*

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + z^2 + \frac{2a^2}{\nu} z + a^2 = 0,$$

λ, μ, ν *désignant les coordonnées d'un point arbitraire de* (C).

Trouver l'enveloppe des quadriques (Q). *Elle comprend un conoïde* (C') *qui est polaire réciproque de* (C) *par rapport à l'hyperboloïde* (H) *de la première partie.*

3° *Tout plan* P *passant par une génératrice rectiligne* G *de* (C) *coupe en outre la surface suivant une ellipse* E *dont la projection sur le plan des* xy *est un cercle passant par l'origine* O *des coordonnées. Réciproquement tout cercle* $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0$ *du plan des* xy *est projection d'une ellipse tracée sur* (C).

Montrer que toutes les ellipses E *ont la même distance focale.*

On considère sur (C) *les ellipses* E *dont le petit axe a une longueur donnée* 2R. *Leurs plans* P *enveloppent une surface développable* (Δ). *Construire la trace de* Δ *sur le plan des* xy.

Trouver l'arête de rebroussement (Γ) *de* (Δ) *et construire sa projection sur* Oxy. *Comment se développe* (Γ) *quand on développe sur un plan le cylindre projetant* (Γ) *sur le plan des* xy.

Par (Γ) *on peut faire passer une quadrique de révolution autour de* Oz.

Trouver le lieu de (Γ) *quand* R *varie.*

4° *Comment se coupent les deux surfaces* (C) *et* (Δ)?

1. La courbe (A) est définie par les deux équations

$$\rho^2 = b^2 \sin 2\theta, \qquad z = a \cos 2\theta,$$

et par suite, un point quelconque de cette courbe a pour coordonnées rectilignes

$$x = b\cos\theta\sqrt{\sin 2\theta}, \qquad y = b\sin\theta\sqrt{\sin 2\theta}, \qquad z = a\cos 2\theta,$$

le radical ayant un signe quelconque, le même dans x et y.

Ce sont des équations paramétriques de (A).

Le plan osculateur en un point est défini par les deux directions qui ont pour paramètres x', y', z' et x'', y'', z'', les accents indiquant des dérivations par rapport à θ. Or la première (x', y', z') est évidemment dans le plan tangent à (C); tout revient donc à démontrer que la deuxième s'y trouve.

Le plan tangent au point (x, y, z) du conoïde $z = a\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ a pour équation

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

ou

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4axy^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{4a\cos\theta\sin^2\theta}{\rho} = \frac{4a\cos\theta\sin^2\theta}{b\sqrt{\sin 2\theta}},$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4ax^2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-4a\cos^2\theta\sin\theta}{\rho} = -\frac{4a\cos^2\theta\sin\theta}{b\sqrt{\sin 2\theta}}.$$

Tout revient à démontrer que l'on a

$$z'' = px'' + qy''.$$

On calcule aisément

$$x' = b\frac{\cos 3\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}, \qquad x'' = -b.\frac{3\sin 2\theta\sin 3\theta + \cos 2\theta\cos 3\theta}{\sin 2\theta\sqrt{\sin 2\theta}} = -b\frac{2\sin 2\theta\sin 3\theta + \cos\theta}{\sin 2\theta\sqrt{\sin 2\theta}},$$

$$y' = b\frac{\sin 3\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}, \qquad y'' = b\frac{3\sin 2\theta\cos 3\theta - \sin 3\theta\cos 2\theta}{\sin 2\theta\sqrt{\sin 2\theta}} = b.\frac{2\sin 2\theta\cos 3\theta - \sin\theta}{\sin 2\theta\sqrt{\sin 2\theta}},$$

et $z'' = -4a\cos 2\theta$.

La vérification est alors immédiate.

La projection de la courbe (A) sur le plan des xy a pour équation cartésienne

$$(x^2 + y^2)^2 - 2b^2xy = 0;$$

c'est une lemniscate qui a trois points doubles : l'origine et les points cycliques.

Pour exprimer les coordonnées d'un point en fonction rationnelle d'un paramètre, nous coupons cette courbe par un cercle tangent à l'origine à Oy, $x^2 + y^2 - b\sqrt{2}tx = 0$, t étant un paramètre.

Ce cercle rencontre la courbe en un seul point M différent de l'origine et des points cycliques, et pour avoir ce point, nous formons l'équation du faisceau des droites joignant l'origine aux points de rencontre de la lemniscate et du cercle; nous débarrassons cette équation des droites isotropes et de l'axe Oy, et il nous reste l'équation $y = t^2x$, qui représente la droite OM.

En prenant l'intersection de cette droite et du cercle, nous obtenons les coordonnées du point M,

$$x = \frac{b\sqrt{2}t}{1 + t^4}, \qquad y = \frac{b\sqrt{2}t^3}{1 + t^4}.$$

Puis, en remplaçant y par t^2x dans l'équation du conoïde, nous avons $z = a\dfrac{1 - t^4}{1 + t^4}$. Il en résulte que les coordonnées d'un point quelconque de (A), en fonction rationnelle d'un paramètre, sont

$$x = \frac{b\sqrt{2}t}{1 + t^4}, \qquad y = \frac{b\sqrt{2}t^3}{1 + t^4}, \qquad z = a\frac{1 - t^4}{1 + t^4}.$$

Pour que cette courbe soit sur l'hyperboloïde (H), $Axy + Bz^2 + C = 0$, on doit avoir, quel que soit t,

$$\frac{2Ab^2t^4}{(1 + t^4)^2} + \frac{Ba^2(1 - t^4)^2}{(1 + t^4)^2} + C = 0,$$

ou, en ordonnant,

$$t^8(Ba^2+C)+2t^4(Ab^2-Ba^2+C)+Ba^2+C=0.$$

Écrivons que les coefficients sont nuls; nous avons

$$Ba^2+C=0, \qquad Ab^2-Ba^2+C=0;$$

d'où

$$B=-\frac{C}{a^2}, \qquad A=-\frac{2C}{b^2},$$

et par suite, l'hyperboloïde (H) a pour équation

$$\frac{2xy}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}-1=0, \qquad \text{ou} \qquad 2a^2xy+b^2(z^2-a^2)=0.$$

Les deux systèmes de génératrices de (H) sont alors

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} a\sqrt{2}x=\lambda b(a+z), \\ a\sqrt{2}y=\frac{b}{\lambda}(a-z), \end{cases} \qquad \text{(II)} \quad \begin{cases} a\sqrt{2}x=\mu b(a-z), \\ a\sqrt{2}y=\frac{b}{\mu}(a+z). \end{cases}$$

Remplaçons dans (I) x, y, z par leurs valeurs en fonction de t, nous obtenons les deux équations $t=\lambda$ et $t^4=\lambda t^3$, qui ont une seule racine commune $t=\lambda$. Donc toute génératrice du système (I) rencontre (A) en un seul point.

En remplaçant dans (II) x, y, z par les mêmes valeurs, nous obtenons les deux équations $t^3=\mu$, $t^4=\mu t$, qui ont trois racines communes, les racines de $t^3=\mu$. Donc, toute génératrice du système (II) rencontre (A) en trois points.

Soient t_1, t_2, t_3 les racines de l'équation $t^3=\mu$. L'ordonnée y du centre des moyennes distances des trois points est

$$y=\frac{b\sqrt{2}}{3}\Sigma\frac{t_1^3}{1+t_1^4},$$

ou, comme $t_1^3=\mu$,

$$y=\frac{b\sqrt{2}}{3}\mu\Sigma\frac{1}{1+\mu t_1}.$$

Or,

$$\Sigma\frac{1}{1+\mu t_1}=\frac{\Sigma(1+\mu t_1)(1+\mu t_2)}{(1+\mu t_1)(1+\mu t_2)(1+\mu t_3)}=\frac{3}{1+\mu^4},$$

car $\Sigma t_1=0$, $\Sigma t_1t_2=0$, $t_1t_2t_3=\mu$.

On a donc

$$y=\frac{b\sqrt{2}\mu}{1+\mu^4}.$$

D'autre part, le centre des moyennes distances est sur la génératrice (II). Remplaçons dans les équations (II), y par la valeur que nous venons de trouver, nous obtiendrons les valeurs suivantes pour z et x

$$z=a\frac{1-\mu^4}{1+\mu^4}, \qquad x=\frac{b\sqrt{2}\mu^3}{1+\mu^4}.$$

Nous avons ainsi les équations paramétriques du lieu demandé. Faisons le changement de paramètre $\mu=\frac{1}{\theta}$, nous avons

$$x=\frac{b\sqrt{2}\theta}{1+\theta^4}, \qquad y=\frac{b\sqrt{2}\theta^3}{1+\theta^4}, \qquad z=a.\frac{\theta^4-1}{\theta^4+1},$$

et ceci nous montre que le lieu du centre des moyennes distances est la courbe symétrique de (A) par rapport au plan des xy.

2. Pour avoir l'équation tangentielle de la surface (C), nous appliquerons la méthode qui a été

indiquée par M. Blum (*Revue de Mathématiques spéciales*, mars 1912) pour obtenir l'équation tangentielle du conoïde $z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, ou en rendant homogène

$$f(x, y, z, t) \equiv z - t\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

Pour qu'un plan $ux + vy + wz + rt = 0$ soit tangent à cette surface il faut qu'on ait

$$\frac{f'_x}{u} = \frac{f'_y}{v} = \frac{f'_z}{w} = \frac{f'_t}{r} \qquad f(x, y, z, t) = 0,$$

ou

$$\frac{t\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^2}}{u} = \frac{-t\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x}}{v} = \frac{1}{w} = \frac{-\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}{r}, \qquad z - t\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

On en déduit $\frac{y}{x} = -\frac{u}{v}$, $\frac{r}{w} = -\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, et, en éliminant $\frac{y}{x}$, on a

$$\frac{r}{w} = -\varphi\left(-\frac{u}{v}\right).$$

Pour le conoïde (C) on a $\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = a\frac{1 - \frac{y^2}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}}$, et par suite l'équation tangentielle de ce conoïde est

$$r(u^2 + v^2) - aw(u^2 - v^2) = 0.$$

Le plan polaire du point (x, y, z) par rapport à la quadrique (Q) a pour équation

$$\lambda Xx + \mu Yy + Z\left(z + \frac{a^2}{\nu}\right) + \frac{a^2 z}{\nu} + a^2 = 0;$$

en écrivant que ce plan est tangent au conoïde (C), nous obtenons

$$\left(\frac{a^2 z}{\nu} + a^2\right)(\lambda^2 x^2 + \mu^2 y^2) - a\left(z + \frac{a^2}{\nu}\right)(\lambda^2 x^2 - \mu^2 y^2) = 0$$

ou

$$z[\lambda^2 x^2(a - \nu) + \mu^2 y^2(a + \nu)] + a[\lambda^2 x^2(\nu - a) + \mu^2 y^2(\nu + a)] = 0.$$

Comme le point (λ, μ, ν) est sur le conoïde, on a

$$\nu = \frac{a(\lambda^2 - \mu^2)}{\lambda^2 + \mu^2}, \qquad \text{ou} \qquad \lambda^2(a - \nu) = \mu^2(a + \nu).$$

Divisons l'équation précédente par $\lambda^2(a - \nu)$ ou $\mu^2(a + \nu)$, nous avons

$$z(x^2 + y^2) + a(-x^2 + y^2) = 0,$$

c'est précisément l'équation du conoïde (C).

Les coordonnées λ, μ, ν d'un point quelconque de ce conoïde peuvent s'exprimer en fonction des deux paramètres ρ et θ,

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta, \qquad z = a\cos 2\theta,$$

et l'équation de la quadrique (Q) devient

$$Q = \rho(x^2\cos\theta + y^2\sin\theta) + z^2 + \frac{2az}{\cos 2\theta} + a^2 = 0.$$

Pour avoir l'enveloppe, nous éliminons ρ et θ entre cette équation et les suivantes : $Q_\rho = 0$, $Q_\theta = 0$. Or,

$$Q_\rho = x^2\cos\theta + y^2\sin\theta = 0, \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{tg}\theta = -\frac{x^2}{y^2}.$$

Portons cette valeur de $\operatorname{tg}\theta$ dans l'équation $Q=0$, nous obtenons

$$z^2+\frac{2a(x^4+y^4)}{y^4-x^4}z+a^2=0,$$

ou

$$\left(z-a\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\left(z-a\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right)=0.$$

C'est l'équation de l'enveloppe. Elle se compose du conoïde C et du conoïde C', $z=a\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$, dont l'équation tangentielle est

$$\frac{r}{w}=-a\frac{v^2+u^2}{v^2-u^2}.$$

En écrivant que le plan polaire du point (x, y, z) par rapport à l'hyperboloïde (H) est tangent au conoïde (C'), on obtient sans difficulté l'équation du conoïde (C).

3. Une génératrice quelconque G de (C) a pour équation,

$$y=tx, \qquad z=a\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

un plan (P) passant par cette génératrice est défini par

$$\text{(P)} \qquad z-\frac{a(1-t^2)}{1+t^2}=\lambda(y-tx).$$

En éliminant z entre cette équation et celle du conoïde (C), on obtient l'équation

$$(y-tx)\left[\lambda(x^2+y^2)+\frac{2a(y+tx)}{1+t^2}\right]=0.$$

Ceci montre que le plan (P) coupe le conoïde suivant la génératrice G, et suivant une ellipse (E) dont la projection sur le plan des xy est le cercle

$$(1) \qquad \lambda(x^2+y^2)+\frac{2a(y+tx)}{1+t^2}=0.$$

Réciproquement, soit $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y=0$ l'équation d'un cercle passant par l'origine. En identifiant ces deux équations on a

$$\frac{\lambda}{1}=\frac{at}{-\alpha(1+t^2)}=\frac{a}{-\beta(1+t^2)},$$

et

$$t=\frac{\alpha}{\beta}, \qquad \lambda=-\frac{a\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Donc le cercle donné est la projection d'une ellipse tracée sur (C) et située dans le plan

$$\alpha(\beta y-\alpha x)+z(\alpha^2+\beta^2)=a(\beta^2-\alpha^2).$$

La normale au plan (P) a pour paramètres directeurs λt, $-\lambda$, 1; par suite, l'angle γ de ce plan avec le plan des xy a pour cosinus $\dfrac{1}{\sqrt{1+\lambda^2(1+t^2)}}$, et pour tangente $\lambda\sqrt{1+t^2}$.

Or, le rayon du cercle (1), qui a pour expression $\dfrac{a}{\lambda\sqrt{1+t^2}}$, est le demi petit axe b_1 de l'ellipse (E); la demi-distance focale c_1 a pour valeur (d'après le théorème de Dandelin)

$$c_1=b_1\operatorname{tg}\gamma=\frac{a}{\lambda\sqrt{1+t^2}}.\lambda\sqrt{1+t^2}=a.$$

Pour les ellipses (E) dont le petit axe a une longueur constante 2R, on a $2R=\dfrac{2a}{\lambda\sqrt{1+t^2}}$, ou, en posant $t=\operatorname{tg}\varphi$, $\lambda=\dfrac{a\cos\varphi}{R}$.

L'équation du plan (P) devient alors

$$(2) \qquad \frac{Rz}{a} = R\cos 2\varphi + y\cos\varphi - x\sin\varphi.$$

Comme cette équation renferme un seul paramètre, le plan (P) enveloppe une surface développable (Δ) dont la génératrice est définie par l'équation (2) et l'équation dérivée (3) :

$$(3) \qquad 2R\sin 2\varphi - y\sin\varphi + x\cos\varphi = 0.$$

Cette droite rencontre le plan des xy au point (x, y) défini par les deux équations

$$(4) \qquad R\cos 2\varphi + y\cos\varphi - x\sin\varphi = 0,$$

$$(5) \qquad 2R\sin 2\varphi - y\sin\varphi + x\cos\varphi = 0.$$

Le point de rencontre de ces deux droites est le point où la droite (4) touche son enveloppe. On vérifie aisément que cette droite rencontre les bissectrices des axes de coordonnées en deux points dont la distance est constante. Donc l'enveloppe de la droite (3), ou la trace de (Δ) sur le plan des xy, est une hypocycloïde à quatre rebroussements, les tangentes de rebroussement étant les bissectrices des axes.

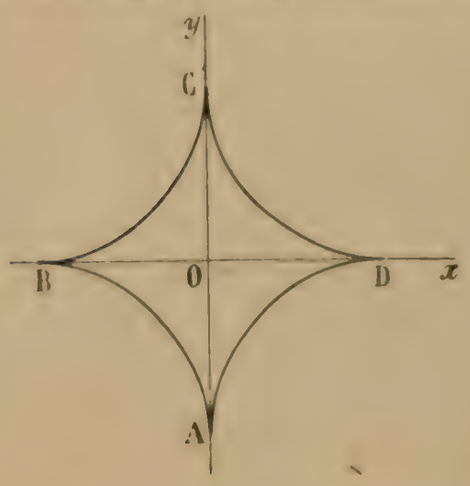
Pour avoir l'arête de rebroussement (Γ) de (Δ), nous dérivons (3) par rapport à φ; nous avons

$$(6) \qquad 4R\cos 2\varphi + y\cos\varphi - x\sin\varphi = 0,$$

et nous résolvons (2), (3) et (4) par rapport à x, y, z; nous obtenons

$$x = -4R\sin^3\varphi, \qquad y = -4R\cos^3\varphi, \qquad z = -3a\cos 2\varphi;$$

ce sont les équations paramétriques de (Γ). On voit que la projection sur le plan des xy est encore une hypocycloïde à quatre rebroussements, les tangentes en ces points étant les deux axes.



Quand φ varie de 0 à 2π, le point (x, y, z) décrit toute la courbe (Γ), et la projection de ce point sur le plan des xy décrit l'hypocycloïde à partir du point A dans le sens ABCD.

Développons le cylindre projetant la courbe (Γ) sur le plan des xy, sur le plan des zx, de façon que la section droite ABCD vienne s'appliquer sur Ox suivant $A_1B_1C_1D_1A_2$. Pour avoir le développement de (Γ) il suffit de calculer z en fonction de l'arc s de l'hypocycloïde.

On a aisément

$$ds = \pm 6R\sin 2\varphi\, d\varphi.$$

Nous supposons que s varie dans le même sens que φ; alors $\frac{ds}{d\varphi}$ doit être positif.

Soit d'abord $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $\sin 2\varphi > 0$. Nous avons

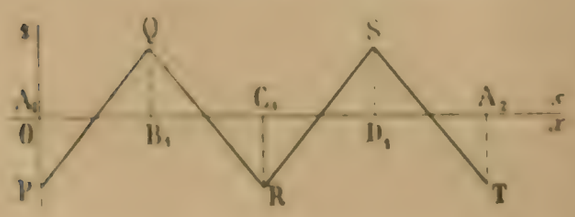
$$ds = +6R\sin 2\varphi\, d\varphi, \qquad s = -3R\cos 2\varphi + C.$$

Déterminons C de façon que s soit nul pour $\varphi = 0$; nous obtenons $C = 3R$ et

$$s = 3R(1 - \cos 2\varphi).$$

D'autre part on a $z = -3a\cos 2\varphi$, et en éliminant $\cos 2\varphi$ entre les deux équations, on obtient

$$s = 3R\left(1 + \frac{z}{3a}\right),$$



c'est l'équation du segment de droite PQ, ($OP = -3a$, $B_1Q = +3a$).

Quand φ augmente de π, z change de signe; par suite, pour les valeurs de φ comprises entre $\frac{\pi}{2}$ et π, nous aurons le segment de droite QR symétrique de QP par rapport à B_1Q, puis RS, et enfin ST.

Le développement de la courbe (Γ) se compose de la ligne brisée PQRST. Ceci montre que (Γ) est une hélice.

Cherchons l'équation de la surface de révolution engendrée par (Γ) en tournant autour de Oz. Les équations d'un parallèle sont

$$z = -3a\cos 2\varphi,$$

$$x^2 + y^2 = 16R^2(\sin^6\varphi + \cos^6\varphi) = 16R^2[(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^3 - 3\sin^2\varphi\cos^2\varphi(\cos\varphi + \sin^2\varphi)],$$

ou

$$x^2 + y^2 = 16R^2\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\varphi\right) = 4R^2(1 + 3\cos^2 2\varphi).$$

En éliminant $\cos 2\varphi$, on obtient l'équation de la surface

$$3a^2(x^2 + y^2) - 4R^2z^2 - 12a^2R^2 = 0;$$

elle représente un hyperboloïde à une nappe.

Pour avoir le lieu engendré par (Γ) lorsque R varie, nous éliminons R et φ entre les équations paramétriques de cette courbe. On a aisément

$$\operatorname{tg}\varphi = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}}, \qquad z = -3a.\frac{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{3}}}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{3}}},$$

puis

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{3a + z}{3a - z},$$

et enfin

$$x^2(3a - z)^3 - y^2(3a + z)^3 = 0.$$

C'est l'équation d'un conoïde du cinquième degré.

4. Reprenons les équations de la droite qui engendre la surface développable (Δ)

$$x\sin\varphi - y\cos\varphi + \frac{Rz}{a} - R\cos 2\varphi = 0,$$

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi + 2R\sin 2\varphi = 0.$$

En les résolvant par rapport à x, y et en calculant $x^2 + y^2$ et $x^2 - y^2$, nous obtenons

$$x^2 + y^2 = R^2\left[\frac{a^2 + z^2}{a^2} + 3\sin^2 2\varphi - \frac{2z}{a}\cos 2\varphi\right],$$

$$x^2 - y^2 = R^2\left[-\cos^2 2\varphi - \frac{2z}{a}\cos^2 2\varphi - \frac{z^2}{a^2}\cos 2\varphi + \frac{4z}{a}\right].$$

En portant ces valeurs dans l'équation de (C), et en posant $\cos 2\varphi = u$, on obtient l'équation

$$z^3 - auz^2 - a^2u^2z + a^3u^3 = (z - au)^2(z + au) = 0.$$

L'intersection de (Δ) et de (C) se compose donc de deux courbes.

1° La courbe double (γ_1) correspondant à $z = au$, et définie par les équations paramétriques

$$x = -2R\cos\varphi\sin 2\varphi, \qquad y = -2R\sin\varphi\sin 2\varphi, \qquad z = a\cos 2\varphi.$$

C'est l'intersection du conoïde avec l'ellipsoïde $\frac{x^2 + y^2}{4R^2} + \frac{z^2}{a^2} - 1 = 0$; (Δ) et (Γ) sont tangentes en tous les points de cette courbe.

2° La courbe simple (γ_2), $z = -au$, définie par

$$x = -2R\sin\varphi, \qquad y = -2R\cos\varphi, \qquad z = a\cos 2\varphi.$$

C'est l'intersection du conoïde et du cylindre $x^2 + y^2 = 4R^2$.

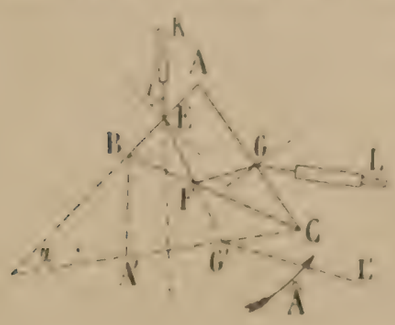
L. LONG, professeur au collège de Châtellerault.

Bonnes solutions par MM. G. Lach, à Douai; M., à Guéret; G. R., à Paris.

Remarque. — Il y a dans l'énoncé une faute d'homogénéité, quand il est dit que λ, μ et ν sont les coordonnées d'un point de (C). Cette faute n'a aucune conséquence, parce que les coordonnées x et y n'entrent dans l'équation de (C) que par leur rapport.

PHYSIQUE

2318. — *La lunette d'un goniomètre ayant été pointée sur son collimateur* K, *on la déplace, dans le sens positif, d'un angle égal à l'angle* A *d'un prisme donné* ABC; *la lunette est ainsi amenée dans la position* L. *Le prisme est alors placé sur la plate-forme dans une position* ABC *telle que le rayon* EFG, *entré par la face* AB, *se réfléchisse sur* BC *et sorte par la face* CA; *puis on tourne la plate-forme du prisme jusqu'à ce que l'image de la fente du collimateur, éclairée par une lumière monochromatique, se fasse sur le réticule.*



1° *Comment déterminer expérimentalement l'angle d'incidence* i *du rayon sur la face* AB ?

2° *Étant donnés les angles* $B = 74°$, $C = 32°$, $i = 35°$, *calculer l'indice de réfraction* n *du prisme pour la radiation monochromatique envisagée.*

3° *Quel serait l'aspect du phénomène si l'on remplaçait la lumière monochromatique par de la lumière blanche?*

4° *Comment se déplace l'image monochromatique de la fente quand on tourne la plate-forme du prisme à partir de la position actuelle, dans le sens positif, puis dans le sens négatif?*

5° *Entre quelles limites de l'indice* n *l'expérience peut-elle utiliser la forme du prisme donné, avec les valeurs données des angles? Quelle influence exerce une diminution de* $B - C$ *sur ces limites et sur la précision des mesures? Que devient l'expérience quand* $B - C$ *devient nulle?*

(*École Polytechnique, concours spécial de* 1919.)

1° Si la lunette est autocollimatrice, on peut déterminer i en repérant la direction de la normale à la face AB; on mesure ainsi, en partant de la position initiale de la lunette, l'angle $\pi - i$. Si la lunette n'est pas autocollimatrice, on repérera la direction du rayon réfléchi en E; on mesure alors $\pi - 2i$.

2° Soient r l'angle de réfraction en E, k l'angle d'incidence en F, r' et i' les angles d'incidence et de réfraction en G. Nous pourrons calculer n par la formule

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} \qquad \text{ou} \qquad n = \frac{\sin i'}{\sin r'}.$$

Par hypothèse, le rayon incident en E et le rayon réfracté en G font entre eux l'angle A, or A est aussi l'angle des normales, donc $i = i'$ et, par suite, $r = r'$.

L'angle i est donné. Pour avoir r, remarquons qu'on a successivement

$$r + k = B \qquad \text{et} \qquad k - r' = C, \qquad \text{d'où} \qquad r + r' \quad \text{ou} \quad 2r = B - C.$$

Donc

$$n = \frac{\sin i}{\sin(\frac{B-C}{2})} = \frac{\sin 35°}{\sin 21°} = 1{,}60.$$

Remarquons maintenant que si nous traçons les droites CA′, BA′, FG′, G′L′, respectivement symétriques de CA, BA, FG, GL par rapport à BC, la figure représente un rayon traversant un prisme dont les faces AB et CA′ forment entre elles un angle $\alpha = B - C$. Comme $i = i'$, le rayon traverse ce prisme au minimum de déviation. La considération de ce prisme α permet de résoudre facilement les questions suivantes.

3° La lumière blanche fournira un spectre dans lequel l'angle i' sera plus grand pour le violet que pour le rouge.

4° Si l'on fait tourner le prisme donné, la direction G′L′, partant du minimum de déviation dans le prisme α, reste d'abord stationnaire; donc la direction GL, symétrique de G′L′ par rapport à la direction mobile BC, tourne dans le même sens que celle-ci et deux fois plus vite. Le prisme s'écartant davantage de sa position initiale, G′L′ tourne toujours dans le sens positif. Si le prisme tourne dans le sens positif, GL continue de tourner dans le même sens, car la vitesse de rotation de G′L′ est toujours inférieure à celle du prisme. Si le prisme tourne dans le sens négatif, la rotation de G′L′ et celle de BC concordent pour faire tourner GL dans le sens négatif.

On peut obtenir ces résultats autrement en calculant la déviation Δ du rayon GL par rapport au rayon incident KE. On trouve facilement

$$\Delta = \pi + i - i' - B - C, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d\Delta}{di} = 1 - \frac{di'}{di} = 1 + \frac{\cos i \cos r'}{\cos r \cos i'}.$$

Cette expression est toujours positive, donc Δ et i varient toujours dans le même sens. En particulier, quand le prisme passe par la position initiale, la vitesse de rotation de GL est double de celle du prisme. Le rapport des deux vitesses diminue quand i croît, augmente quand i diminue.

5° Le prisme α ne peut être traversé que si l'angle limite qui caractérise la substance du prisme est supérieur à $\frac{\alpha}{2}$, ce qui donne, pour les sinus,

$$\frac{1}{n} > \sin\frac{B - C}{2}, \qquad n < \frac{1}{\sin 21_0} = 2{,}79.$$

La limite de n augmente donc quand la différence $B - C$ diminue. En même temps, la précision des mesures diminue puisque les angles qui servent à déterminer n diminuent.

Enfin, quand la différence $B - C$ devient nulle, l'expérience ne peut plus servir à déterminer n, la lumière blanche ne donne plus d'irisation et, si l'on fait tourner le prisme, la direction du rayon GL, symétrique de la direction fixe G′L′ par rapport à la droite mobile BC, tourne toujours dans le même sens d'un angle double. C'est dans ces conditions que fonctionnent les prismes à réflexion totale.

SUJETS DE CONCOURS

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Concours de 1921.

V. oscillations du galvanomètre balistique

Mathématiques (1re composition).

2520. — Une fonction de la variable réelle x est représentée par la série

$$(1) \qquad y = f(x) = x - \frac{\sin 2a}{2!}\left(\frac{-x}{\sin a}\right)^2 - \ldots - \frac{\sin na}{n!}\left(\frac{-x}{\sin a}\right)^n - \ldots$$

où a est une constante donnée comprise entre zéro et $+\frac{\pi}{2}$.

$-x \cot a$

$y = \sin x \, e$

1° Montrer que la série est absolument convergente pour toute valeur de x.

2° Former les séries qui représentent les dérivées y' et y''; montrer que la fonction y vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

3° Former l'intégrale générale de cette équation différentielle; puis reconnaître parmi les fonctions qu'elle contient, celle dont l'expression (1) représente le développement en série.

Par quelle transformation peut-on passer de la courbe représentant les variations de la fonction $y = f(x)$ à l'une quelconque de celles qui correspondent à l'intégrale générale?

4° Construire la courbe $y = f(x)$. Montrer qu'elle a une infinité de points de contact avec la courbe

$$y = e^{x \cos a}.$$

5° Évaluer l'aire comprise entre les arcs de ces deux courbes limités à deux points de contact consécutifs.

Soient x_0, y_0 les coordonnées de l'un des points de contact. Calculer l'aire comprise, à partir de ce point, entre les deux courbes et la droite parallèle à Oy qui a pour abscisse $x > x_0$.

Que devient cette aire quand x croît indéfiniment?

(*Durée : 4 h.*)

Mathématiques (2e composition).

I. — **2521**. Sur un plan horizontal repose sans frottement, par un point de sa surface courbe, une demi-sphère de poids P, de centre O, de rayon R, solide, homogène, de sorte que son centre de gravité G est à la distance $OG = \frac{3}{8}R$ du centre. En deux points A et A′ marqués sur le grand cercle, aux extrémités d'un diamètre, sont appliquées des forces F et F′ égales à P, de sens contraires et parallèles à une droite donnée Δ qui fait l'angle α avec le plan horizontal.

Quelles sont, dans les positions d'équilibre :

1° la direction du plan AGA′;

2° la valeur θ de l'angle de OG avec la verticale descendante?

II. — **2522**. Le mouvement d'un point P dans un plan est défini, au moyen d'un paramètre u, par les trois équations

$$(1) \qquad t = \frac{1-u^2}{2} - \operatorname{Log} u, \qquad x = -\left(u + \frac{u^3}{3}\right), \qquad y = \frac{1}{2}\operatorname{Log} u - \frac{u^4}{8},$$

ou Log désigne le logarithme népérien, t le temps, x et y les coordonnées du mobile P par rapport à deux axes rectangulaires Ox et Oy du plan.

1° Figurer la trajectoire (C) et l'hodographe (H) du mouvement; indiquer les sens de parcours; calculer, en fonction de u, la grandeur de la vitesse, le cosinus et le sinus de l'angle θ de cette vitesse avec Ox.

2° La masse du point matériel P étant prise pour unité, trouver la force F qui produit le mouvement et la décomposer en deux autres forces; l'une F′ parallèle à Oy, l'autre F″ tangente à (C).

3° Conclure des résultats que les formules (1) peuvent, avec des unités convenables, représenter le mouvement d'un point pesant, avec frottement, sur un plan incliné, étant entendu qu'entre la composante normale Q de la réaction du plan et la composante tangentielle F″ la relation est $F'' = Qf$, f étant le coefficient de frottement. — Quelle relation ces formules impliquent-elles entre f et l'angle i du plan incliné avec le plan horizontal?

Application. — On donne le coefficient de frottement $f = \frac{1}{2}$; quelle est l'inclinaison i correspondante du plan? Sur ce plan, l'accélération de la pesanteur étant $g = 981$ C. G. S., on lance un mobile P à partir d'un point O_1 à l'origine du temps, avec une vitesse O_1V_1 égale à 50 C. G. S., dirigée vers le haut et faisant l'angle $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ avec les horizontales du plan. Donner des formules propres à calculer au moyen de u_1 le temps T et les coordonnées X et Y du point P en unités C. G. S.

(*Durée : 4 h.*)

Épure.

2523. — Un hyperboloïde réglé de révolution, de centre o, o' a son axe vertical. Le rayon du cercle de gorge est de 7^{cm}. La méridienne de l'hyperboloïde est une hyperbole équilatère.

Un solide S est limité par l'hyperboloïde, par le plan du cercle de gorge et par un plan horizontal situé à 10^{cm} au-dessous de ce dernier plan.

Trois sphères, passant toutes par le centre de l'hyperboloïde, ont leurs centres situés aux sommets d'un

triangle équilatéral inscrit dans le cercle de gorge, l'un de ces sommets étant le point le plus en arrière du cercle.

On représentera par ses deux projections la partie du solide S, supposé opaque, extérieure aux trois sphères dont il s'agit.

Les points o et o' seront marqués sur le grand axe de la feuille, le point o à 7^{cm} au-dessous du centre de la feuille, le point o' à 18^{cm} au-dessus de ce centre.

(*Durée : 4 h.*)

Calcul.

Le sol est horizontal. D'un point S extérieur à un champ hexagonal ABCDEF, et à l'aide d'un goniomètre dont le limbe gradué est horizontal, on a visé successivement les sommets et relevé les lectures correspondantes sur le limbe. On a aussi mesuré les distances des sommets au point S. Les résultats sont

SA = 34^m,3.	Lecture correspondante à la visée du point	A, 25^g,5.
SB = 61 ,8.	—	B, 74 ,8.
SC = 88 ,5.	—	C, 49 ,7.
SD = 98 ,2.	—	D, 83 ,3.
SE = 92 ,7.	—	E, 113 ,9.
SF = 48 ,2.	—	F, 153 ,0.

Calculer la surface du champ à l'aide de la règle à calcul ou des tables de logarithmes.

(*Durée : 1 h.*)

Physique.

I. — Exposer comment, en utilisant la notion du point critique découverte par Andrews, on a pu liquéfier les gaz réputés autrefois permanents.

II. — **2524**. Une lentille simple plan-convexe L repose par le pôle de sa partie sphérique sur un point marqué P d'une lame horizontale λ. Un microscope M, placé au-dessus, a été mis au point successivement sur les éléments suivants :

a) la face plane supérieure de la lentille L;

b) le point P de la lame λ vue à travers L;

c) le même point P, la lentille L étant retirée;

d) le même point P vu à travers la lentille L, retournée de façon à reposer par sa face plane centrée sur le point P.

Les déplacements verticaux successifs du microscope, en passant de chaque pointé au suivant, ont été respectivement :

$$ab = 3^{mm},33\,; \qquad bc = 1^{mm},67\,; \qquad cd = 0^{mm}.$$

On demande de trouver :

1° l'épaisseur e de la lentille L; le rayon R de sa face sphérique; son indice de réfraction n à un centième près;

2° son centre optique et ses points nodaux;

3° son interstice et sa distance focale F;

4° la variation δF de la distance focale lorsque la température s'élève de 10°.

On admettra que l'indice n du verre est lié à sa densité par la formule $\frac{n-1}{d} = A$, A étant une constante et que le coefficient de dilatation cubique vrai du verre est $k = 8 \times 10^{-6}$.

(*Durée : 3 h.*).

Chimie.

I. — L'acide sulfhydrique; préparation, propriétés, composition.

II. — **2525**. 1° En dissolvant de l'anhydride arsénieux dans de l'acide chlorhydrique étendu, on veut préparer un litre d'une solution, A, telle que l'oxydation complète de ce litre de liqueur exige un litre de chlore mesuré dans les conditions normales.

Quel poids d'anhydride arsénieux faut-il dissoudre?

2° Pour préparer une autre solution, B, on attaque 5^g,64 de permanganate de potassium par un excès d'acide chlorhydrique. Le gaz dégagé par la réaction est dirigé dans un excès d'une solution de potasse étendue et froide. Ce liquide, après réaction, est dilué jusqu'à occuper le volume d'un litre.

De la solution B ainsi étendue, quel volume faut-il pour oxyder 50^{cm^3} de la solution A?

3° Dans 50^{cm^3} de la solution A on ajoute un peu d'iodure de potassium; puis on y fait arriver un courant lent d'oxygène ozonisé, en mesurant le débit en volume par un dispositif approprié. On observe que la solution prend une légère coloration brune quand elle a reçu 800^{cm^3} d'oxygène ozonisé; on arrête alors l'arrivée du gaz.

a) Quelle est la teneur volumétrique centésimale en ozone de l'oxygène ozonisé?

b) Quel est le volume du gaz qui s'échappera de la solution après avoir réagi sur celle-ci?

4° Par quels réactifs peut-on déterminer la composition qualitative de la solution A avant et après la transformation par l'oxygène ozonisé?

On adoptera dans les calculs les données suivantes :

Poids atomiques : Mn = 55. K = 39. As = 75. O = 16.

Volume moléculaire : V = 22l,4 (dans les conditions normales).

Durée : 3 h.)

QUESTION PROPOSÉE

2526. — Sur un hyperboloïde réglé, on considère un système S de génératrices rectilignes. Par les points où les génératrices de S rencontrent une même section circulaire, on mène des plans respectivement perpendiculaires à ces génératrices. Tous ces plans sont concourants et leur point commun décrit une droite Δ quand le plan de la section circulaire se déplace parallèlement à lui-même. Si on prend les symétriques de Δ par rapport à toutes les génératrices de S le lieu de ces symétriques est une surface gauche de révolution dont l'axe est perpendiculaire à la direction des plans cycliques considérés.

L. ROUYER, professeur à la Faculté des sciences d'Alger.

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

(Cours préparatoires.)

Concours de 1919.

2367. — 1° *Étudier la variation de la fonction*

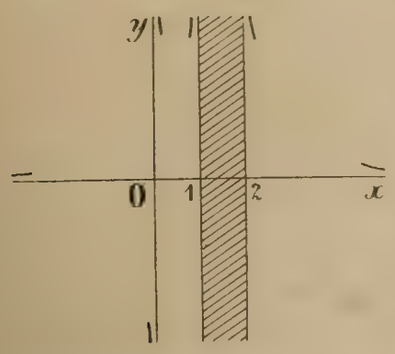
$$y = \frac{x+1}{x\sqrt{x^2-3x+2}}$$

et construire la courbe représentative, en déterminant les valeurs de x qui rendent y maximum ou minimum.

2° *Évaluer le volume de révolution engendré par l'aire comprise entre la courbe et les deux ordonnées correspondant à $x = \frac{1}{4}$ et $x = \frac{3}{4}$, quand cette aire tourne autour de Ox.*

1° La fonction y n'est définie que pour les valeurs de x qui rendent le trinome $x^2 - 3x + 2$ positif; or, les racines du trinome sont 1 et 2; le trinome n'est positif que lorsque x est extérieur à l'intervalle

(1, 2), $x < 1$ ou $x > 2$. Nous supposerons dans tout ce qui suit le radical pris avec le signe $+$.



Alors, pour $x = -\infty$, la fraction

$$\frac{x+1}{x\sqrt{x^2-3x+2}}$$

se réduit à $\frac{1}{\sqrt{x^2}}$ ou $\frac{1}{x}$; elle est infiniment petite et positive; de même pour $x = +\infty$. Pour $x = 0 - \varepsilon$, la fonction est égale à $-\infty$; pour $x = 0 + \varepsilon$, elle est égale à $+\infty$; et, enfin, à gauche de 1, pour $1 - \varepsilon$, à droite de 2, pour $2 + \varepsilon$, elle est infinie et positive. Nous pouvons donc faire déjà la figure ci-contre. Un tracé approximatif de la courbe nous montre que la fonction a un maximum entre $-\infty$ et 0 et un minimum entre 0 et 1; puis, qu'elle décroît de 2 à $+\infty$.

Pour vérifier ou infirmer ces résultats, il faut étudier la dérivée. La dérivée de cette fonction est

$$y' = \frac{x\sqrt{x^2-3x+2} - (x+1)\left(\sqrt{x^2-3x+2} + \frac{x(2x-3)}{2\sqrt{x^2-3x+2}}\right)}{x^2(x^2-3x+2)},$$

$$y' = \frac{-\sqrt{x^2-3x+2} - \frac{x(x+1)(2x-3)}{2\sqrt{x^2-3x+2}}}{x^2(x^2-3x+2)},$$

$$y' = \frac{-2(x^2-3x+2) - x(x+1)(2x-3)}{2x^2(\sqrt{x^2-3x+2})^3};$$

le dénominateur est toujours positif; il suffit d'étudier les signes du numérateur. Or, ce numérateur s'écrit

$$-2x^2 + 6x - 4 - x(2x^2 - x - 3),$$

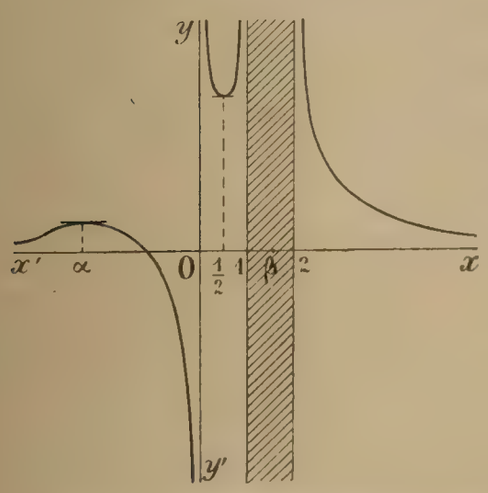
puis,

$$-2x^3 - x^2 + 9x - 4;$$

ce polynome est nul pour $x = \frac{1}{2}$; son quotient par $x - \frac{1}{2}$ est $-2x^2 - 2x + 8$ et nous avons à reconnaître les signes de

$$-2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2 + x - 4).$$

Les racines de $x^2 + x - 4$ sont $\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$; elles sont voisines de $-\frac{5}{2}$ et de $\frac{3}{2}$; appelons-les α et β. Nous voyons alors que de $-\infty$ à α, la dérivée est positive, de α à $\frac{1}{2}$, elle est négative, de $\frac{1}{2}$ à β, elle est positive, et, enfin, de β à $+\infty$, elle est négative. Tenant compte de ce que β est compris entre 1 et 2, nous pouvons tracer la courbe : elle a la forme prévue.



2° Pour trouver le volume engendré par une portion de l'aire de cette courbe en tournant autour de Ox, nous appliquerons la formule

$$V = \int_{\frac{1}{2}}^{3} \pi y^2 dx = \pi \int_{\frac{1}{2}}^{3} \frac{(x+1)^2 dx}{x^2(x^2-3x+2)}.$$

Nous sommes ramenés à intégrer une différentielle rationnelle. Posons, à cet effet,

$$\frac{(x+1)^2}{x^2(x^2-3x+2)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x-2};$$

nous aurons de suite A, C et D, en multipliant successivement par x^2, $x-1$, et $x-2$, et faisant ensuite $x=0$, $x=1$ et $x=2$; cela nous donne $A=\frac{1}{2}$, $C=-4$, $D=\frac{9}{4}$; nous aurons ensuite B en donnant à x une valeur particulière, par exemple, $x=-1$; cela nous donne

$$0=\frac{1}{2}-B+2-\frac{9}{12}, \qquad B=\frac{5}{2}-\frac{9}{12}=\frac{21}{12}=\frac{7}{4}.$$

Nous avons donc finalement

$$R(x)=\frac{1}{2x^2}+\frac{7}{4x}-\frac{4}{x-1}+\frac{9}{4(x-2)},$$

$$\int R(x)dx=\frac{-1}{2x}+\frac{7}{4}L(x)-4L(1-x)+\frac{9}{4}L(2-x);$$

il faut prendre les limites $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$; nous avons donc

$$V=\pi\left(\frac{4}{3}+\frac{7}{4}L3+4L3+\frac{9}{4}L\frac{5}{7}\right),$$

$$V=\frac{\pi}{4}\left(\frac{16}{3}+23L3+9L\frac{5}{7}\right).$$

Bonnes solutions : MM. G. Lach, à Douai; A. Hutinel, à Cannes; A. Tenot, à Angers.

2368. — 1° *Déterminer les coefficients a_n de la série $y=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots$, de façon qu'elle satisfasse à la relation $y''=ax^2y$, où a est un paramètre.*

2° *Vérifier que la série obtenue est convergente.*

3° *Dans cette série, les deux quantités a_0, a_1 restent arbitraires : les déterminer de façon que, pour $x=0$, l'on ait $y=1$, $y'=0$. Soit y_1 la série particulière obtenue, où l'on fait en outre $a=1$.*

4° *x étant supposé $\leqslant 1$ en valeur absolue, combien faut-il prendre de termes dans la série y_1 pour que leur somme représente y_1 avec une erreur plus petite que $\frac{1}{1\,000}$ en valeur absolue ?*

1° La série y étant représentée par

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots,$$

nous aurons

$$y''=2.1a_2+3.2a_3x+4.3a_4x^2+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\ldots.$$

Il faut identifier cette série avec la série ax^2y. Ceci nous donne

$$a_2=0, \qquad a_3=0, \qquad 4.3a_4=aa_0, \qquad 5.4a_5=aa_1, \qquad \ldots, \qquad n(n-1)a_n=aa_{n-4}, \qquad \ldots.$$

Écrivons successivement

$$\begin{aligned} 4.3a_4&=aa_0,\\ 8.7a_8&=aa_4,\\ &\ldots\ldots\\ 4n(4n-1)a_{4n}&=aa_{4n-4}, \end{aligned}$$

et multiplions membre à membre; nous aurons

$$a_{4n}=\frac{a^na_0}{3.4.7.8\ldots(4n-1)4n},$$

et ceci nous donne la série

$$a_0\left[1+\frac{ax^4}{3.4}+\frac{a^2x^8}{3.4.7.8}+\ldots+\frac{a^nx^{4n}}{3.4.7.8\ldots(4n-1)4n}+\ldots\right].$$

De même, $$a_{4n+1} = \frac{a^n a_1}{4.5.8.9\ldots 4n(4n+1)},$$
et nous avons la deuxième série

$$a_1\left[x + \frac{ax^5}{4.5} + \frac{a^2x^9}{8.9} + \ldots + \frac{a^n x^{4n+1}}{4.5.8.9\ldots 4n(4n+1)} + \ldots\right].$$

Les autres coefficients, ceux de la forme a_{4n+2}, a_{4n+3}, sont tous nuls.

2° Dans la série (a_0), le rapport d'un terme au précédent, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, est $\frac{ax^4}{(4n-1)4n}$; il a pour limite 0; donc cette série est convergente. Dans la série (a_1), le rapport d'un terme au précédent est $\frac{ax^4}{4n(4n+1)}$; il a aussi pour limite 0, les deux séries sont absolument convergentes; la série totale est donc absolument convergente, quel que soit x.

3° Si nous faisons $x=0$, la série (a_0) se réduit à a_0 et la série (a_1) est nulle; donc, pour que l'on ait $y=0$, il faut $a_0=1$. Pour $x=0$, la série y' se réduit à a_1; donc, pour que l'on ait $y'=0$, il faut $a_1=0$. La série y_1, où l'on fait en outre $a=1$, est

$$y_1 = 1 + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^8}{3.4.7.8} + \ldots + \frac{x^{4n}}{3.4.7.8\ldots(4n-1)4n} + \ldots.$$

4° Il faut maintenant voir combien de termes on doit prendre, quand x est plus petit que 1, pour que le reste soit plus petit que $\frac{1}{1\,000}$.

Le reste est plus petit que celui qui correspond à $x=1$.

Si nous prenons les deux premiers termes, le reste est plus petit que

$$\frac{1}{3.4.7.8} + \frac{1}{3.4.7.8.11.12} + \ldots,$$

plus petit *a fortiori* que

$$\frac{1}{3.4.7.8} + \frac{1}{3.4(7.8)^2} + \ldots$$

ou

$$\frac{\frac{1}{3.4.7.8}}{1 - \frac{1}{7.8}} = \frac{1}{3.4(7.8-1)};$$

ce nombre est plus grand que $\frac{1}{1\,000}$; il faut donc prendre au moins un terme de plus. Ceci nous donne un reste plus petit que

$$\frac{1}{3.4.7.8}\left[\frac{1}{11.12} + \frac{1}{(11.12)^2} + \ldots\right],$$

ou

$$\frac{1}{3.4.7.8} \cdot \frac{1}{11 \times 12 - 1}.$$

Cette fois ce nombre est plus petit que $\frac{1}{1\,000}$; il est égal à $\frac{1}{3.4.7.8 \times 131}$ et plus petit que

$$\frac{1}{12 \times 56 \times 100} < \frac{1}{50\,000} = \frac{2}{10^5}.$$

Si nous voulons calculer la somme de la série y_1 pour $x=1$, nous calculerons les trois premiers termes avec cinq décimales et nous aurons :

$$\begin{aligned} 1 &= 1{,}00000 \\ \frac{1}{3.4} &= 0{,}08333 \\ \frac{1}{3.4.7.8} &= 0{,}00148 \\ \hline & \ 1{,}08481 \end{aligned}$$

Sur chacun des deux derniers termes, nous avons commis une erreur moindre que $\frac{1}{10^5}$; le reste lui-même est plus petit que $\frac{2}{10^5}$; donc le nombre y_1 est compris entre

$$1{,}08481 \qquad \text{et} \qquad 1{,}08485.$$

Nous avons une valeur approchée par défaut à $\frac{1}{10^5}$ près, la valeur 1,0848.

Bonnes solutions : MM. L. Gauthier, à Craponne; Mennessier, à Évreux; R. Vignaud, lycée Michelet; A. Hutinel, à Cannes.

Assez bonnes solutions : M. Roux, au Creusot; A. Tenot, à Angers.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1920)

ÉCOLE CENTRALE (*Suite*).

10779. — Trouver l'accélération normale dans le mouvement défini par les équations $y = a.\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, $x = mt$.

— **780.** — On donne la parabole $y^2 = 2x + 1$; un point M sur cette courbe a une vitesse v inversement proportionnelle à la distance de l'origine à la tangente en ce point. Hodographe du mouvement par rapport à l'origine.

— **781.** — Expression de l'accélération en coordonnées polaires.

— **782.** — Démontrer que, lorsque l'accélération est centrale, le mouvement du point est plan.

— **783.** — On donne la courbe $\rho^2 = a^2 \cos\frac{\omega}{2}$; déterminer le mouvement d'un point sur cette courbe, sachant que la vitesse est proportionnelle au rayon vecteur ($v = k\rho$). Trouver l'accélération.

— **784.** — Construire la courbe $\rho = a.\cos^2\frac{\omega}{2}$; on sait que la vitesse du point M qui décrit la courbe est proportionnelle au rayon vecteur. Étudier le mouvement. Hodographe.

— **785.** — Mouvement défini par les équations $\rho = a\cos^2\frac{\theta}{2}$, $t = 6\theta + 8\sin\theta + \sin 2\theta$.

— **786.** — Soit la trajectoire $\rho = a.\sin\frac{2\omega}{3}$, sur laquelle se déplace un point avec une vitesse proportionnelle au rayon vecteur. Calculer l'accélération.

— **787.** — On considère la cycloïde $x = a(\varphi - \sin\varphi)$, $y = a(1 - \cos\varphi)$; cette courbe est parcourue par un mobile M, de façon que la projection du mobile sur Ox ait une vitesse constante; exprimer la vitesse du point M en fonction de φ.

— **788.** — Étant donnée une cycloïde $x = R(\alpha - \sin\alpha)$, $y = R(1 - \cos\alpha)$, étudier le mouvement d'un point qui décrit la courbe de telle façon que la projection de son mouvement sur Ox soit un mouvement vibratoire simple.

— **789.** — On donne la courbe $x = a(\alpha - \sin\alpha)$, $y = a(1 - \cos\alpha)$; un point M se déplace sur cette courbe dans le sens des x croissants de façon que le mouvement de sa projection sur Oy soit un mouvement vibratoire simple. Nature du mouvement de la projection sur Ox.

— **790.** — Soit un cercle O de rayon R; un point M décrit ce cercle avec une vitesse angulaire constante ω. Ce point est le centre d'un cercle de rayon r sur lequel se meut, avec une vitesse angulaire également constante ω, un autre point, P. Lieu du point P. Vitesse. Accélération.

— **791.** — Sur une droite OD assujettie à tourner d'un mouvement uniforme autour du point O, se trouve un curseur C assujetti à glisser sur OD d'un mouvement uniformément varié; on demande à quel instant un point de C aura une vitesse donnée.

— **792.** — On donne trois axes rectangulaires, une circonférence de centre O et de rayon R dans le plan xOy et une seconde circonférence de même centre et de même rayon dans le plan xOz. Deux mobiles partent en même temps, l'un de B sur Oy, l'autre de C sur Oz; ils ont même vitesse angulaire ω. Loi du mouvement du milieu de la droite joignant les deux mobiles.

— **793.** — On donne trois axes rectangulaires et le cercle $x^2 + y^2 - 2x = 0$ dans le plan des xy; c'est la base d'un cylindre de génératrices parallèles à Oz; on donne en outre le cône $xy + yz + zx = 0$. Les deux surfaces se coupent suivant une courbe gauche. Un mobile m se déplaçant d'un mouvement uniforme sur le cercle de base du cylindre, on demande le mouvement correspondant du point M sur la courbe d'intersection.

— **794.** — On donne le cylindre $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ et le paraboloïde hyperbolique $\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} - 2x = 0$; un point

se déplace sur l'intersection de façon que le mouvement de sa projection sur le plan des xy soit uniforme; trouver l'hodographe.

10795. — Un point M décrit une hélice de façon que sa projection sur le plan xOy ait un mouvement uniforme; de M on abaisse la perpendiculaire MK sur l'axe Oz et on considère la droite MK, qui reste de longueur constante, parallèle au plan des xy et qui participe au mouvement de M. Vitesse d'un point de cette droite; accélération.

— **796.** — On donne une hélice, un point M sur cette hélice : sa projection m décrit le cercle de base d'un mouvement uniforme. Une droite D passe par M, rencontre Oz en Q et fait un angle de 45° avec Oz. Un point S est fixe sur MQ; mouvement de ce point.

— **797.** — Un point M se déplace sur une hélice de façon que son mouvement de rotation autour de l'axe soit uniforme. Un point N se meut d'un mouvement vibratoire simple sur la normale principale en M à l'hélice, entre les points M et M′ où cette normale perce le cylindre sur lequel l'hélice est tracée; équations du mouvement résultant.

— **798.** — On considère la parabole $z^2 = 2px$; cette parabole tourne d'un mouvement uniforme autour de Oz. Un point mobile M décrit la parabole d'un mouvement tel que sa projection sur Ox ait un mouvement uniformément varié. Loi du mouvement résultant.

— **799.** — On donne une circonférence dans le plan des xy; un point M la décrit d'un mouvement uniforme. On mène par ce point la parallèle à Oz; un point P décrit cette parallèle d'un mouvement uniformément accéléré. Au temps 0, le point P est en A, sur Ox et la vitesse est tangente à la circonférence. Étudier le mouvement; hodographe; accélération.

— **800.** — On donne un cercle dans le plan xOy, de centre O et de rayon 1. Un mobile, M, décrit le cercle avec une vitesse angulaire constante ω; soit MΔ la parallèle à Oz, menée par le point M. Un point P se déplace sur MΔ d'un mouvement oscillatoire simple, tel que quand M fait un tour du cercle, P fait une oscillation complète. Composition des mouvements. Vitesse absolue.

— **801.** — Définition de la cycloïde; ses équations paramétriques. On prend un axe Oz, perpendiculaire au plan de la courbe; le point M décrit la courbe; on mène par ce point M la parallèle à Oz et on prend sur cette droite une longueur $\overline{MP} = \text{arc}\,OM$. Lieu de P; équation du plan osculateur en un point P_1 de la courbe lieu de P. Dans le cas où M décrit la cycloïde d'un mouvement uniforme, étudier le mouvement de P.

— **802.** — On donne trois axes rectangulaires, Ox, Oy, Oz, et un cercle de centre O dans le plan des xy; un autre cercle O′ se déplace de façon que son plan Π reste constamment parallèle à Oz et tangent au cercle O, le centre O′ de ce cercle décrivant le cercle O d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire ω. Équations du mouvement d'un point M qui se déplace sur le cercle O′ avec la même vitesse angulaire ω.

— **803.** — Un cône de révolution de sommet O, posé sur xOy, roule sans glissement sur ce plan; il est limité par une section perpendiculaire à l'axe, qui est un cercle. Étudier le mouvement d'un point M de ce cercle.

— **804.** — On donne la droite $\Delta\,(y = 0,\ z = 2x)$ et le cercle $(z = 0,\ x^2 + y^2 = R^2)$; le point M décrit le cercle d'un mouvement uniforme et le cercle se déplace de façon que son centre, O, décrive la droite Δ et que son plan reste parallèle au plan des xy. Mouvement résultant du point M.

— **805.** — Dans le plan des xy, on donne le cercle $x^2 + y^2 = R^2$ et dans le plan des zx la parabole $z^2 = 2px$. Le cercle se déplace de façon que son plan reste parallèle au plan des xy, le centre décrivant la parabole donnée de manière que sa projection sur Ox ait un mouvement uniformément accéléré. Enfin, un point M décrit le cercle d'un mouvement uniforme. Étudier le mouvement du point M.

— **806.** — On considère la surface $xy = z$. La reconnaître; en trouver les génératrices. Sur une génératrice coupant Ox en A, on considère le point M se déplaçant d'un mouvement uniforme et occupant la position A à l'instant initial; A se déplace d'un mouvement uniforme sur Ox et part du point O à l'instant initial. Étudier le mouvement de M; hodographe; la courbe trouvée est-elle unicursale?

Statique.

— **807.** — On donne deux points fixes, A et B, et une droite, D, menée par l'un d'eux, A; un point M, mobile sur D, est attiré par A et repoussé par B proportionnellement à la distance. Position d'équilibre.

— **808.** — On donne deux axes rectangulaires, Ox, Oy, un point A sur $Oy\,(0, a)$ et une droite $y = -mx\,(m > 0)$. On suppose qu'un point M sur Ox est attiré par A proportionnellement à la distance et repoussé par une force perpendiculaire à la droite et en raison inverse de la distance. Condition d'équilibre.

— **809.** — Un point M, sans poids, se déplace sans frottement sur une demi-circonférence située au-dessous de son diamètre AB; il est attiré par le point A proportionnellement à la distance, le coefficient de proportionnalité étant k; il est attiré de même par le point B, proportionnellement à la distance, le coefficient étant k'. Position d'équilibre.

— **810.** — On considère une parabole d'axe vertical; un point pesant, repoussé par le foyer proportionnellement à la distance, est mobile sur cette parabole sans frottement. Positions d'équilibre.

— **811.** — Étant donné le cylindre $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ et le cône $x^2 + 3y^2 - z^2 = 0$, l'intersection de ces deux surfaces se compose de deux courbes; un point M est mobile sur l'une d'elles; il est repoussé par l'origine proportionnellement à la distance. Positions d'équilibre.

— **812.** — On donne, en axes rectangulaires, une circonférence de centre O et de rayon a; un point A sur Ox, et un point B sur Oy, à une distance $OA = OB = 2a$ du centre. Un point M parcourt la circonférence avec frottement; il est attiré par A et B suivant des forces proportionnelles à la distance, le coefficient de proportionnalité étant le même. Équilibre du point.

— **813.** — On donne dans le plan des zx un cercle de rayon a, tangent en O à Oz, et, sur Oy, un centre d'attraction S, à la distance $OS = a$. Un point M, mobile avec frottement sur le cercle donné, est attiré par le point S proportionnellement à la distance. Positions d'équilibre.

10814. — On considère la courbe d'intersection des deux cylindres $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ et $y^2 - 2Rz = 0$. 1° Exprimer les coordonnées d'un point de cette courbe en fonction d'un paramètre variable. 2° On donne la droite D $(x = 0,\ y = z)$: un point matériel M, mobile sur la courbe, est soumis à une force constante parallèle à D : il y a frottement. Positions d'équilibre.

— **815.** — On donne une hélice circulaire, de pas h, de rayon a; un point matériel pesant, situé sur cette hélice, est attiré par l'origine des coordonnées proportionnellement à la distance. Équilibre : 1° dans le cas où il n'y a pas de frottement; 2° avec frottement.

— **816.** — On donne le cône $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$ et un cylindre de révolution de rayon R, dont l'axe passe par l'origine et a pour paramètres directeurs α, β, γ. Position d'équilibre d'un point non pesant, mobile sur l'intersection, en supposant qu'il y a frottement et que le point est attiré par l'origine, proportionnellement à la distance.

— **817.** — On donne un vecteur AB et un plan P. Enveloppe des axes du plan par rapport auxquels le moment du vecteur a une grandeur donnée.

— **818.** — On donne deux axes, α, β; placer un vecteur équipollent à un vecteur donné P, connaissant ses moments, A, B, par rapport aux axes α, β.

— **819.** — Étant donnée la courbe $x = t$, $y = t^2$, $z = \frac{2t^3}{3}$, soit un vecteur ayant son origine M sur la courbe, tangent à la courbe en ce point, et dont le moment par rapport à Oz est constant. Lieu de son extrémité.

— **820.** — On donne un carré ABCD et des forces respectivement égales à 1, 2, 3, 4^{kg}, appliquées en A, B, C, D, suivant les côtés du carré, de A vers B, de B vers C, etc. On demande la résultante générale et le moment résultant pris par rapport à un point quelconque du plan du système de vecteurs ainsi formé. Même question en prenant une pyramide régulière SABCD, ayant pour base le carré, avec des forces toutes égales à 2^{kg}, dirigées de S vers A, de S vers B, etc., suivant les arêtes SA, SB, etc.

— **821.** — Étant donné un triangle équilatéral, on considère une force de 1^{kg} portée par la droite qui joint les milieux de deux côtés. Y a-t-il une façon de décomposer cette force en trois autres portées par les trois côtés du triangle? Calculer ces composantes.

— **822.** — Soit ABCD un quadrilatère gauche. Faire la réduction du système des vecteurs AB, BC, CD et DA.

— **823.** — On donne trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, deux plans $z = h$ et $z = -h$ et un système de vecteurs. Réduire ce système à un vecteur V_1 parallèle à Oz, un vecteur V_2 dans le plan $z = h$, et un vecteur V_3 dans le plan $z = -h$, V_2 et V_3 étant rectangulaires. Pourquoi le système d'équations n'est-il pas complètement déterminé?

— **824.** — On donne deux forces, dont l'une est appliquée à l'origine et dont les composantes sont $X = 1$, $Y = 2$, $Z = 0$; l'autre, verticale, $Z = 1$, est appliquée au point $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$. Réduire le système à une force et à un couple tel que l'axe du couple fasse un angle de 45° avec la force.

— **825.** — Condition pour qu'un système de vecteurs admette une résultante unique. On donne trois axes rectangulaires et sur ces axes, le point A sur Ox, le point B sur Oy, le point C sur Oz : ce sont les points d'application de trois forces, F_1 parallèle à Oy, F_2 parallèle à Oz, F_3 parallèle à Ox. F_1 et F_2 étant données, déterminer F_3 pour que le système des trois forces F_1, F_2 et F_3 admette une résultante unique.

— **826.** — On donne deux forces F et F' appliquées aux points A et B sur Oz $(OA = a,\ OB = -a)$: F est parallèle à Ox, F' parallèle à Oy et de plus $F = F'$. On demande d'appliquer en O une troisième force, telle que le système de ces trois forces admette une résultante unique.

827. — Réduire un système de forces, dont on donne la résultante générale $X = 1$, $Y = 2$, $Z = 3$ et le moment résultant $L = 1$, $M = 1$, $N = 2$, à un système de deux forces appliquées l'une sur Oz au point de cote 3, l'autre en un point de la droite $x = 2$, $y = 1$.

— **828.** — On donne deux forces, l'une F suivant Oz, l'autre F' parallèle à Oy, appliquée au point $A(2a, 0, 0)$. Réduire de toutes les manières possibles à deux forces passant l'une par $B(a, 0, 0)$, l'autre par $B(-a, 0, 0)$.

— **829.** — On donne un système de vecteurs, défini par sa résultante générale OR dans le plan xOz et son moment résultant OG, placé suivant Oz. Trouver deux forces, l'une appliquée en O, d'intensité P, l'autre quelconque, formant un système équivalent au système donné.

— **830.** — On considère la courbe $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$, et un système de forces défini par sa résultante générale OR et son moment résultant OG; réduire ce système à deux forces, l'une portée par une tangente à la courbe, l'autre parallèle au plan des yz.

— **831.** — On donne la courbe $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ et un système de vecteurs défini par les éléments de sa réduction au point O (X, Y, Z; L, M, N). Réduire le système à deux vecteurs, l'un porté par une tangente à la courbe, l'autre rencontrant Oz.

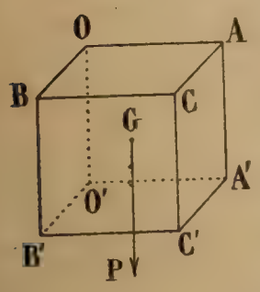
— **832.** — On donne un système de forces, défini par sa résultante générale R et son moment résultant G par rapport au point O; réduire ce système à deux forces dont l'une s'appuie sur Oz et dont l'autre ait son point d'application sur la courbe $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ et soit située dans le plan osculateur en ce point.

— **833.** — Génératrices rectilignes du paraboloïde $xy = az$; étant donné un système de vecteurs par OR et OG, trouver un système équivalent composé de deux vecteurs portés par deux génératrices de ce paraboloïde.

— **834.** — On donne un système de forces par sa résultante générale et son moment résultant (X, Y, Z; L, M, N) et le paraboloïde hyperbolique $x^2 - y^2 = 2z$; décomposer le système en deux forces ayant pour lignes d'action deux génératrices de même système du paraboloïde.

— **835.** — Soit un cube solide homogène (de poids P) dont le sommet O est fixe. En A est appliquée une force de direction perpendiculaire à la diagonale OA et d'intensité égale à P. Est-il possible de déterminer une force située dans le plan de la base inférieure et telle que le solide soit en équilibre sous l'action des forces agissant sur lui? Déterminer son support et son intensité.

10836. — Étant donné un cube dont un sommet O reste fixe, est-il possible de déterminer trois forces, dont on donne les lignes d'action, (savoir A'C', B'C' et enfin la droite qui joint les milieux des arêtes OA, O'A') de telle façon que l'équilibre soit assuré?

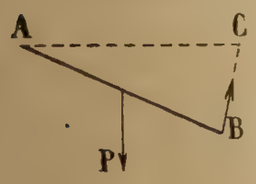


— **837.** — On donne la courbe $x^2y = a^3$; en un point M de cette courbe, on mène la tangente, qui rencontre encore la courbe au point P; lieu du centre de gravité du système des deux points M et P.

— **838.** — On donne la cubique $xy^2 = a^3$; en un point M de cette courbe, on mène la normale, qui coupe la cubique en trois points M, M_1 et M_2; on suppose que ces trois points sont des points matériels de masses égales : lieu du centre de gravité du système de ces trois points.

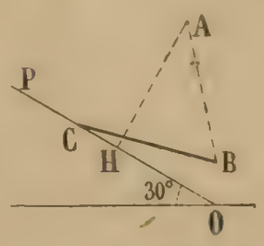
— **839.** — On donne un cône de révolution dont la base dans le plan horizontal est un cercle ayant l'origine pour centre, et un plan d'équation $2z = y + 2$; centre de gravité du tronc de cône ainsi déterminé.

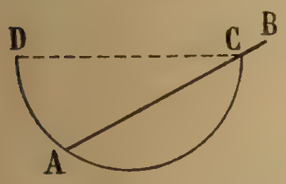
— **840.** — On donne le cône de sommet S (0, 0, 2), dont la base, dans le plan des xy est un cercle de centre O et de rayon 1. On le coupe par le plan $y + z = 1$. Trouver le centre de gravité du tronc de cône obtenu.



— **841.** — Une barre AB, pesante et homogène, est mobile autour de son extrémité A; le point B est attiré proportionnellement à la distance par un point fixe C situé dans le plan horizontal du point A, à une distance AC = AB; équilibre.

— **842.** — On considère un plan incliné à 30° et un point A; une barre pesante, BC, est rattachée au point A par un fil, AB, l'extrémité C glissant sans frottement sur le plan incliné; on donne AB = BC = AH, distance du point A au plan incliné. Position d'équilibre de la barre BC.



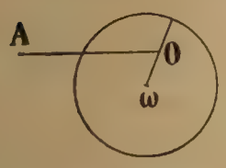


— **843.** — On donne un demi-cercle de diamètre $2a$ et une barre pesante de longueur $2a$, qui s'appuie avec frottement en A et sans frottement en C. Position d'équilibre.

— **844.** — Équilibre d'une barre homogène dans une coupe parabolique.

— **845.** — Équilibre d'un système de trois barres égales articulées et de poids différents : AB et BC de poids P, AC de poids P', le triangle ABC étant suspendu par le point A.

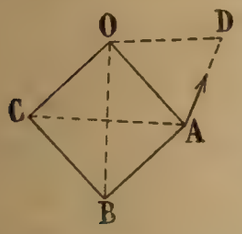
— **846.** — Condition d'équilibre d'un solide mobile autour d'un point fixe O. On donne un solide mobile autour de O; appliquer en A (a, 0, 0) et B (0, b, 0) des forces qui maintiennent le corps en équilibre et qui soient d'intensité minimum.



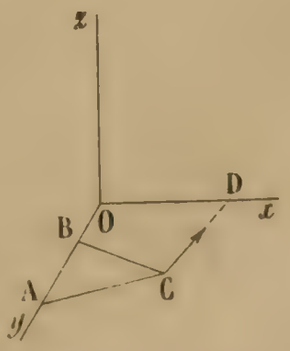
— **847.** — Équilibre d'un disque pesant, mobile autour d'un point O de sa circonférence et attiré par une force horizontale R appliqué en un point A de sa circonférence tel que les rayons CA et CO soient rectangulaires.

— **848.** — Un cercle pesant est fixé en un point O, tel que $\omega O = \frac{R}{2}$; son centre est attiré proportionnellement à la distance par un point A, pris sur l'horizontale du point O, et tel que OA = 2R; équilibre.

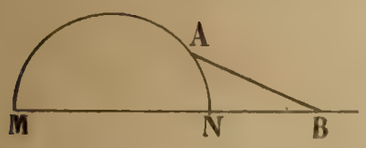
— **849.** — Un carré OABC, de poids P, est mobile autour de l'un de ses sommets O; le sommet A est attiré proportionnellement à la distance par le point D, situé sur l'horizontale du point O, à une distance OD = OA = a; positions d'équilibre de la plaque OABC.



— **850.** — On donne trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz; une plaque pesante en forme de triangle équilatéral peut tourner et glisser autour de Oy; le sommet C est attiré proportionnellement à la distance par un point D de Ox; on donne OD = AB. Positions d'équilibre.

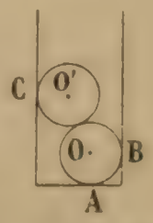


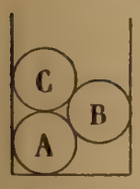
— **851.** — On considère un demi-cercle plein, dans un plan vertical et une tige rigide suivant le diamètre horizontal MN. Une barre pesante, AB, de poids P, de longueur l, s'appuie en A, sur le cercle, sans frottement, et en B, sur la tige, avec frottement. Positions d'équilibre de la barre. Cas particulier : $l = 2R$.



— **852.** — Équilibre d'un disque pesant, reposant avec frottement sur un plan d'inclinaison α, et soumis à l'action d'une force F, parallèle au plan incliné et ayant pour point d'application le point B, diamétralement opposé au point de contact A du disque avec le plan incliné.

— **853.** — On donne une douille d'obus; on place dans cette douille une sphère O dont le rayon est égal aux $\frac{3}{4}$ de celui de la douille; sur cette sphère repose une autre sphère identique. Calculer les pressions en A, B et C sur la douille (on suppose que O et O' sont dans un même plan avec l'axe du cylindre).





— **854.** — On considère un cylindre creux vertical, reposant sur le plan horizontal par son fond. A l'intérieur se trouvent trois sphères A, B, C égales homogènes, de même poids. On néglige les frottements. Intensité de la pression supportée par le fond. Équilibre de la sphère C. Pression exercé sur la paroi par la sphère B.

Géométrie et géométrie descriptive (MM. Malloizel et Roubaudi).

Géométrie.

10855. — Trouver un point M sur un cercle, tel que $\frac{MA}{MB} = k$, A et B étant deux points du cercle.

— **856.** — On donne trois points A, B, C; lieu des points M de l'espace tels que $\frac{MA}{\alpha} = \frac{MB}{\beta} = \frac{MC}{\gamma}$, α, β, γ désignant trois nombres donnés.

— **857.** — Soit le triangle ABC; lieu des points M de l'espace tels que $\frac{\text{aire MBC}}{\alpha} = \frac{\text{aire MCA}}{\beta} = \frac{\text{aire MAB}}{\gamma}$, α, β, γ, étant trois nombres donnés.

— **858.** — On donne un triangle ABC; déterminer dans le plan de ce triangle un point M tel que les triangles MBC, MCA, MAB aient des surfaces proportionnelles à des nombres donnés.

— **859.** — On donne un triangle ABC; trouver dans l'espace un point M tel que $\frac{\text{aire MBC}}{\alpha} = \frac{\text{aire MCA}}{\beta} = \frac{\text{aire MAB}}{\gamma} = k$, α, β, γ et k étant des nombres donnés.

— **860.** — Lieu des points de l'espace dont les distances à trois plans fixes sont proportionnelles à trois nombres donnés.

— **861.** — On donne trois droites parallèles; construire un triangle équilatéral ayant un sommet sur chacune de ces droites.

— **862.** — On donne trois cercles concentriques; construire un triangle équilatéral ayant un sommet sur chacun de ces trois cercles.

— **863.** — Par l'un des points de rencontre, A, de deux cercles, mener une sécante, BAC, rencontrant le premie cercle en B, le second en C et telle que $\frac{AB}{AC} = k$.

— **864.** — On donne un point A dont la droite Δ est la polaire par rapport à un cercle C; on donne en outre le rayon de ce cercle; le construire. Même question quand on donne le point A, la polaire Δ et un point du cercle ou une tangente. Problèmes analogues dans l'espace pour une sphère (on donne le point A et le plan polaire du point A).

— **865.** — Figure inverse d'un cercle, en prenant pour pôle un point non situé sur le cercle.

— **866.** — On donne dans un plan deux cercles et un point; comme exercice sur l'inversion, mener par le point donné un cercle tangent aux deux cercles donnés.

— **867.** — Cercle passant par un point et tangent à deux droites données; cylindre de révolution passant par un point et tangent à deux plans donnés.

— **868.** — Couper deux cercles par une droite suivant deux cordes de longueurs données; couper trois sphères par un plan suivant trois cercles de rayons donnés.

— **869.** — Étant données une sphère et une droite, mener par cette droite un plan coupant la sphère suivant un cercle de rayon donné.

— **870.** — On donne un plan P et deux points A et B. Trouver la sphère tangente au plan, passant par les deux points et ayant un rayon donné.

— **871.** — Mener, par un point A, une droite s'appuyant sur une droite donnée D et rencontrant deux sphères sécantes données au même point.

— **872.** — Lieu des droites passant par un point S et équidistantes de deux points donnés A et B. Mener par le point S une droite équidistante de trois points A, B, C.

— **873.** — Trièdre supplémentaire d'un trièdre donné. Cône supplémentaire d'un cône donné.

— **874.** — Construire une conique définie par un foyer et trois tangentes.

— **875.** — On donne une ellipse et un point P; on mène par ce point une sécante variable PAB; lieu du milieu M de la corde AB.

— **876.** — On considère une ellipse et un point sur cette ellipse; on mène en ce point la tangente et la normale, puis deux droites faisant le même angle avec la normale à l'ellipse; soient A et B les deux points d'intersection avec l'ellipse. Démontrer que la droite AB passe par un point fixe.

— **877.** — Construire une parabole connaissant l'axe, un point et la tangente en ce point.

— **878.** — Construire une parabole connaissant l'axe, le sommet et un point.

— **879.** — Construire une parabole connaissant deux tangentes et leurs points de contact.

— **880.** — Parabole tangente à quatre droites.

— **881.** — Construire les sommets d'une hyperbole dont on connaît les asymptotes et un point.

— **882.** — Dans une conique, on donne un foyer et trois tangentes; la conique est-elle déterminée? Trouver son axe et l'autre foyer. Dans une quadrique de révolution on donne un foyer et quatre plans tangents; la quadrique est-elle déterminée? Trouver une sphère passant par quatre points.

— **883.** — Lieu des points équidistants de deux droites; de deux plans.

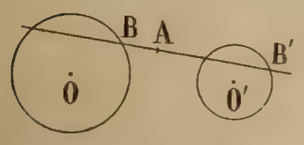
— **884.** — Lieu des points de l'espace également éloignés d'un point et d'une droite. Lieu des points de l'espace également éloignés d'une droite et de deux points.

10885. — On mène dans l'espace une droite, AB; par B on mène une autre droite, BC; par C, une troisième droite, CD; trouver une sphère de rayon donné tangente aux trois droites.

— **886.** — Volume du tétraèdre régulier, en fonction de son arête.

— **887.** — Sur une droite, on donne quatre points A, B, C, D. Montrer que l'on a $\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{BC}.\overline{AD} + \overline{CA}.\overline{BD} = 0$.

— **888.** — On donne deux cercles, O et O′, et un point, A, dans un même plan; mener par ce point A la sécante BAB′ telle que $AB.AB' = k^2$.



— **889.** — Construire un triangle connaissant a, A, $\frac{AB}{AC} = k$.

— **890.** — On donne deux cercles et un point M de leur axe radical. Montrer que le point de rencontre des polaires de M par rapport à chacune des deux circonférences appartient à l'axe radical.

Géométrie descriptive.

— **891.** — On donne un plan par son échelle de pente et un point dans ce plan, par sa projection m. Faire passer par ce point une droite du plan qui soit de pente donnée.

— **892.** — On donne un point (a, a') du second bissecteur et une droite quelconque (D, D′). Mener par (a, a') une droite du second bissecteur qui soit perpendiculaire à (D, D′).

— **893.** — On donne deux droites et un point; mener par le point une droite qui soit perpendiculaire à l'une des deux droites données et qui s'appuie sur l'autre.

— **894.** — On donne par ses traces un plan parallèle à la ligne de terre et une droite (D, D′). Construire la droite symétrique de (D, D′) par rapport au plan donné.

— **895.** — Une droite de front (D, D′) est une arête d'un trièdre trirectangle; (a, a') est un point d'une seconde arête; construire les projections du trièdre trirectangle.

— **896.** — Distance d'un point à une droite. Cas où la droite est de profil.

— **897.** — On donne une droite par ses projections et la projection horizontale a d'un point A; on connaît la distance du point à la droite; trouver la projection verticale a' du point.

— **898.** — On donne la projection horizontale D d'une droite et un point (a, a'); trouver la projection verticale D′, connaissant la distance du point à la droite (se donner la direction de D′).

— **899.** — On donne trois points; a de cote 3, b de cote 0, c de cote 4; distance du point A à la droite BC. — Distance du point a_2 à la droite b_3c_5.

— **9 0.** — Perpendiculaire commune et plus courte distance à deux droites données par leurs projections. Cas où l'une des droites est dans le plan horizontal, l'autre dans le plan vertical. Perpendiculaire commune à une droite quelconque et à la ligne de terre; à une droite quelconque et à une droite de profil.

— **901.** — Perpendiculaire commune à deux droites données par leurs projections cotées.

(A suivre.)

SUJETS DE CONCOURS

ÉCOLE CENTRALE

Concours de 1921.

Algèbre, analyse et trigonométrie.

2527. — a et b étant des quantités *positives* données $(a < b)$:

1° Étudier la variation de la fonction $\frac{x-a}{x^2(b-x)}$ quand x varie de a à b (cette fonction se rencontre dans l'étude du pendule de Foucault);

2° Calculer l'aire A limitée par la courbe dont l'équation, par rapport à deux axes rectangulaires, Ox et Oy, est $y^2 = \frac{a^2(x-a)}{x^2(b-x)}$ et par son asymptote $x = b$. Pour intégrer on pourra poser $\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} = t$;

3° Calculer l'abscisse du centre de gravité de la portion de l'aire A qui est comprise entre les deux droites $x = a$ et $x = \frac{2ab}{a+b}$, et chercher la limite vers laquelle tend cette abscisse quand b augmente indéfiniment, a restant fixe. Pour trouver cette limite, on pourra poser $b = \frac{a}{\varepsilon^2}$ et faire tendre ε vers zéro.

Géométrie analytique.

2528. — On donne, par rapport à deux axes de coordonnées rectangulaires, Ox et Oy, une circonférence (C), de rayon R, ayant son centre sur Ox en un point C, d'abscisse positive a. Un point mobile P, qui parcourt cette circonférence, est le centre d'une circonférence (Γ), de rayon variable, assujettie à rester tangente à l'axe Oy. On désigne par t l'angle variable, $t = (Cx, CP)$, que fait avec l'axe Ox le rayon CP.

1° Démontrer que la circonférence variable (Γ) est tangente à son enveloppe en deux points, l'un placé sur la droite Oy, l'autre, M, ayant pour coordonnées $x = 2\cos^2 t(a + R\cos t)$, $y = a\sin 2t + R\sin t(2 + \cos 2t)$.

2° Tracer la courbe (E), décrite par le point M, dans l'hypothèse $R = \frac{2\sqrt{2}}{3}a$.

3° Calculer, à 1cm près, la longueur totale de la courbe (E), dans cette même hypothèse, et en supposant $a = 1^m$.

4° Le point P occupant une position quelconque, déterminer le point d'intersection de la tangente en P à la circonférence (C) avec la tangente en M à la courbe (E); et comparer les directions de ces deux tangentes. En déduire la construction géométrique du point M et de la tangente à la courbe (E), connaissant le point P. Construire géométriquement les tangentes menées à la courbe (E) parallèlement à une direction donnée.

N. B. — On appréciera les solutions qui s'aideront de considérations géométriques; en particulier, la quatrième partie pourra être traitée sans calcul.

Mécanique.

2529. — Un corps solide, homogène, pesant, a la forme d'un cylindre circulaire droit dont la hauteur est égale au rayon de la base. Il repose sur un plan incliné, par trois saillies hémisphériques, de dimensions négligeables, réduites à trois points A, B, C, placés aux sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans la circonférence de base. Le frottement au contact du plan avec les deux saillies B et C est très faible et sera considéré comme nul; mais au contact avec la troisième saillie A, il y a un frottement de glissement suffisant pour qu'il soit possible de placer le corps sur le plan de façon qu'il y repose en équilibre.

On désigne par α l'angle aigu d'inclinaison du plan sur un plan horizontal, par a le rayon et la hauteur du cylindre, par P son poids, par f le coefficient de frottement en A.

1° Démontrer, *sans calcul*, que, lorsque le corps est en équilibre, le point A se trouve dans le plan vertical qui contient l'axe du cylindre. On n'étudiera dans la suite que la position pour laquelle le point A se trouve placé *au-dessus* de la droite BC.

2° Déterminer en direction, sens et intensité, les réactions exercées en A, B, C, par le plan sur le corps.

3° On fait varier la pente du plan. Pour quelle valeur extrême de cette pente l'équilibre se rompt-il? et de quelle façon tend-il à se rompre lorsque cette valeur extrême est atteinte? Calculer cette valeur dans l'hypothèse $f = 1$.

Calcul numérique.

A l'aide de la règle à calcul :

I. — Calculer, avec une erreur absolue moindre qu'un centième, la racine positive de l'équation $x^4 = 13x + 4$:

1° par la méthode des parties proportionnelles et par la méthode d'approximation de Newton :

2° par approximations successives en mettant cette équation sous la forme

$$x = \sqrt[4]{13x + 4}$$

et en prenant 2,5 pour première valeur approchée de x.

II. — Calculer, avec une erreur absolue moindre qu'un demi-centième, la somme de la série

$$\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{9} + \sin\frac{\pi}{27} + \ldots + \sin\frac{\pi}{n} + \ldots.$$

Épure.

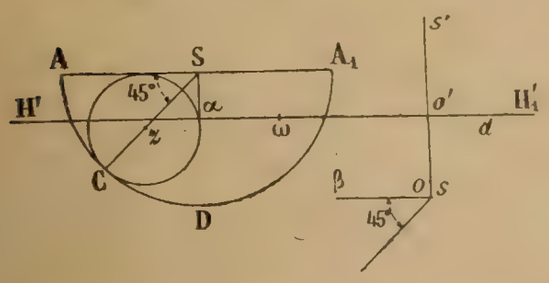
2530. — Ni cadre, ni flèches, ni titres.

H'H'₁ parallèle au grand axe de la feuille et à 20mm au-dessus ω sur le petit axe de la feuille et sur H'H'₁.

$\omega o' = 130^{mm}$, $o'o = 70^{mm}$, $\widehat{o'o\xi} = 90°$, $\widehat{\xi o x} = 45°$, $\omega x = 70^{mm}$, $\widehat{\omega x S} = 90°$,

$xS = 40^{mm}$, $\widehat{xSA} = 90°$, Rayon $SA = 120^{mm}$, $ASC = 45°$.

Un cône de révolution a pour base dans le plan horizontal $H'H'_1$ un cercle de centre (o, o'); son sommet est au-dessus de ce plan horizontal. Ce cône, limité à son sommet et à sa base, est solide et opaque.



Le développement de la surface latérale du cône étant le demi-cercle $SACDA_1$, on trouvera d'abord les projections du cône. On trace ensuite la circonférence (z) tangente à SA et, en C, à la demi-circonférence $ACDA_1$.

On demande les projections de la courbe (Γ) tracée sur le cône et dont le développement est la circonférence (z); la droite sa correspond à SA.

Cette courbe (Γ) est la directrice d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles aux deux plans de projection. On demande les projections de l'intersection du cône et du cylindre; puis de tracer sur le développement la transformée de cette intersection.

On représentera la portion du cône extérieure au cylindre.

Sur le développement on ne dessinera que ce qui correspond à la surface conique du solide représenté.

Enfin, on tracera *au crayon* les génératrices vues du cône qui subsistent, sur ce solide, ainsi que sur le développement (éviter qu'elles soient trop voisines).

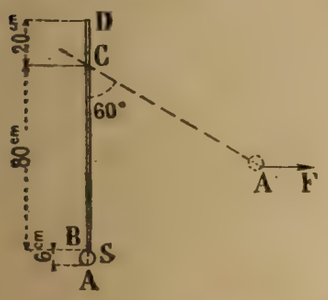
Nota. — Les résultats demandés seront seuls à l'encre noire, lignes vues en traits pleins, lignes cachées en points ronds. Tout le reste à l'encre rouge en trait plein, y compris les tangentes trouvées.

On fera les constructions nécessaires pour trouver un point quelconque de chaque courbe et la tangente en ce point, les points et tangentes remarquables.

Tous les traits à l'encre noire, à l'encre rouge et au crayon doivent être fins; aucun d'eux ne sera renforcé.

Physique.

I. — **2531.** Un pendule composé pesant, fait d'une matière de densité 8, est constitué par l'ensemble rigide d'une barre BD rectiligne, cylindrique, homogène, de longueur 1^m, et d'une sphère pleine homogène S dont le centre se trouve sur le prolongement de l'axe de la barre (voir la figure).



Ce pendule peut osciller autour d'un couteau C de masse négligeable, fixé normalement à la barre, et dont l'arête utile est à 20^{cm} de l'extrémité supérieure D du pendule. La masse de la barre BD est de 800^g; on supposera que cette masse est uniformément répartie le long de l'axe de la barre. La sphère pleine S a un diamètre AB égal à 6^{cm}.

Dans les équations, on désignera par M la masse totale du pendule, par a la distance de son centre de gravité à l'arête utile du couteau C, par I son moment d'inertie par rapport à cette même arête, par l la longueur CA et par g l'intensité de la pesanteur ($g = 981$ C. G. S.).

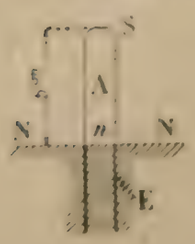
1° Calculer la valeur en kilogrammes-force de la force horizontale F qu'il faut appliquer à l'extrémité inférieure A du pendule pour le maintenir immobile et écarté de sa position verticale d'équilibre d'un angle de 60°.

2° On supprime brusquement la force F, précédente; le pendule, qu'on suppose osciller sans frottement, passe alors par sa position verticale d'équilibre avec une vitesse angulaire de 3,57 radians par seconde correspondant à une vitesse linéaire V du point A au même instant. En vue de photographier ce pendule au moment où il passe par sa position verticale d'équilibre, on met au point sur le pendule un appareil photographique dont on supposera l'objectif parfait au point de vue optique et qu'on assimilera à une lentille mince convergente de 20^{cm} de longueur focale; cet objectif est placé à 4^m du pendule; son axe optique est perpendiculaire au plan d'oscillation qu'il coupe *vers* le milieu de la position verticale du pendule. Trouver l'équation qui donne en fonction de V le temps maximum t pendant lequel l'obturateur de l'appareil photographique peut rester ouvert au moment du passage du pendule par sa position verticale d'équilibre, pour obtenir une photographie nette, la tolérance de netteté *sur la plaque* étant de un dixième de millimètre. Comment se modifie la netteté aux différents points de l'épreuve, si l'on fait croître progressivement le temps de pose?

3° Calculer numériquement, en unités C. G. S., les valeurs de V, t et I. (Pour le cas où l'on croirait en avoir besoin, il est rappelé que le moment d'inertie d'une sphère pleine homogène de masse m et de rayon R, par rapport à l'un quelconque de ses diamètres a pour expression $\frac{2}{5}mR^2$.)

NOTA. — On recommande l'usage de la règle à calcul, et on donnera les résultats numériques au $\frac{1}{200}$ près en valeur relative.

II. — **2532.** Dans une cuve profonde à mercure, de niveau N *constant*, plonge une éprouvette cylindrique verticale E ouverte en bas, fermée en haut en S, et de section intérieure constante d'aire égale à 1^{cm^2}. De l'air sec est enfermé dans la partie supérieure A de l'éprouvette E et son volume est de 5^{cm^3} quand les deux niveaux n et N du mercure sont dans le même plan (voir la figure). On supposera dans tout ce qui suit que la température reste invariable, et que la pression atmosphérique conserve la valeur constante de 76^{cm} de mercure. On ne tiendra pas compte des phénomènes capillaires.



On introduit alors, en outre, dans la chambre pleine d'air A de cette éprouvette, une masse égale à $0^g,0075$ d'un liquide volatil, dont la tension maximum est de 19^{cm} de mercure et dont la masse par centimètre cube de vapeur saturante est de $0^g,0009$.

1° L'éprouvette E étant maintenue en place ($SN = 5^{cm}$), on demande de calculer numériquement la valeur de la dénivellation, nN, qui s'établit entre les deux niveaux du mercure quand l'état d'équilibre est atteint.

2° Calculer numériquement de combien il faut soulever verticalement l'éprouvette E pour que les deux niveaux n et N du mercure soient revenus dans le même plan quand le nouvel état d'équilibre est atteint.

3° On soulève maintenant cette éprouvette E d'une longueur verticale x quelconque, *comptée à partir de la position représentée par la figure*. Le niveau intérieur n du mercure présente une dénivellation y par rapport au niveau extérieur N quand l'état d'équilibre est atteint. On demande d'établir la relation algébrique reliant x à y, dans les deux cas suivants :

α) la vapeur reste saturante. Tracer en outre dans ce cas la courbe représentant en *vraie grandeur* les valeurs de y (ordonnée) en fonction de x (abscisse). Calculer numériquement les valeurs de x et y correspondant à la fin de la saturation;

β) la vapeur n'est plus saturante (on admettra que la vapeur non saturante obéit aux mêmes lois que les gaz difficilement liquéfiables). Indiquer en outre comment la courbe exprimant les variations de y en fonction de x, dans le cas actuel, se place par rapport à la courbe de saturation précédente prolongée au delà de sa partie utile.

Chimie.

I. — Citez :

un seul corps composé réducteur bien caractérisé appartenant à la 1re famille des métalloïdes,
— — 2e —
— — 3e —
— — 4e —

Pour chacun de ces quatre réducteurs vous décrirez et expliquerez soigneusement les expériences de cours ou de manipulations par lesquelles on pourrait constater les propriétés réductrices.

II. — **2533.** On résoudra, à propos de l'eau oxygénée, les problèmes suivants :

1° L'eau oxygénée H^2O^2 pure et au maximum de concentration est un liquide dont la densité est 1,5. Calculer le volume d'oxygène gazeux que peut dégager 1 volume de cette eau oxygénée liquide.

2° Quelle est la chaleur de formation de la molécule de l'eau oxygénée à partir de ses éléments, sachant que l'on a

$$H^2 + O = H^2O + 69\,000 \text{ calories}, \qquad H^2O^2 = H^2O + O + 48\,500 \text{ calories}?$$

3° On ajoute à cette eau oxygénée pure 100 fois son volume d'eau, puis on provoque la décomposition en eau et oxygène. Calculer l'élévation de température du liquide restant en admettant que l'oxygène libéré n'emporte aucune des calories dégagées.

4° A 100^g d'eau ordinaire on ajoute 2^g d'eau oxygénée pure. Calculer la température de congélation sachant que l'abaissement de température que produirait 1 molécule-gramme dissoute dans 100^g d'eau serait 18°,5.

5° Une eau de Javel contient son volume de chlore actif. Quel poids d'eau oxygénée pure faudrait-il ajouter à 1^l de cette eau de Javel pour que se produise exactement la réaction dans laquelle l'eau de Javel et l'eau oxygénée se décomposent mutuellement en dégageant le même volume d'oxygène?

(Chaque candidat reçoit un tableau des poids atomiques à adopter.)

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

Coulommiers. — Imprimerie PAUL BRODARD.

31e Année. Août 1921. N° 11.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

MÉCANIQUE

2366. — *On donne trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz. *Un point matériel* M *de masse égale à* 1 *se déplace dans l'espace sous l'action d'une force* MF *parallèle au plan des* xy *et dont l'extrémité* F *est constamment située sur l'hélice circulaire définie par les équations* $x = 2\cos z$, $y = 2\sin z$.

1° *Écrire les équations du mouvement, puis les intégrer. On désignera par* x_0, y_0, z_0 *les coordonnées de la position initiale* M_0 *et par* a, b, c *les projections de la vitesse initiale* M_0V_0 *à l'instant* $t = 0$.

En supposant $c > 0$, *on montrera que si* $c \neq 1$ *on obtient pour* x, y, z *un premier groupe de valeurs, et si* $c = 1$ *un deuxième groupe. Démontrer que si l'on fait tendre* c *vers* 1. *les valeurs du premier groupe ont respectivement pour limites celles du second.*

2° *On fait ensuite* $x_0 = 1$, $y_0 = z_0 = 0$, $a = b = 0$, $c = 1$. *Soit alors* (C) *la trajectoire du point* M. *Montrer qu'on peut la définir géométriquement. Calculer à l'instant* t *la vitesse du point* M, *son accélération totale, tangentielle et normale. En déduire le rayon de courbure de la trajectoire et vérifier le résultat obtenu au moyen de la formule* $\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2$.

3° *Calculer la longueur de l'arc parcouru par le point* M *de l'instant zéro à l'instant* t. *et l'aire engendrée par cet arc tournant autour de* Oz.

4° *Étudier l'hodographe du mouvement.*

5° *Soit* (γ) *la projection de la courbe* (C) *sur le plan des* xy; *cette courbe* (γ) *passe au point* M_0. *Soit* m *un point quelconque de cette courbe; on pose* $Om = \rho$, *arc* $M_0m = s$. *Démontrer que l'on a* $\rho^2 = 2s + 1$.

Inversement, toute courbe du plan des xy *passant par le point* M_0, *et telle que l'on ait cette relation, coïncide avec la courbe* (γ).

1. Les coordonnées du point M étant x, y, z, celles du point F sont $2\cos z$, $2\sin z$, z, et les projections de la force MF ont pour valeurs

$$X = 2\cos z - x, \qquad Y = 2\sin z - x, \qquad Z = 0;$$

par suite, les équations du mouvement s'écrivent

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\cos z - x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 2\sin z - x, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

La troisième s'intègre immédiatement et donne $z = ct + z_0$, et les deux autres deviennent

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + x = 2\cos(ct + z_0), \qquad\qquad (2) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + y = 2\sin(ct + z_0).$$

L'équation (1) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre. L'intégrale générale de l'équation sans second membre est $A\cos t + B\sin t$; nous

aurons l'intégrale générale de l'équation avec second membre en ajoutant à $A\cos t + B\sin t$ une intégrale particulière de l'équation avec second membre. On voit sans peine que si $c > 0$ et $c \neq 1$, cette intégrale sera de la forme $\lambda\cos(ct + z_0)$, λ étant une constante, que nous déterminons en écrivant que $\lambda\cos(ct + z_0)$ vérifie l'équation (1). Nous trouvons ainsi $\lambda(-c^2 + 1) = 2$, ou $\lambda = \frac{2}{1 - c^2}$.

Par suite, l'intégrale générale de l'équation (1) est

$$x = A\cos t + B\sin t + \frac{2\cos(ct + z_0)}{1 - c^2}.$$

On voit d'une manière analogue que l'intégrale générale de (2) est

$$y = A'\cos t + B'\sin t + \frac{2\sin(ct + z_0)}{1 - c^2}.$$

Déterminons maintenant les constantes A, B, A', B' de façon que pour $t = 0$, on ait $x = x_0$, $y = y_0$, $\frac{dx}{dt} = a$, $\frac{dy}{dt} = b$, nous obtenons

$$x_0 = A + \frac{2\cos z_0}{1 - c^2}, \qquad y_0 = A' + \frac{2\sin z_0}{1 - c^2},$$
$$a = B - \frac{2c\sin z_0}{1 - c^2}, \qquad b = B' + \frac{2c\cos z_0}{1 - c^2}.$$

Nous en tirons A, B, A', B', et les valeurs de x, y, z sont alors

$$(4)\qquad \begin{cases} x = \left(x_0 - \frac{2\cos z_0}{1 - c^2}\right)\cos t + \left(a + \frac{2c\sin z_0}{1 - c^2}\right)\sin t + \frac{2\cos(ct + z_0)}{1 - c^2}, \\ y = \left(y_0 - \frac{2\sin z_0}{1 - c^2}\right)\cos t + \left(b - \frac{2c\cos z_0}{1 - c^2}\right)\sin t + \frac{2\sin(ct + z_0)}{1 - c^2}, \\ z = ct + z_0. \end{cases}$$

Supposons maintenant $c = 1$.

L'équation (1) s'écrit

$$(3)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} + x = 2\cos(t + z_0).$$

Cette fois, nous pouvons calculer une intégrale particulière de cette équation ayant la forme $t(\lambda\cos(t + z_0) + \mu\sin(t + z_0))$, λ et μ étant des constantes. Si, en effet, nous remplaçons x par cette valeur dans l'équation, nous obtenons

$$t[-\lambda\cos(t + z_0) - \mu\sin(t + z_0)] + 2[-\lambda\sin(t + z_0) + \mu\cos(t + z_0)]$$
$$+ t(\lambda\cos(t + z_0) + \mu\sin(t + z_0)) = 2\cos(t + z_0),$$

ou, en simplifiant,

$$-\lambda\sin(t + z_0) + \mu\cos(t + z_0) = \cos(t + z_0),$$

et cette équation est vérifiée pour $\lambda = 0$, $\mu = 1$.

On en conclut que $t\sin(t + z_0)$ est intégrale particulière de (1), et par suite, l'intégrale générale de cette équation est

$$x = A\cos t + B\sin t + t\sin(t + z_0).$$

On voit de même que l'intégrale générale de l'équation (2) où l'on fait $c = 1$ est

$$y = A'\cos t + B'\sin t - t\cos(t + z_0).$$

En écrivant maintenant que, pour $t = 0$, on a $x = x_0$, $y = y_0$, $\frac{dx}{dt} = a$, $\frac{dy}{dt} = b$, on

obtient $A = x_0$, $A' = y_0$, $B = a - \sin z_0$, $B' = b + \cos z_0$, et l'on a ainsi le nouveau système

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} x = x_0 \cos t + (a - \sin z_0) \sin t + t \sin(t + z_0), \\ y = y_0 \cos t + (b + \cos z_0) \sin t - t \cos(t + z_0), \\ z = t + z_0. \end{cases}$$

Cherchons maintenant les limites des seconds membres des formules (I) quand c tend vers 1. On peut écrire

$$\text{(4)} \qquad x = x_0 \cos t + a \sin t + \frac{-2 \cos z_0 \cos t + 2c \sin z_0 \sin t + 2 \cos(ct + z_0)}{1 - c^2}.$$

Quand c tend vers 1, les deux termes de la fraction tendent vers zéro. Appliquons la règle de l'Hopital; le rapport des dérivées par rapport à c est

$$\frac{2 \sin z_0 \sin t - 2t \sin(ct + z_0)}{-2c}.$$

Pour $c = 1$, ceci devient $t \sin(t + z_0) - \sin z_0 \sin t$, et la valeur (4) de x s'écrit

$$x = x_0 \cos t + a \sin t + t \sin(t + z_0) - \sin z_0 \sin t.$$

C'est la première des formules (II).

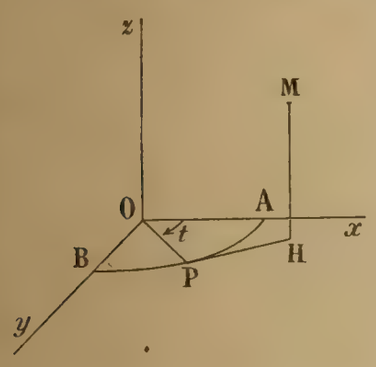
On obtiendrait de même la seconde.

2. Pour $x_0 = 1$, $y_0 = z_0 = 0$, $a = b = 0$, $c = 1$, les formules (II) deviennent

$$x = \cos t + t \sin t, \qquad y = \sin t - t \cos t, \qquad z = t,$$

elles définissent la trajectoire (C).

Les valeurs de x et de y montrent que la projection de la courbe sur le plan des xy est une développante du cercle de centre O et de rayon 1.



Pour construire un point de la courbe (C), on prendra sur le cercle le point P tel que l'angle (OA, OP) soit égal à t; puis, sur la tangente en P dans le sens négatif, on prend le point H tel que $PH = \text{arc } AP = t$. On mène alors par le point H une perpendiculaire au plan des xy, et sur cette droite on considère le point M situé à la distance t du point H. Quand t varie, le point M décrit la courbe (C).

Nous avons

$$\frac{dx}{dt} = t \cos t, \qquad \frac{dy}{dt} = t \sin t, \qquad \frac{dz}{dt} = 1;$$

la vitesse v est alors définie par la formule

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = t^2 + 1, \qquad \text{ou} \qquad v = \sqrt{t^2 + 1}.$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -t \sin t + \cos t, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = t \cos t + \sin t, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = 0;$$

et en désignant par γ l'accélération totale, on a

$$\gamma^2 = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2 = t^2 + 1, \qquad \gamma = \sqrt{t^2 + 1}.$$

Soient γ_t et γ_n les accélérations tangentielle et normale; nous avons

$$\gamma_t = \frac{dv}{dt} = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}.$$

$$\gamma_n^2 = \gamma^2 - \gamma_t^2 = t^2 + 1 - \frac{t^2}{t^2 + 1} = \frac{t^4 + t^2 + 1}{t^2 + 1}.$$

Or, $\gamma_0 = \frac{\rho^2}{R} = \frac{t^2+1}{R}$; on a donc

$$\frac{(t^2+1)^2}{R^2} = \frac{t^4+t^2+1}{t^2+1}, \qquad \text{ou} \qquad R^2 = \frac{(t^2+1)^3}{t^4+t^2+1}.$$

Nous avons maintenant

$$\frac{ds}{dt} = v = \sqrt{t^2+1}, \qquad \text{ou} \qquad ds = \sqrt{t^2+1}\,dt,$$

en supposant que s varie dans le même sens que t.

Nous en tirons

$$\frac{dx}{ds} = \frac{t\cos t\,dt}{\sqrt{t^2+1}\,dt} = \frac{t\cos t}{\sqrt{t^2+1}}, \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{t\sin t\,dt}{\sqrt{t^2+1}\,dt} = \frac{t\sin t}{\sqrt{t^2+1}}, \qquad \frac{dz}{ds} = \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}\,dt} = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}.$$

puis

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t\cos t}{\sqrt{t^2+1}}\right)\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{\cos t - t(1+t^2)\sin t}{(1+t^2)^2},$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t\sin t}{\sqrt{t^2+1}}\right)\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{\sin t + t(1+t^2)\cos t}{(1+t^2)^2},$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{-t}{(1+t^2)^2}.$$

On en déduit

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 = \frac{1+t^2(1+t^2)^2+t^2}{(1+t^2)^4} = \frac{1+t^2(1+t^2)}{(1+t^2)^3} = \frac{1}{R^2}.$$

3. On a $ds = \sqrt{1+t^2}\,dt$, et, par suite,

$$s = \int_0^t \sqrt{1+t^2}\,dt.$$

En utilisant la formule connue

$$\int \sqrt{ax^2+K}\,dx = \frac{x\sqrt{ax^2+K}}{2} + \frac{K}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+K}},$$

on a

$$\int \sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{t\sqrt{1+t^2}}{2} + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{t\sqrt{1+t^2}}{2} + \frac{1}{2}L(t+\sqrt{1+t^2}),$$

et, par suite,

$$s = \frac{t\sqrt{1+t^2}}{2} + \frac{1}{2}L(t+\sqrt{1+t^2}).$$

Considérons maintenant la surface engendrée par la courbe (C) en tournant autour de Oz. Un parallèle de cette surface a pour équations $x^2+y^2 = 1+t^2$, $z = t$, et la méridienne située dans le plan des xz a pour équations paramétriques

$$x = \sqrt{1+t^2}, \qquad z = t.$$

L'aire demandée est donc égale à l'intégrale $2\pi\int_0^s x\,ds$, s désignant l'arc de la méridienne.

On a $dx = \frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^2}}$, $dz = dt$, $ds = \sqrt{\frac{2t^2+1}{t^2+1}}\,dt$,

et l'aire est égale à $2\pi\int_0^t \sqrt{2t^2+1}\,dt$.

Or, l'intégrale indéfinie a pour valeur

$$\int \sqrt{2t^2+1}\,dt = \frac{t\sqrt{2t^2+1}}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{2t^2+1}} = \frac{t\sqrt{2t^2+1}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dt\sqrt{2}}{\sqrt{2t^2+1}},$$

ou

$$\int \sqrt{2t^2+1}\,dt = \frac{t\sqrt{2t^2+1}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{L}(t\sqrt{2}+\sqrt{2t^2+1}).$$

On en déduit, pour valeur de l'aire,

$$\pi\left[t\sqrt{2t^2+1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{L}(t\sqrt{2}+\sqrt{2t^2+1})\right].$$

4. Un point de l'hodographe a pour coordonnées

$$x_1 = \frac{dx}{dt} = t\cos t, \qquad y_1 = \frac{dy}{dt} = t\sin t, \qquad z_1 = \frac{dz}{dt} = 1.$$

Ceci montre que l'hodographe est dans le plan $z_1 = 1$, et que la projection de cette courbe sur les plans des xy a pour coordonnées polaires $\rho = t$, $\omega = t$.

Par suite, l'hodographe est une spirale d'Archimède, $\rho = \omega$, située dans le plan $z = 1$.

5. Un point de la courbe (γ) a pour coordonnées

$$x = \cos t + t\sin t, \qquad y = \sin t - t\cos t.$$

On a

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = 1 + t^2.$$

D'autre part,

$$dx = t\cos t\,dt, \qquad dy = t\sin t\,dt, \qquad ds^2 = t^2dt^2.$$

En supposant que s varie dans le même sens que t, on a $ds = t\,dt$, $s = \frac{t^2}{2}$, puisque $s = 0$ pour $t = 0$.

On en déduit immédiatement $\rho^2 = 2s + 1$.

Réciproquement, cherchons toutes les courbes pour lesquelles on a $\rho^2 = 2s + 1$.

On en tire $\rho\,d\rho = ds$, ou $x\,dx + y\,dy = ds$.

Soit α l'angle de la tangente avec Ox, on a $\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$, $\sin\alpha = \frac{dy}{ds}$, et la relation précédente devient

$$(1) \qquad x\cos\alpha + y\sin\alpha - 1 = 0, \qquad \text{avec} \qquad (2) \qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha.$$

A toute valeur de α correspond un point $M(x, y)$ de la courbe cherchée; ce point est situé, d'après l'équation (1), sur la tangente au cercle $x^2 + y^2 - 1 = 0$ au point $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, et d'autre part, d'après l'équation (2), la tangente au point M à la courbe est perpendiculaire à la tangente au cercle.

On en conclut que le lieu du point M est une trajectoire orthogonale des tangentes au cercle de centre O et de rayon 1; autrement dit, la courbe cherchée est une développante de ce cercle. Si elle passe au point M_0, elle coïncide avec (γ).

G. LACH, à Douai.

Bonnes solutions par MM. Delvoye; Paul Dor, conducteur des ponts et chaussées, à Oudjda (Maroc); F., à Saint-Cloud; A. Hutinel, à Cannes; F. Millot, à Paris; Rohmer, conducteur des ponts et chaussées; Gaston Roy; Marcel Vasseur, à Calais.

PHYSIQUE

2322. — *Un rayon de lumière monochromatique* SI *est normal à l'axe d'un cylindre droit en verre dont la base est le cercle* O. *Il pénètre dans ce cercle en* I *et, après y avoir subi deux réflexions intérieures, émerge suivant* JS'.

Soit i *l'angle d'incidence,* r *l'angle de réfraction,* n *l'indice de réfraction du verre.*

1° *Calculer la déviation totale* D *du rayon lumineux.*

2° *Déterminer la valeur* i_m *de* i *pour laquelle* D *prend sa valeur minimum* D_m. *Application à* $n = 1,5$.

3° *Calculer* $\frac{dD_m}{dn}$. *Quel est le plus dévié des rayons rouge et violet?*

4° *On suppose que le rayon soit au minimum de déviation et qu'il émane d'une flamme de sodium. Il est constitué, comme on sait, de deux radiations voisines. On donne les indices de réfraction* $n_1 = 1,49885$, $n_2 = 1,49889$ *de ces deux radiations pour le verre considéré. Quel est, en secondes d'arc, l'écartement angulaire des deux rayons émergents correspondants?*

(*Ecole Polytechnique, concours de 1916.*)

1° La déviation, en I, est $i - r$; en K, $\pi - 2r$; en L, $\pi - 2r$; en J, $i - r$. Donc

$$D = 2(\pi + i - 3r).$$

2° Pour étudier la variation de D en fonction de i, n étant constant, prenons la dérivée :

$$\frac{dD}{di} = 2\left(1 - 3\frac{dr}{di}\right).$$

Or la relation $\sin i = n \sin r$ donne $\cos i\, di = n \cos r\, dr$, d'où $\frac{dr}{di} = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}}$ et

$$\frac{dD}{di} = 2\left(1 - 3\sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}}\right).$$

Cette dérivée s'annule pour $\frac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i} = \frac{1}{9}$, d'où l'on tire $\sin^2 i = \frac{9 - n^2}{8}$ ou $\cos^2 i = \frac{n^2 - 1}{8}$.

On s'assure d'ailleurs que cette valeur de i correspond bien à un minimum, soit en prenant la dérivée seconde, soit en remarquant que $\frac{dD}{di}$ est négatif pour $i = 0$ et positif pour $i = \frac{\pi}{2}$, donc la fonction D, commençant par décroître et finissant par augmenter, passe par un minimum.

Pour $n = 1,5$, on trouve $\sin^2 i = \frac{6,75}{8} = 0,84375$, $\sin i = 0,91856$ et finalement

$$i_m = 66° 42' 58'',5, \qquad r_m = 37° 45' 40'',5, \qquad D_m = 266° 51' 54''.$$

3° L'expression générale de $\frac{dD}{dn}$, pour une valeur déterminée et fixe de i, est

$$\frac{dD}{dn} = -6\frac{dr}{dn}.$$

En dérivant par rapport à n la relation de Descartes, on a $0 = \sin r + n \cos r \frac{dr}{dn}$, d'où

$$\frac{dD}{dn} = 6\frac{\sin r}{n \cos r} = \frac{6}{n} \cdot \frac{\sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}.$$

Pour la valeur particulière de i correspondant au minimum, $\sin^2 i = \frac{9-n^2}{8}$ et l'on trouve

$$\frac{dD_m}{dn} = \frac{2}{n}\sqrt{\frac{9-n^2}{n^2-1}},$$

expression positive, donc le violet est plus dévié que le rouge.

4° Les deux indices donnés sont assez voisins pour qu'on puisse assimiler à la dérivée précédente le rapport de l'écartement angulaire des deux rayons à la différence des indices. Or, pour la valeur moyenne de n, 1,49887, ou sensiblement 1,5, le calcul de la dérivée donne 3,1 (exactement 3,1057). La différence des indices est 0,00004. Donc l'écartement des rayons est, en radians,

$$dD_m = 3{,}1 \times 0{,}00004 = 0{,}000124,$$

ce qui équivaut à 25 secondes.

E. LOGEARD.

Solution partielle de M. Ch. PAGÉ, à bord de la *Ville d'Y*.

CHIMIE

2323. — *On sait qu'en attaquant le cuivre par l'acide azotique on peut obtenir, suivant les conditions de température et suivant le degré de concentration de l'acide, soit de l'oxyde azotique pur, soit un mélange de ce composé avec d'autres gaz renfermant tous l'azote au nombre de leurs éléments.*

Indiquer un ou plusieurs essais auxquels on pourra soumettre l'oxyde azotique ainsi préparé pour reconnaître sa pureté.

En supposant que l'un de ces essais ait permis de conclure que l'oxyde azotique est mêlé à d'autres gaz, on demande de trouver la composition qualitative et quantitative du mélange au moyen des constatations suivantes :

1° *Un volume de ce mélange égal à* 100^{cm^3} *est introduit dans une cloche courbe et chauffé dans cet appareil avec un fragment de sulfure de baryum; ce composé se transforme en sulfate et le mélange gazeux subit une diminution de volume de* 25^{cm^3}.

2° *Un autre échantillon du mélange initial, de* 100^{cm^3} *également, est agité avec une solution concentrée de sulfate ferreux jusqu'à ce qu'on n'observe plus de variation de volume. Le gaz restant après cette opération est introduit dans un eudiomètre avec un volume d'hydrogène égal à* 50^{cm^3}. *Le passage d'une étincelle électrique dans ce mélange laisse un résidu gazeux constitué par un mélange de* 50^{cm^3} *d'azote et* 20^{cm^3} *d'hydrogène.*

La composition en volumes du mélange gazeux donné ayant été ainsi déterminée, en déduire la composition en poids, sachant que le poids atomique de l'azote est 14 et celui de l'oxygène 16.

(*École Polytechnique, concours de 1916.*)

Si le mélange gazeux contenait des vapeurs de peroxyde d'azote et d'anhydride azoteux, il serait coloré; de plus, en le faisant passer dans de l'acide sulfurique, on produirait, par absorption de ces vapeurs, du sulfate de nitrosyle reconnaissable par le sulfate ferreux.

Si le gaz est recueilli sur l'eau, ces vapeurs sont encore absorbées et l'eau devient acide.

Après cette absorption, le gaz ne peut plus contenir comme impuretés que de l'oxyde azoteux et de l'azote. On peut alors vérifier sa pureté par le sulfate ferreux, qui doit l'absorber complètement, ou bien en y ajoutant de l'oxygène qui le transformera en produits solubles dans l'eau et absorbant ensuite l'excès d'oxygène.

Les opérations décrites ne donneraient pas de résultats précis si le mélange contenait des vapeurs acides. Nous le supposerons donc formé exclusivement d'oxyde azotique, d'oxyde azoteux et d'azote.

1° Le sulfure de baryum est transformé par les deux premiers en sulfate. La réduction de l'oxyde azotique, qui ne contient que la moitié de son volume d'azote, produit une diminution de moitié, tandis que celle de l'oxyde azoteux, qui contient son volume d'azote, ne produit aucune variation de volume. Donc les 100^{cm^3} du mélange contiennent

$$2 \times 25 = 50^{cm^3} \text{ d'oxyde azotique.}$$

2° Dans la seconde expérience, la solution de sulfate ferreux absorbe l'oxyde azotique et il reste 50^{cm^3} d'un mélange d'oxyde azoteux et d'azote dont la réduction par l'hydrogène laisse bien un résidu de 50^{cm^3}, ce qui confirme le résultat précédent et justifie l'hypothèse faite sur la composition qualitative du mélange.

Le passage d'une étincelle électrique après addition d'hydrogène forme de l'eau par combinaison de l'oxygène contenu dans l'oxyde azoteux. Or, $50 - 20 = 30^{cm^3}$ d'hydrogène entrent dans cette combinaison; ils ont été brûlés par 15^{cm^3} d'oxygène provenant de

$$30^{cm^3} \text{ d'oxyde azoteux.}$$

Il existait donc enfin, dans le mélange essayé,

$$50 - 30 = 20^{cm^3} \text{ d'azote libre.}$$

Les poids relatifs sont représentés respectivement par les produits des volumes par les poids moléculaires, ce qui fait

$$50 \times 30 = 1\,500 \quad \text{d'oxyde azotique,}$$
$$30 \times 44 = 1\,320 \quad \text{d'oxyde azoteux,}$$
$$20 \times 28 = 560 \quad \text{d'azote,}$$

soit, environ, 44, 39 et 17 %.

Bonne solution de M. E. Logeard.

SUJETS DE CONCOURS

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES

(**Cours préparatoires.**)

Concours de 1921.

Mathématiques.

2534. — 1° On considère les quatre points d'intersection A, A', D, D' d'un cercle et d'une hyperbole équilatère. Montrer que, si AA' est un diamètre du cercle, DD' est un diamètre de l'hyperbole, et réciproquement.

On supposera dans la suite cette condition remplie.

2° Connaissant les quatre points A, A', D, D', construire les axes de l'hyperbole en position et grandeur.

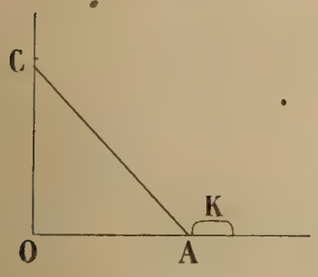
3° Connaissant l'hyperbole, et les points A et A', construire les points D et D'. Comment doivent être choisis A et A' sur l'hyperbole, si l'on veut que D et D' soient réels?

4° L'hyperbole restant fixe, et la corde AA' se déplaçant en restant parallèle à elle-même, trouver le lieu du point d'intersection P de AD' et de DA'.

Nota. — Il sera tenu compte des considérations géométriques pouvant simplifier les solutions.

Mécanique.

I. — **2535**. Une barre homogène AC, de longueur L et de poids P, s'appuie sans frottement en C contre un mur vertical, et avec un coefficient de frottement f contre un sol horizontal en A. A l'aide d'un corps pesant K destiné à la caler à la base, on veut la maintenir en équilibre dans une position telle que sa projection horizontale OA ait une longueur donnée d.



1° Dire dans quels cas le corps K est nécessaire pour l'équilibre de la barre.

2° Quel doit être dans ce cas le poids minimum de ce corps si son coefficient de frottement sur le sol est f_1?

Application numérique :

$$L = 10^m, \qquad P = 45^{kg}, \qquad f = 0{,}20, \qquad d = 6^m, \qquad f_1 = 0{,}25.$$

II. — **2536**. Dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires Ox, Oy, on considère le champ de forces

$$X = -\frac{F}{x^2}, \qquad Y = -\frac{F}{y^2} \qquad (F > 0).$$

1° Dire si le champ dérive d'une fonction de forces.

2° Déterminer et discuter les lignes de forces et les lignes de niveau.

3° On suppose qu'un point matériel uniquement soumis à la force du champ soit assujetti à décrire une droite D du plan. Combien y a-t-il de positions d'équilibre sur chaque droite D? Voir en particulier s'il y a des positions d'équilibre sur les droites

$$y = 4x + 3, \qquad y = -4x + 3,$$

et reconnaître s'il s'agit d'équilibre stable ou instable.

4° On suppose qu'un point matériel de masse m soumis à la force de projections X et Y, parti du point de coordonnées x_0, y_0 avec une vitesse V_0, passe en un point P de coordonnées x, y. Calculer la vitesse du point en P et le travail effectué par la force dans le déplacement.

III. — **2537**. Un point matériel parcourt la parabole

$$r = \frac{p}{1 + \cos\theta}, \qquad p > 0,$$

de façon à se trouver au point d'angle polaire θ et de rayon vecteur r, donné en fonction de θ par la formule précédente, à l'instant

$$t = 2A\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\theta}{2}\right).$$

1° Calculer, en fonction de θ, la vitesse en grandeur et en direction.

2° Calculer les composantes de l'accélération suivant le rayon vecteur et la perpendiculaire au rayon vecteur. Les résultats seront exprimés en fonction de r.

3° Construire l'hodographe du mouvement.

Calcul.

Sur le cercle trigonométrique, on considère les points C, D, F, extrémités des arcs de longueurs respectives $\frac{\pi}{4}$, $\frac{4\pi}{7}$, π comptés à partir du point A situé sur la partie positive de l'axe des x. Soit P le point d'intersection des cordes AD et CF.

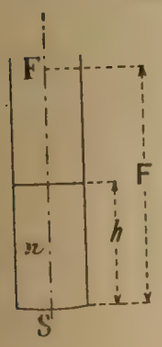
1° Calculer les longueurs AP, CP, DP, FP.

2° Calculer les coordonnées x, y du point P.

Physique.

I. — Le calorimètre de Bunsen : principe, description, corrections.

II. — **2538**. Première partie. — Un tube cylindrique vertical est limité à sa partie inférieure par un miroir concave de petite ouverture, dont l'axe est confondu avec l'axe du tube et la surface réfléchissante tournée vers le haut. Soient S le sommet du miroir, F le foyer; la distance focale F est donnée. On verse dans le tube de l'eau, d'indice n, jusqu'à une hauteur h au-dessus de S.



a) Déterminer le foyer f unique du système ainsi constitué.

b) Montrer que le point d'intersection d'un rayon incident quelconque parallèle à l'axe et du rayon émergeant correspondant est situé dans un plan fixe. Déterminer l'intersection s de ce plan avec l'axe. Montrer d'après cela que tout objet (virtuel) du plan s coïncide avec son image.

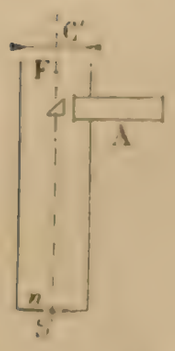
c) Construire l'image d'un objet quelconque à l'aide des deux éléments s et f.

d) Montrer que le système optique est équivalent, au point de vue de la position et de la

grandeur de l'image d'un objet, à un autre plus simple; définir les éléments et la position de cet autre système; comment varie-t-il avec h?

e) Le pouvoir dispersif de l'eau crée une aberration chromatique longitudinale du foyer f. Comment se modifie cette aberration quand h varie? Peut-on l'annuler pour une valeur convenable de h?

SECONDE PARTIE. — On suppose que le miroir concave précédent constitue, en l'absence d'eau, l'objectif d'un télescope de Foucault d'axe vertical. Les images des points à l'infini sont observées, comme on sait, après réflexion sur un petit prisme à réflexion totale placé très légèrement au-dessous du foyer F, dans un microscope latéral A. Le télescope ayant été mis au point sur une étoile, on verse comme précédemment, sur le miroir, de l'eau d'indice n donné, mais de façon qu'elle recouvre seulement le miroir sans s'élever le long des parois du tube; elle constitue sur le miroir une lentille mince.



a) On se propose de rétablir la mise au point en disposant, *au-dessus* du foyer F, normalement à l'axe, une lentille mince divergente de distance focale F'. Quelle position faut-il donner au centre optique O' de cette lentille? Préciser à quelle condition doit satisfaire F' pour que cette disposition soit matériellement réalisable, étant donné que l'existence du petit prisme à réflexion totale empêche de placer la lentille au-dessous du foyer F.

b) Dans quel rapport le grossissement initial du télescope pour un objet à l'infini a-t-il été modifié? Pour quelle valeur de F' ce grossissement est-il maximum?

c) Quelle relation doit-il y avoir entre les pouvoirs dispersifs

$$K = \frac{n_v - n_r}{n - 1} \qquad \text{et} \qquad K' = \frac{n'_v - n'_r}{n' - 1}$$

de l'eau et du verre de la lentille pour deux radiations v et r, pour que le système soit achromatisé pour ces deux radiations? Calculer K' en fonction de K, n, F, F', seules quantités intervenant dans l'expression de K'.

Application numérique. $F = 0^m,80$; $n = \frac{4}{3}$; $F' = 1^m,50$; $K = 0,025$.

NOTA. — Les candidats sont prévenus que le problème peut être résolu moyennant des calculs assez simples.

L'étude de la seconde partie du problème est simplifiée par la solution préalable de la première, mais elle peut être abordée directement.

Chimie.

I. — Classification des métalloïdes par familles. Justification.

II. — **2539**. On fait passer un mélange gazeux d'azote, d'oxygène et d'acide chlorhydrique sur du chlorure de cuivre, chauffé à 450°, fonctionnant comme catalyseur, sans changement de composition.

Le gaz sortant est desséché; on prélève un litre du gaz sec.

L'échantillon prélevé est agité avec un excès de potasse étendue et froide; le liquide est complété par addition d'eau distillée à 100^{cm3} et constitue la solution A. Le gaz restant mesure 671^{cm3}. Après un nouveau traitement du gaz à la potasse additionnée d'acide pyrogallique, le résidu est de 600^{cm3}. Les volumes gazeux indiqués sont relatifs à des gaz secs mesurés à 0° sous 760^{mm}.

On place dans un vase 10^{cm3} d'une solution d'acide arsénieux contenant un dixième de molécule de As^2O^3 par litre (décinormale). On y verse goutte à goutte la solution A, contenue dans une burette graduée, jusqu'à ce que le mélange des deux liquides devienne capable de décolorer une goutte de teinture d'indigo. Ce résultat est atteint quand $25^{cm3},3$ de A ont été versés.

On demande :

1° l'explication des réactions effectuées,

2° la composition centésimale en volume du gaz analysé;

3° la composition centésimale en volume du mélange gazeux initial, avant son passage sur le catalyseur,

4° le rendement de la réaction, c'est-à-dire le volume d'acide chlorhydrique entré en réaction pour 100 volumes de ce corps envoyés sur le catalyseur.

5° Si l'on se propose, en modifiant les conditions de l'expérience, d'améliorer le rendement, dans quel sens devra-t-on agir sur chacun des facteurs suivants : température du catalyseur, pression du mélange gazeux, proportion d'oxygène dans ce mélange?

Volume moléculaire : $22^l,4$ à 0° et 760.

NOTA. — La connaissance des poids atomiques n'est pas nécessaire pour la résolution du problème posé.

DEUXIÈME PARTIE

Note de la rédaction. — A signaler : bonnes solutions des questions 2367 et 2368 de MM. C. Deloup Paul Bernard, à Paris; bonnes solutions de 2367, de MM. G. Hèle; J. Dodat.

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

Concours ordinaire de 1919.

2398. — A) *Soit l'imaginaire* $y = f(x)$ *définie par l'égalité*

$$y = \frac{1 + ix}{1 + i\,\mathrm{tg}\,A + ix(1 + i\,\mathrm{tg}\,B)}, \qquad (i = \sqrt{-1})$$

et soient y_0 *et* y_1 *les valeurs que prend la fonction* y *lorsqu'on donne à la variable* x *les valeurs* $x_0 = 0$, $x_1 = \infty$. *On demande de calculer le module* r *et l'argument* α *de l'imaginaire*

$$\frac{y - y_0}{y - y_1} = r(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Démontrer que α *est indépendant de* x *et que* r *est proportionnel à* x.

B) *Démontrer les identités trigonométriques :*

$$\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0,$$

$$\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0,$$

$$\cos x\cos y + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(y + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(y + \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\cos(x - y),$$

$$\cos x\cos y\cos z + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(y + \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(z + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(y + \frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(z + \frac{4\pi}{3}\right)$$
$$= \frac{3}{4}\cos(x + y + z).$$

C) *Étudier la courbe* (C) *définie par les équations*

$$x = \frac{1}{2}\log\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha, \qquad y = \sin\alpha.$$

Rayon et centre de courbure en un point quelconque de (C).

Enveloppe (E) *de la droite qui joint le point* (x, y) *de la courbe* (C) *au point* (x_0, y_0) *ayant pour coordonnées*

$$x_0 = \frac{1}{2}\log\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}, \qquad y_0 = 0.$$

Rayon et centre de courbure en un point quelconque de (E). *Étudier la courbe lieu des centres de courbure de* (E).

Supposer que α *varie en fonction du temps suivant la loi* $\alpha = 2\,\mathrm{arc\,tg}\,e^t$; *déterminer la vitesse et l'accélération du mobile qui décrit la trajectoire* (C).

A. On a

$$y_0 = \frac{1}{1 + i\,\mathrm{tg}\,A}, \qquad y_1 = \frac{1}{1 + i\,\mathrm{tg}\,B};$$

on en tire

$$y = \frac{1 + ix}{\dfrac{1}{y_0} + \dfrac{ix}{y_1}} = \frac{y_0 y_1 (1 + ix)}{y_1 + ixy_0},$$

et

$$y - y_0 = \frac{ixy_0(y_1 - y_0)}{y_1 + ixy_0}, \qquad y - y_1 = \frac{y_1(y_0 - y_1)}{y_1 + ixy_0}.$$

On en déduit

$$\frac{y - y_0}{y - y_1} = \frac{-ixy_0}{y_1} = \frac{-ix(1 + i\,\mathrm{tg}\,B)}{1 + i\,\mathrm{tg}\,A} = -ix\,\frac{\cos A}{\cos B}\cdot\frac{\cos B + i\sin B}{\cos A + i\sin A},$$

ou

$$\frac{y - y_0}{y - y_1} = x\,\frac{\cos A}{\cos B}\left[\cos\left(B - A - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(B - A - \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Si $\dfrac{x\cos A}{\cos B} > 0$, le module r est égal à $\dfrac{x\cos A}{\cos B}$, et l'argument α à $B - A - \dfrac{\pi}{2}$.

Si $\dfrac{x\cos A}{\cos B} < 0$, on a $r = -\dfrac{x\cos A}{\cos B}$, $\alpha = B - A + \dfrac{\pi}{2}$.

B. On a

$$\cos x + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 2\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

et, par suite,

$$(1) \qquad \cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0.$$

De même,

$$\sin x + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 2\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\cos\frac{2\pi}{3} = -\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

et

$$(2) \qquad \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0.$$

D'autre part, on a

$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)],$$

$$\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(y + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(x + y + \frac{4\pi}{3}\right) + \cos(x - y)\right],$$

$$\cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(y + \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(x + y + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos(x - y)\right].$$

Ajoutons ces égalités membre à membre, et remarquons que la somme

$$\cos(x + y) + \cos\left(x + y + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + y + \frac{4\pi}{3}\right)$$

est nulle d'après l'égalité (1); nous obtenons

$$(3) \qquad \cos x\cos y + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(y + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(y + \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\cos(x - y).$$

Enfin, on peut écrire

$$\cos x\cos y\cos z = \frac{1}{2}[\cos x\cos(y + z) + \cos x\cos(y - z)] = \frac{1}{4}[\cos A + \cos B + \cos C + \cos D]$$

en posant

$$A = x + y + z, \qquad B = -x + y + z, \qquad C = x - y + z, \qquad D = x + y - z.$$

Remplaçons dans cette formule x, y, z respectivement par $x+\frac{2\pi}{3}$, $y+\frac{2\pi}{3}$, $z+\frac{2\pi}{3}$, puis par $x+\frac{4\pi}{3}$, $y+\frac{4\pi}{3}$, $z+\frac{4\pi}{3}$, nous obtenons

$$\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(y+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(z+\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}\left[\cos A+\cos\left(B+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(C+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(D+\frac{2\pi}{3}\right)\right],$$

$$\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(y+\frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(z+\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}\left[\cos A+\cos\left(B+\frac{4\pi}{3}\right)+\cos\left(C+\frac{4\pi}{3}\right)+\cos\left(D+\frac{4\pi}{3}\right)\right].$$

Ajoutons en tenant compte de la formule (1), nous trouvons

$$(4)\quad \cos x\cos y\cos z+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(y+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(z+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(y+\frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(z+\frac{4\pi}{3}\right)$$
$$=\frac{3}{4}\cos A=\frac{3}{4}\cos(x+y+z).$$

C. Nous supposerons que log désigne le logarithme népérien. Soit à étudier la courbe définie par les équations

$$x=\frac{1}{2}\log\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha,\qquad y=\sin\alpha.$$

En changeant α en $\alpha+2\pi$, x et y ne changent pas, donc, on aura toute la courbe en faisant varier α dans un intervalle quelconque d'étendue 2π, et par suite $\frac{\alpha}{2}$ dans un intervalle quelconque d'étendue π, par exemple de 0 à π. Mais pour que x existe, il faut que $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}>0$; par suite, on ne pourra faire varier $\frac{\alpha}{2}$ que de 0 à $\frac{\pi}{2}$, ou α de 0 à π.

De plus, si l'on change α en $\pi-\alpha$, y ne change pas et x se change en $-x$; donc la courbe est symétrique par rapport à Oy, et il suffira de faire varier α de 0 à $\frac{\pi}{2}$, et d'achever par symétrie.

En prenant les dérivées de x et de y par rapport à α on a

$$x'=\frac{1-2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha},\qquad y'=\cos\alpha,\qquad \frac{y'}{x'}=\frac{\sin 2\alpha}{1-2\sin^2\alpha}.$$

On en déduit aisément la forme de la courbe (C), qui est asymptote à Ox et a un point double et un sommet sur Oy.

Nous calculerons le rayon de courbure ρ, et les coordonnées du centre de courbure (x_1, y_1) au moyen des formules

$$\rho=\frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|x'y''-y'x''|},\qquad x_1=x-\frac{y'(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''},\qquad y_1=y+\frac{x'(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''}.$$

Nous avons

$$x'^2+y'^2=\frac{1}{4\sin^2\alpha},\qquad x'y''-y'x''=\frac{1}{2\sin^2\alpha},$$

et, par suite,

$$\rho=\frac{1}{4\sin\alpha},\qquad x_1=\frac{1}{2}\log\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\frac{\cos\alpha}{2},\qquad y_1=\frac{1+2\sin^2\alpha}{4\sin\alpha}.$$

La droite qui joint le point (x, y) de (C) au point (x_0, y_0) a pour équation

$$Y=\operatorname{tg}\alpha\left(X-\frac{1}{2}\log\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right);$$

dérivons par rapport à α, nous obtenons $X=\frac{1}{2}\log\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\frac{\cos\alpha}{2}$, et en portant dans l'équation de la droite nous avons $Y=\frac{\sin\alpha}{2}$.

Les équations paramétriques de l'enveloppe (E) sont alors

$$X = \frac{1}{2}\log \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \frac{\cos\alpha}{2}, \qquad Y = \frac{\sin\alpha}{2}.$$

Nous en tirons

$$X'^2 + Y'^2 = \frac{\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha}, \qquad X'Y'' - Y'X'' = \frac{\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha};$$

le rayon de courbure de cette enveloppe est égal à $\frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha}$, et les coordonnées du centre de courbure sont

$$X = \frac{1}{2}\log \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \qquad Y = \frac{1}{2\sin\alpha};$$

L'élimination de α est facile, car on a

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = e^{2X}, \qquad Y = \frac{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{1 + e^{4X}}{4e^{2X}}, \qquad \text{ou} \qquad Y = \frac{e^{2X} + e^{-2X}}{4},$$

et cette équation représente une chainette.

Calculons maintenant la vitesse et l'accélération du point qui décrit la courbe (C) suivant la loi $\alpha = 2\operatorname{arc\,tg} e^t$, ou $e^t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Nous en tirons successivement

$$e^t dt = \frac{d\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad \frac{d\alpha}{dt} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}e^t = \sin\alpha, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt}$$

$$v^2 = \left[\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2\right]\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{1}{4\sin^2\alpha}\sin^2\alpha = \frac{1}{4}.$$

La vitesse étant constante, l'accélération se réduit à sa composante normale, dont la valeur est $\frac{v^2}{\rho}$ ou $\frac{1}{4}\cdot 4\sin\alpha = \sin\alpha$.

M., à Guéret.

Bonnes solutions par MM. Raymond Chirol, à Saint-Étienne; A. Hutinel, à Cannes; L. Naucelle, à Thionville.

PHYSIQUE

2361. — *On se propose de déterminer une valeur approchée de l'équivalent mécanique de la chaleur en utilisant le dispositif suivant :*

Un calorimètre cylindrique, contenant de l'eau et muni de palettes fixes, est mobile, sans frottement, autour de son axe; suivant ce même axe et à l'intérieur du calorimètre est disposé un arbre garni, également, de palettes et que l'on peut faire tourner à l'aide d'une énergie extérieure, sans que les deux systèmes de palettes puissent se toucher; l'eau transmet le mouvement de rotation de l'arbre au calorimètre qui est entraîné dans le même sens.

La vitesse constante de rotation de l'arbre est de mille tours à la minute; il faut exercer sur le calorimètre, pour l'empêcher de tourner, un couple de $1{,}24 \times 10^5$ *unités C. G. S.*

La température de l'eau monte de $0^\circ{,}91$ *par minute; la masse du calorimètre, de l'arbre et de leurs palettes est de* 500^g; *la chaleur spécifique du métal qui les constitue est* 0,1; *la masse de l'eau (y compris le thermomètre réduit en eau) est de* $2\,000^g$.

1° *Quelle valeur de l'équivalent mécanique de la calorie-gramme déduirait-on de cette expérience?*

2° *Étant donné que l'élévation de température de* 0°,91 *par minute résulte de la mesure de l'élévation totale de température pendant* 5 *minutes et que la seule cause d'erreur dont on tienne compte est celle qui résulte de l'emploi d'un thermomètre dont la lecture comporte une erreur absolue possible de* $\frac{1}{50}$ *de degré à chaque pointé, on demande de calculer la valeur maxima de l'erreur relative possible sur l'évaluation de* J.

(*École centrale, concours de* 1917.)

1° L'énergie extérieure produit un couple qui équilibre à chaque instant celui qui immobilise le calorimètre. Le travail de ce couple est le produit de son moment par l'angle de rotation. Chaque tour représentant un angle 2π, le travail fourni par l'énergie extérieure en une minute est donc

$$1,24 \times 10^7 \times 2\pi \times 1\,000.$$

D'autre part, la chaleur dégagée en une minute, produit de la valeur en eau du système par sa variation de température, est de $2\,050 \times 0,91$ petites calories.

L'équivalent mécanique de la calorie-gramme est donc, en ergs $\frac{1,24 \times 10^7 \times 6,283 \times 1\,000}{2\,050 \times 0,91}$, en joules $\frac{1,24 \times 6,283 \times 1\,000}{2\,050 \times 0,91} = 4,176$.

2° La mesure de la variation de température en 5 minutes a donné $5 \times 0,91 = 4,55$. Cette mesure résulte de deux pointés. Or une erreur de $\frac{1}{50}$ à chaque pointé peut produire une erreur de $\frac{1}{25}$ de degré sur la variation observée et, comme l'évaluation de J est inversement proportionnelle à l'évaluation de cette variation, l'erreur relative possible sur J est $\frac{1}{25} \times \frac{1}{4,55} = \frac{1}{114}$.

L'erreur absolue serait $\frac{4,176}{114} = 0,037$.

Solution exacte de M. J. Conte, à Espalion; solution partielle de M. A. Tenot, à Angers.

CHIMIE

2362. — *Un composé gazeux, que nous désignerons par* X, *contenant du phosphore, du fluor et peut-être un autre élément, a été étudié par Moissan qui a réalisé, entre autres, les opérations suivantes :*

Pesée du gaz X. — *Un ballon de* 164^{cm3} *contenait* 0^g,607 *de ce gaz, à la température* 22° *et à la pression* 772^{mm},5.

Dosage du fluor. — 80^{cm3},3 *du gaz* X, *chauffés avec du verre, ont fourni* 60^{cm3},2 *de fluorure de silicium, dans les mêmes conditions de température et de pression.*

Dosage du phosphore. — 124^{cm3},6 *du gaz* X, *dans les conditions normales de température et de pression, soumis à une série de traitements convenables, ont donné* 0^g,618 *de pyrophosphate de magnésium, contenant tout le phosphore du gaz traité.*

On demande :

1° *de montrer qu'il résulte, de ces trois opérations, que* X *ne contient pas, en quantité appréciable, d'autre corps que du phosphore et du fluor;*

2° *d'établir la formule moléculaire du gaz* X;

3° *d'imaginer les opérations chimiques successives qui pourraient, vraisemblablement, être utilisées pour le dosage du phosphore à l'état de pyrophosphate de magnésium, et de formuler les réactions correspondantes.*

N. B. — Les erreurs des expériences sont telles que la précision de la règle à calcul, dont l'emploi est facultatif, est suffisante.

Chaque candidat reçoit un tableau des poids atomiques.

(*École centrale, concours de* 1917.)

Pour rendre comparables les résultats des trois opérations citées, rapportons-les au poids de 164^{cm^3} du gaz X dans les conditions normales.

D'après le résultat de la première opération, ce poids qui, pour un volume donné, est proportionnel à la pression et inversement proportionnel à la température absolue, est égal à

$$0.607 \times \frac{295}{273} \times \frac{760}{772.5} = 0.645.$$

D'après le résultat de la seconde opération, 164^{cm^3} du gaz X auraient fourni, dans les mêmes conditions de température et de pression, un volume de fluorure de silicium égal à $60.2 \times \frac{164}{80,3}$. Or un volume moléculaire, c'est-à-dire $22\,400^{cm^3}$, de fluorure de silicium contient $4 \times 19 = 76^g$ de fluor. Le volume considéré en contient

$$60.2 \times \frac{164}{80.3} \times \frac{76}{22\,400} = 0.417.$$

Le poids moléculaire du pyrophosphate de magnésium $P^2O^7Mg^2$ est de 222^g et contient 62 de phosphore ; $0^g.618$ en contiennent $0.618 \times \frac{62}{222}$ et 164^{cm^3} du gaz X en contiennent

$$0.618 \times \frac{62}{222} \times \frac{164}{124.6} = 0.227.$$

La somme, 0.644, des poids de fluor et de phosphore ainsi trouvés reproduit presque exactement le poids du corps étudié, ce qui montre que celui-ci ne renferme pas d'autres éléments en quantité appréciable.

Pour un atome, ou 31, de phosphore, le poids de fluor est

$$.417 \times \frac{31}{227} = 57 = 3 \times 19.$$

La formule la plus simple qui représente la composition du gaz X est donc PF^3.

D'autre part le poids moléculaire, c'est-à-dire le poids d'un volume 22 400, se déduit de la première opération : il est égal à

$$0.645 \times \frac{22\,400}{164} = 88.$$

C'est précisément le poids représenté par la formule PF^3.

3° En traitant le fluorure de phosphore par une dissolution de potasse, on doit le transformer d'abord en un mélange de fluorure et de phosphite :

$$PF^3 + 5KOH = 3KF + PO^3K^2H + 2H^2O.$$

Par un oxydant, tel que le chlore ou l'acide azotique, on changera le phosphite en phosphate, puis on précipitera celui-ci par le réactif ammoniaco magnésien, c'est-à-dire par un mélange de chlorure de magnésium, de chlorure d'ammonium et d'ammoniaque. Par exemple, si le phosphate est resté acide, on aura la réaction

$$PO^4K^2H + MgCl^2 + AzH^3 = PO^4MgAzH^4 + 2KCl.$$

Enfin le précipité de phosphate ammoniaco-magnésien sera calciné et transformé ainsi en pyrophosphate :

$$2PO^4MgAzH^4 = P^2O^7Mg^2 + 2AzH^3 + H^2O.$$

Si l'on craignait que la présence d'un fluorure ne déterminât une précipitation de fluorure de magnésium, on pourrait détruire préalablement le fluorure de potassium par l'acide sulfurique concentré, mais le fluorure de magnésium ne doit pas se précipiter en présence de l'ammoniaque.

En réalité, le mode opératoire qui vient d'être imaginé présente des complications et il est préférable, d'après Moissan, de décomposer préalablement le gaz par le verre chauffé au rouge sombre et de dissoudre ensuite le phosphore dans l'acide azotique pour le transformer en acide phosphorique.

MARCELLE et GEORGES HÈLE, à Nogent-le-Rotrou.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1920)

ÉCOLE CENTRALE (*suite.*)

10902. — On donne un segment de droite (ab, $a'b'$). Prendre sur une droite (D, D') donnée, à partir d'un point (c, c') un segment (cd, $c'd'$) égal au segment donné. Déterminer l'axe autour duquel il faut faire tourner le segment (ab, $a'b'$) pour l'amener en coïncidence avec (cd, $c'd'$).

— **903.** — On donne deux points (a, a'), (b, b') et un plan PαQ'; déterminer une droite du plan, autour de laquelle il faudra faire tourner le point A pour l'amener sur B.

— **904.** — On donne un plan P, une droite Δ et un axe A. Faire tourner le plan P autour de l'axe A jusqu'à ce qu'il devienne parallèle à Δ.

— **905.** — Angle de deux droites.

— **906.** — Angle de la ligne de terre avec un plan PαQ'.

— **907.** — On donne un trièdre ayant une arête horizontale et une arête de front; angle de la troisième arête avec le plan des deux autres.

— **908.** — Mener par un point une droite faisant des angles donnés, α et β, avec les deux plans de projection.

— **909.** — Un point est donné par ses projections; faire passer, par ce point, un plan faisant des angles donnés avec les plans de projection.

— **910.** — Mener par une droite un plan faisant des angles égaux avec les plans de projection.

— **911.** — On donne trois droites, SA, SB, SC; déterminer les cônes de révolution qui passent par ces trois droites; nombre de solutions.

— **912.** — Trois droites sont données dans l'espace; construire un plan faisant des angles égaux avec ces trois droites.

— **913.** — Angle de deux plans; angle de deux plans donnés par leurs traces; angle de deux plans en géométrie cotée.

— **914.** — Angle de deux plans donnés par leur intersection et un point de chacun d'eux. On donne une droite (A, A') et deux points (b, b'), (c, c'); on considère le dièdre d'arête (A, A') et dont les faces passent respectivement par (b, b') et (c, c'). Trouver le rectiligne de ce dièdre.

— **915.** — Angle d'un plan quelconque et d'un plan vertical.

— **916.** — On donne un plan de bout R' et un plan quelconque PαQ'; angle de ces deux plans; mener les plans bissecteurs.

— **917.** — On donne un plan par ses traces et une droite (D, D') dans ce plan; mener par (D, D') un plan faisant un angle donné avec le plan donné.

— **918.** — Projections d'un tétraèdre défini par ses quatre sommets; ponctuation. Évaluer son volume.

— **919.** — On donne trois segments (ab, $a'b'$), (bc, $b'c'$), (cd, $c'd'$). Projection du parallélépipède dont ces segments sont les arêtes.

— **920.** — On donne un segment (ab, $a'b'$), puis, dans le plan horizontal, bc et cd; trouver $b'c'$ et $c'd'$ sachant que, dans l'espace, BC est perpendiculaire à AB et CD perpendiculaire à BC. Construire les projections du parallélépipède dont ces trois segments seraient les arêtes.

— **921.** — On donne dans le plan horizontal un quadrilatère, base d'une pyramide de sommet S_3. Mener par le point p_3 un plan coupant la pyramide suivant un parallélogramme.

— **922.** — Un quadrilatère $abcd$ est la base, dans le plan horizontal, d'un prisme dont la direction des arêtes est donnée; trouver les dièdres de ce prisme.

— **923.** — Dans le plan horizontal, on donne un polygone $abcd$; c'est la base d'une pyramide de sommet (s, s'); évaluer le dièdre d'arête ad.

10924. — Un pentagone *abcde* est la base, dans le plan horizontal, d'une pyramide de sommet (s, s'); visibilité; mener le plan bissecteur du dièdre *ab*.

— **925.** — Tracer dans le plan vertical un quadrilatère $a'b'c'd'$. Soit un point quelconque (s, s'); c'est le sommet d'une pyramide de base $(abcd, a'b'c'd')$. Angle des deux faces $(sac, s'a'c')$ et $(abc, a'b'c')$.

— **926.** — On donne un triangle $(abc, a'b'c')$ et un point (d, d'). Ponctuer le tétraèdre $(abcd, a'b'c'd')$; déterminer le dièdre $(ab, a'b')$.

— **927.** — On donne un polygone dans le second plan bissecteur et un point (s, s') quelconque; trouver le dièdre de la pyramide ainsi définie, dont l'arête est $(sa, s'a')$.

— **928.** — On donne une horizontale (H, H') et un point (a, a'). Construire un triangle équilatéral ayant un sommet en (a, a') et dont le côté opposé soit porté par (H, H').

— **929.** — Triangle équilatéral dont on donne deux sommets, le troisième étant situé dans un plan donné.

— **930.** — Triangle équilatéral de sommet (a, a'), dont le côté opposé est sur une droite (D, D') quelconque. Construire le tétraèdre régulier ayant ce triangle pour base.

— **931.** — On donne une droite horizontale D et un point A. Construire un tétraèdre régulier ayant un sommet en A et une arête portée par la droite D.

— **932.** — On donne un point (a, a') et une droite (Δ, Δ'). Construire un triangle équilatéral de sommet (a, a') et dont le côté opposé est sur (Δ, Δ'); ce triangle est la section droite d'un prisme; construire le prisme.

— **933.** — On donne un segment $(ab, a'b')$ et un plan PαQ'; le segment est un côté d'un carré dont un autre sommet est dans le plan donné; construire ce carré.

— **934.** — On considère deux points; *a* de cote 1, *b* de cote 4 et la droite *ab*. Soit C un point quelconque, de cote 5. Construire un carré ayant un sommet en C et le côté opposé suivant *ab*. Construire un cube sur ce carré.

— **935.** — On donne un segment de droite; c'est l'arête d'un cube; le construire, sachant qu'une autre arête est de front.

— **936.** — On donne un plan par deux droites concourantes (D, D'), (Δ, Δ') et le segment $(ab, a'b')$ joignant le point (a, a') de la première au point (b, b') de la seconde. Construire le cube dont un côté est $(ab, a'b')$ et dont une face est dans le plan donné.

— **937.** — Dans un plan, défini par deux droites concourantes A et B, se trouve un rectangle dont on donne un côté et dont les diagonales sont placées suivant ces droites A et B. Construire ce rectangle; c'est la base d'un parallélépipède rectangle de hauteur donnée; le construire.

— **938.** — On donne un segment $(ab, a'b')$ et la projection horizontale *c* d'un point. AB est la diagonale d'un losange dont C est un sommet; déterminer ce losange. On donne un point (s, s'); volume de la pyramide ayant le losange pour base et S pour sommet.

— **939.** — On donne une horizontale (H, H') et un point (a, a'). Projections du cercle ayant (a, a') pour centre et tangent à (H, H').

— **940.** — Intersection de deux prismes à arêtes horizontales ayant pour bases, dans le plan vertical, le premier un quadrilatère, le second un triangle donnés.

— **941.** — Un cône a pour base un cercle du plan horizontal et pour sommet un point (s, s'); déterminer les points d'intersection avec une droite de profil $(ab, a'b')$.

— **942.** — On donne une parabole dans le plan horizontal; elle est la base d'un cône dont on donne le sommet; contours apparents de ce cône.

— **943.** — Un cône a pour base un cercle situé dans le plan défini par deux droites concourantes (A, A'), (B, B'); le centre du cercle, (o, o'), coïncide avec le point de concours de ces deux droites; le sommet du cône, (s, s'), est situé sur *xy*. Contours apparents, ponctuation.

— **944.** — On donne un cône de sommet (s, s'), dont la base est un cercle situé dans le plan horizontal; on le coupe par un plan de bout, et on prend la section comme base d'un cylindre de génératrices parallèles à *xy*. Contours apparents de ce cylindre.

— **945.** — On donne un cercle dans un plan horizontal H' et un point (s, s') sur *xy* et on considère le cône ayant pour base le cercle donné et pour sommet (s, s'); la direction des rayons lumineux étant à 45°, on demande l'ombre propre du cône et les ombres portées sur les deux plans de projection.

— **946.** — Mener à un cylindre une tangente parallèle à une direction donnée et s'appuyant sur la ligne de terre.

— **947.** — Dans le plan PαQ', on donne un cercle par son centre (o, o') et son rayon R; ce cercle est la base d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la direction (Δ, Δ') donnée; mener à ce cylindre les plans tangents parallèles à la ligne de terre.

— **948.** — On donne un cône dont la base est un cercle tangent à *xy* et de centre (o, o'); le sommet est (s, s'); mener des plans tangents perpendiculaires au plan de base.

— **949.** — On donne un cône de sommet (s, s'), dont la base est un cercle situé dans le plan horizontal; mener à ce cône un plan tangent faisant avec le plan horizontal un angle donné.

— **950.** — Un cylindre est défini par sa base circulaire, dans le plan vertical, et par la direction de ses génératrices; lui mener un plan tangent faisant un angle donné avec le plan horizontal.

— **951.** — Mener, à un cylindre dont la base est donnée dans le plan de cote 0, un plan tangent de pente donnée.

— **952.** — Normale commune à un cône dont la base est donnée dans le plan horizontal et à un cylindre dont la base est donnée dans le plan vertical.

10953. — On donne un cône par sa base, qui est un cercle (o, o') du plan horizontal et son sommet (s, s'). On le coupe par un plan défini par la ligne de terre et un point (a, a') pris sur la droite $(os, o's')$ qui joint le sommet du cône au centre (o, o') de la base; construire un point de l'intersection et la tangente en ce point.

— **954.** — On donne un cylindre défini par sa base circulaire dans le plan horizontal et par son axe (Δ, Δ'); section par un plan défini par la ligne de terre et un point (a, a'), pris sur (Δ, Δ'). Tangentes de profil à la section.

— **955.** — On donne un cercle dans le plan horizontal, une droite passant par le centre c_0 et un point a_1 sur cette droite, et une droite P dans le plan horizontal. Un cylindre a pour base le cercle et ses génératrices sont parallèles à ca. Intersection avec le plan défini par la droite P et le point a.

— **956.** — Un cône de sommet (s, s') a pour base dans le plan horizontal une parabole; section par un plan quelconque.

— **957.** — Section plane d'un cylindre parabolique.

— **958.** — On donne un cône par sa base, qui est un cercle dans le plan vertical, et son sommet (s, s'); on le coupe par le plan $P\alpha Q'$; déterminer les points de la section où la tangente est horizontale.

— **959.** — Section plane d'un cylindre dont la base est une ellipse donnée dans le plan horizontal, et de génératrices parallèles à une direction donnée; le plan est donné par ses traces. Tangentes parallèles à une direction donnee.

— **960.** — Un cercle du plan vertical est la base d'un cône dont le sommet se projette verticalement sur ce cercle; section par un plan donné quelconque.

— **961.** — Un cône a pour base une ellipse dans le plan horizontal; section par le second bissecteur; point courant, tangente en ce point; recherche des directions asymptotiques et des asymptotes.

— **962.** — Dans le plan vertical, on donne un cercle; c'est la base d'un cône de sommet (s, s'). Soit SA une génératrice du cône S; on donne une droite quelconque D; intersection du cône par le plan mené par D parallèlement à SA.

— **963.** — Cône supplémentaire d'un cône donné dont la base est un cercle du plan horizontal; trace de ce cône sur le plan horizontal. Point courant et tangente; nature de cette trace, directions asymptotiques et asymptotes; sommets.

— **964.** — Un cône a pour base dans le plan horizontal une circonférence. Mener par une droite donnée des plans tangents au cône supplémentaire du cône donné.

— **965.** — On donne un cône par sa base circulaire et son sommet. Section par un plan $P\alpha Q'$ du cône supplémentaire du cône donné.

— **966.** — Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point (a, a') sur les plans tangents à un cône donné par son sommet (s, s') et sa base qui est un cercle dans le plan horizontal; point et tangente (intersection d'une sphère avec un cône supplémentaire du cône donné).

— **967.** — Deux cercles, dans le plan horizontal, sont les bases de deux cônes dont les sommets sont donnés par leurs projections cotées. Intersection, points remarquables, plans limites, points sur les contours apparents, points où la tangente est horizontale.

— **968.** — Intersection de deux cylindres à génératrices de front, ayant pour bases, dans le plan horizontal, le premier une hyperbole H dont l'une des asymptotes est parallèle à la ligne de terre, le second une circonférence O dont le centre est un point de cette asymptote.

— **969.** — Intersection d'un cône et d'un cylindre dont les bases sont deux hyperboles du plan horizontal.

— **970.** — Sur le plan horizontal, on donne deux droites A et B; ce sont les génératrices de contact avec ce plan de deux cylindres de révolution de rayons donnés; intersection de ces deux cylindres; point courant et tangente; points sur les contours apparents; plans limites; point double et tangentes; ponctuation.

— **971.** — On donne dans le plan horizontal deux circonférences se coupant; l'une, O_1, est la base d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la droite de front (F, F'); l'autre, O, est la base d'un cône de sommet (s, s') dont la projection horizontale s est un point commun aux deux circonférences. Intersection.

— **972.** — On donne un cylindre à génératrices de front, dont la base, dans le plan horizontal, est une circonférence; un cône de révolution à axe quelconque a son sommet sur une génératrice du cylindre qui est commune aux deux surfaces. Nature de la section; point courant et tangente.

— **973.** — On donne deux circonférences o et ω dans le plan horizontal; ce sont les bases de deux cônes de sommets s et σ (s tombe sur la circonférence o, et σ sur la circonférence ω) et la droite $s\sigma$ qui joint les deux sommets perce le plan de base au point a sur la circonférence ω; déterminer l'intersection; point courant et tangente; points à l'infini.

— **974.** — On donne un cône de révolution à axe vertical, dont la base dans le plan horizontal est le cercle (o, o'); un cylindre à génératrices verticales a pour base dans ce plan horizontal une ellipse ayant pour foyer le point O; trouver un point de l'intersection et la tangente en ce point.

— **975.** — On donne dans le plan horizontal deux cercles concentriques qui sont les bases de deux cylindres à génératrices de front; point courant de l'intersection et tangente en ce point; nature de la projection verticale; asymptotes.

— **976.** — On donne un cône de sommet (s, s'), dont la base est une ellipse du plan horizontal; dans le contour apparent vertical de ce cône, on inscrit un cercle et on considère le cylindre de bout qui passe par ce cercle. Intersection, points doubles, plans des deux courbes d'intersection. Application : par un point mener un plan qui coupe le cône suivant une courbe qui se projette verticalement suivant un cercle.

— **977.** — Deux cônes, S et T, ont une circonférence commune dans le plan horizontal; intersection; points doubles et tangentes en ces points.

— **978.** — Une ellipse, dans le plan horizontal, est la base commune à deux cônes dont les sommets sont projetés sur l'ellipse. Point courant de l'intersection et tangente; lieu de ce point, nature de la section; courbe plane.

10979. — Dans un plan horizontal, on donne un limaçon de Pascal, base commune de deux cônes de sommets S et T, la cote de S étant le double de celle de T. Intersection de ces deux cônes, points remarquables, etc.

— **980.** — On donne une parabole dans le plan vertical; c'est la base commune à deux cônes de sommets (s, s'), (σ, σ'), les projections verticales s' et σ' étant situées sur la parabole. Intersection des deux cônes, construction d'un point et de la tangente en ce point; sachant que l'intersection se complète par une courbe plane, genre de cette courbe, asymptotes.

— **981.** — On donne un cône ayant pour base une circonférence du plan horizontal; le sommet est défini par sa projection et sa cote. Trouver les génératrices du cône qui ont une pente égale à 1/3.

— **982.** — On donne un cône dont la base, dans le plan horizontal, est un cercle : quels sont les plans qui coupent ce cône suivant un cercle? les déterminer.

— **983.** — Deux cercles situés dans des plans différents se coupent en deux points : déterminer les cônes qui passent par ces deux cercles.

— **984.** — Soit un cône oblique, à base circulaire dans le plan horizontal : chercher les axes de ce cône.

— **985.** — Montrer que le lieu du conjugué harmonique d'un point P par rapport à un cône du second degré est un plan. Faire l'épure en supposant un cône de révolution à axe vertical.

— **986.** — Un cône a pour base une ellipse dans le plan horizontal; on considère un point C du plan horizontal, à l'intérieur de cette ellipse. Mener par ce point un plan tel que C soit le centre de la section.

— **987.** — On donne un cône à base circulaire sur le plan horizontal; on donne un second cercle sur le plan horizontal; c'est la base d'un cylindre qui a ses génératrices parallèles au plan vertical. Déterminer la direction de ces génératrices, sachant que le cylindre est tangent au cône.

— **988.** — Section plane d'un cône de révolution. On donne un cône de révolution à axe vertical et un plan; nature de la section; axes en projection; construction d'un point quelconque et de la tangente.

— **989.** — On considère un cône de révolution à axe vertical; section de ce cône par un plan passant par xy et le milieu de l'axe.

— **990.** — On donne un cône de révolution à axe vertical; sur le plan horizontal une droite P extérieure au cercle de base et sur l'axe du cône un point (a, a'). Section du cône par le plan déterminé par la droite P et le point (a, a'). Nature de la section, ponctuation; quel est, en projection horizontale, le grand axe de l'ellipse? démontrer que le point S est foyer.

— **991.** — On donne un cône de révolution à axe vertical et une droite. Mener par la droite un plan coupant le cône suivant une parabole.

— **992.** — Section d'un cylindre de révolution par le plan horizontal de projection; axes de la section.

— **993.** — A l'intérieur d'un cône de révolution on donne un point F; mener par ce point un plan coupant le cône donné suivant une conique dont un foyer coïncide avec le point F.

— **994.** — On donne sur le plan horizontal une ellipse dont le grand axe est parallèle à la ligne de terre; on donne aussi les projections (D, D') d'une ligne droite. Déterminer un cône de révolution passant par l'ellipse et dont l'axe rencontre la droite donnée.

— **995.** — Contours apparents d'un cône de révolution défini par son axe $(sa, s'a')$ et son demi-angle au sommet. Trace sur le plan horizontal.

— **996.** — On donne l'axe d'un cône de révolution tangent au plan vertical de projection. Contours apparents de ce cône.

— **997.** — On donne un segment de droite SA; c'est la génératrice de contact d'un cône de révolution avec le plan horizontal; on donne de plus le demi-angle au sommet du cône. On limite la surface au plan perpendiculaire à l'axe mené par le point A. Contour apparent horizontal du cône.

— **998.** — On donne un cône de révolution à axe vertical et un point (m, m'). Mener par ce point un plan qui coupe le cône suivant deux génératrices faisant entre elles un angle donné.

— **999.** — On considère un cône de révolution à axe vertical; trouver sur ce cône une courbe de pente donnée.

11000. — Cylindre de révolution tangent à deux plans donnés et passant par un point donné.

— **001.** — Construire deux cônes de révolution égaux, tangents en un point, dont on donne les axes et les sommets. Construire deux cylindres de révolution tangents en un point et dont on donne les axes.

— **002.** — Points de rencontre d'une droite et d'une sphère.

— **003.** — Section plane d'une sphère; section par un plan donné par ses traces.

— **004.** — On donne une sphère par ses projections et une droite (D, D'); intersection de la sphère avec le plan déterminé par le centre et la droite (D, D'). Axes des projections de la section.

— **005.** — On donne une sphère : (a, a') est le point le plus à gauche, (c, c') le point le plus bas et (m, m') un point quelconque de l'espace; section de la sphère par le plan ACM. Axes des projections de la section.

— **006.** — Intersection d'une sphère avec un prisme de bout dont la base, dans le plan vertical, est un triangle ayant deux sommets à l'intérieur du contour apparent de la sphère.

— **007.** — Intersection de deux sphères.

— **008.** — On donne une sphère, un plan vertical passant par son centre et un autre plan, de bout, la coupant. Trouver le sommet du cône passant par les deux cercles de section.

— **009.** — Plan tangent à une sphère par une droite de profil.

— **010.** — Mener une droite parallèle à une direction donnée (δ, δ'), tangente à une sphère et à un cône.

11011. — Mener par un point un plan tangent commun à deux sphères.

— **012.** — On donne deux sphères et une droite D; mener aux deux sphères un plan tangent commun parallèle à D.

— **013.** — Couper deux sphères données suivant deux cercles égaux, de rayon donné et dont les plans soient parallèles à une droite donnée.

— **014.** — Plans tangents communs à trois sphères.

— **015.** — Plans tangents à une sphère faisant un angle donné avec le plan horizontal.

— **016.** — Par un point, mener une tangente commune à deux sphères.

— **017.** — Ombres de la sphère, les rayons lumineux étant à 45°.

— **018.** — Un cercle, de rayon 2, est le contour apparent horizontal d'une sphère tangente au plan horizontal de cote 0; a, de cote 0, et b, de cote 4, définissent une droite; ombres propre et portée de la sphère, les rayons lumineux étant parallèles à BA.

— **019.** — On donne trois points dans le plan horizontal. Sphère passant par ces trois points et tangente au plan vertical.

— **020.** — Trouver une sphère passant par un cercle donné et tangente à une droite donnée.

— **021.** — Sphère de rayon donné, tangente à un plan et à une droite donnée; lieu du centre.

— **022.** — On donne une sphère et un plan sécant, par ses traces. La section étant regardée comme la section droite d'un cylindre de révolution, trouver la trace de ce cylindre sur le second plan bissecteur.

— **023.** — Une droite donnée par ses projections est l'axe d'un cylindre de révolution de rayon donné. Trace de ce cylindre sur le plan horizontal.

— **024.** — On donne une droite (A, A′) et une autre droite (Δ, Δ′); intersection de (Δ, Δ′) avec un cylindre de révolution d'axe (A, A′) et de rayon donné.

— **025.** — Un plan est donné par une horizontale et une frontale; soit (D, D′) une droite quelconque. Mener par cette droite un plan faisant un angle donné avec le plan donné.

— **026.** — Mener par la ligne de terre un plan faisant un angle donné avec un plan PαQ′ donné. Même problème, le plan étant donné par deux droites.

— **027.** — Mener par une droite un plan faisant avec une autre droite un angle donné.

— **028.** — On donne deux droites concourantes; faire passer par l'une un plan faisant avec l'autre un angle donné.

— **029.** — On donne une horizontale et une frontale; mener par la frontale un plan faisant avec l'horizontale un angle donné.

— **030.** — Faire passer par une droite un plan faisant avec la ligne de terre un angle donné.

— **031.** — Par un point (a, a'), faire passer une droite située à la distance d de la ligne de terre, et faisant l'angle α avec le plan horizontal.

— **032.** — On donne un point (s, s'), sommet commun de deux cônes de révolution, l'un d'angle α et d'axe (sa, $s'a'$), l'autre d'angle β et d'axe (sb, $s'b'$). Plans tangents communs.

— **033.** — On donne un plan vertical, P, un plan de bout, Q′, et un point quelconque, (a, a'). Mener, par ce point, un plan faisant, avec les deux plans donnés, des angles donnés.

— **034.** — Mener une droite qui s'appuie sur deux droites données et fasse, avec ces deux droites, des angles donnés.

— **035.** — Intersection d'une sphère avec un cône dont la base est une hyperbole (dans le plan horizontal) et le sommet le point le plus haut de la sphère.

— **036.** — On donne une sphère et, dans le plan horizontal, une hyperbole qui est la base d'un cône ayant pour sommet le centre de la sphère; intersection du cône et de la sphère.

— **037.** — Une parabole, dans le plan horizontal, est la base d'un cône de sommet (s, s'); intersection de ce cône avec une sphère de centre (o, o'); point et tangente.

— **038.** — On donne un ellipsoïde de révolution à axe vertical; un cône a pour sommet un point dans le plan horizontal du point le plus haut de l'ellipsoïde et pour base un cercle dans le plan horizontal de projection. Intersection; point et tangente.

— **039.** — Méridienne principale d'une surface de révolution. On donne un axe vertical et une courbe quelconque; construire un point de la méridienne principale et sa tangente.

— **040.** — On donne un axe vertical et une circonférence dans un plan de front; méridienne principale de la surface de révolution engendrée par cette circonférence en tournant autour de l'axe.

— **041.** — On donne la verticale (z, z') et un cône de révolution à axe vertical. On coupe le cône par le plan vertical P; la section en tournant autour de (z, z') engendre une surface de révolution dont on demande la méridienne principale. Point et tangente, branches infinies, asymptotes. Même problème en remplaçant le plan vertical P par un plan de bout Q′.

— **042.** — On donne une droite de front (F, F′) et une courbe (C, C′) tournant autour de cet axe; méridienne principale de la surface ainsi engendrée.

— **043.** — On donne un axe de front (F, F′) et une droite quelconque (G, G′): méridienne principale de la surface engendrée par (G, G′) en tournant autour de (F, F′).

— **044.** — Une droite (Δ, Δ′) est l'axe d'une surface de révolution; dans un plan horizontal H se trouve une circonférence; elle engendre la surface en tournant autour de (Δ, Δ′); contour apparent horizontal.

11045. — Soit une droite quelconque (A, A'); c'est l'axe d'une surface de révolution engendrée par une courbe (C, C') donnée par ses projections. Contours apparents de la surface.

— **046.** — Mener par une droite donnée un plan tangent à un ellipsoïde de révolution. Cas où l'axe est vertical.

— **047.** — Un ellipsoïde de révolution est défini par son grand axe et un point. Mener par une droite des plans tangents à cette surface. Construire la méridienne, connaissant le grand axe et un point.

— **048.** — Plans tangents à un ellipsoïde (à axe vertical), faisant un angle donné avec le plan horizontal.

— **049.** — Un ellipsoïde est engendré par une ellipse qui tourne autour d'un de ses axes, situé dans un plan de front. Courbe de contact d'un cône de sommet (*s*, *s'*), circonscrit à cet ellipsoïde.

— **050.** — Mener par une droite un plan tangent à un paraboloïde de révolution, à axe vertical.

— **051.** — On donne une droite de front et deux points, (*a*, *a'*), (*b*, *b'*), sur cette droite; ce sont respectivement le sommet et le foyer d'un paraboloïde de révolution. Construire les contours apparents.

— **052.** — Une droite verticale est l'axe d'un paraboloïde de révolution tangent à deux plans; déterminer ce paraboloïde. Déterminer une parabole quand on a son axe et deux tangentes.

— **053.** — Soit un tore à axe vertical; étant donnée la projection horizontale d'un point du tore, trouver sa projection verticale. Plan tangent en ce point.

A suivre.

SUJETS DE CONCOURS

ÉCOLE NAVALE

Concours de 1921.

Algèbre, analyse et trigonométrie.

2540. — 1° Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle de n

$$f(n) = \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

c'est-à-dire chercher les coefficients A_1, A_2, A_3 de l'identité

$$f(n) = \frac{A_1}{n+1} + \frac{A_2}{n+2} + \frac{A_3}{n+3}.$$

2° Montrer que le polynome du second degré

$$P(x) = A_1 + A_2 x + A_3 x^2$$

est tel que, quel que soit le polynome du premier degré $ux + v$, on a

$$\int_0^1 P(x)(ux+v)\,dx = 0.$$

3° On désigne par p un nombre entier positif; calculer l'intégrale définie

$$I_p = \int_0^1 x^p . P(x)\,dx,$$

et étudier, suivant les valeurs de y, la convergence de la série

$$I_0 + I_1 y + I_2 y^2 + \ldots + I_p y^p + \ldots.$$

4° Vérifier que la fonction $P(x)$ est solution de l'équation différentielle du second ordre

$$(1) \qquad x(x-1)y'' + (2x-1)y' - 6y = 0.$$

5° Pour trouver la solution générale de cette équation (1), on y remplacera y par $z.P(x)$, z étant une nouvelle fonction inconnue. On en déduit une équation en z'; montrer que sa solution générale peut être mise sous la forme

$$z' = \lambda\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2(x-x^2)} - \frac{1}{2(x-x^2)^2}\right]$$

λ étant une constante quelconque et α, β les zéros du polynome $P(x)$. En déduire la solution générale de l'équation (1).

Géométrie analytique.

2541. — On donne, dans un plan, deux points fixes A et A′ et on désigne par δ et δ' les distances de ces points à une droite variable (D) du plan.

1° Trouver l'enveloppe (C) des droites (D) pour lesquelles la somme $\delta^2 + \delta'^2$ a une valeur constante $2h^2$. Lorsqu'on donne à h différentes valeurs, on obtient ainsi une famille de courbes (C).

2° On considère les droites (D) qui passent par un point M. Déterminer les deux droites (D′) et (D″) passant par M pour lesquelles la somme $\delta^2 + \delta'^2$ est maximum ou minimum.

3° Quel est le lieu des points M pour lesquels une des droites (D′) ou (D″) passe par le point A?

4° Soient (C_1) et (C_2), les enveloppes des droites (D) correspondant aux valeurs h_1 et h_2 de h. Trouver le lieu (Γ) du point de rencontre d'une tangente à (C_1) et d'une tangente à (C_2) perpendiculaire à la première. Montrer qu'on peut, d'une infinité de manières, remplacer les courbes (C_1) et (C_2) par deux autres courbes (C) de façon que le lieu (Γ) reste le même. Quel est le lieu des points d'intersection des deux courbes (C) ainsi associées?

Mécanique.

I. — **2542.** Sur un plan horizontal parfaitement poli on fixe à plat un disque circulaire, de centre O, de rayon *un*, d'épaisseur négligeable. En un point fixe A du bord du disque est attachée une extrémité d'un fil flexible, inextensible, de masse négligeable, de longueur π (demi-circonférence du disque). A l'autre extrémité du fil est attaché un point matériel M de masse *un*. M est repoussé par le point O, et l'intensité de la force répulsive est mesurée par le même nombre que la distance OM. (O n'exerce aucune action sur le fil.) A l'instant initial, le fil est appliqué contre le bord du disque, M étant sur le plan horizontal en B, diamétralement opposé à A; on abandonne le point M à partir de B sans vitesse initiale; sous l'action de la force répulsive, M se met à décrire une trajectoire composée de deux arcs de développante de cercle raccordés par une demi-circonférence.

1° Étudier le mouvement du point M. On distinguera les phases où le fil AM est partiellement enroulé sur le bord du disque, et celles où il est entièrement déroulé. Calculer et construire, dans chacune de ces phases, et pour une position quelconque de M sur sa trajectoire, le vecteur vitesse de M et le vecteur T qui représente l'action exercée sur M par le fil. Dans la phase où M décrit la portion semi-circulaire de sa trajectoire, montrer que l'angle O, que fait avec AM le rayon OA prolongé, varie comme l'angle d'écart à la verticale descendante d'un pendule simple dont on demande de calculer la longueur. ($\pi = 3.14$; $g = 981$ C. G. S. est l'accélération de la pesanteur.)

2° Le mouvement de M est périodique. Trouver l'expression de sa période τ. Dans cette expression de τ, figure une intégrale exprimant le temps que met M à décrire la portion semi-circulaire de sa trajectoire : on ne demande pas le calcul numérique de cette intégrale.

II. — **2543.** Un disque circulaire, homogène, de poids P, de rayon R, de centre ω, est suspendu à un point fixe O par l'intermédiaire de trois fils égaux OA, OB, OC, flexibles, inextensibles, sans masse, de longueur $R\sqrt{3}$, attachés aux points A, B, C, du bord du disque, le triangle ABC étant équilatéral. Sur la face supérieure du disque, supposée rugueuse, on pose un point matériel M de poids Q. Le coefficient de frottement entre M et le disque étant f, déterminer la région $\mathcal{P}$ du disque où l'on pourra placer M de façon que le disque surchargé puisse être en équilibre sans que M glisse; dans chaque position d'équilibre, on déterminera l'angle de $O\omega$ avec la verticale, en fonction de la distance ωM, puis on construira géométriquement les vecteurs qui représentent les actions exercées respectivement en A, B, C, par chacun des fils, sur le disque. Étudier en particulier les cas : 1° $f = \frac{1}{4}$, $P = Q$; 2° $f = \frac{1}{2}$, $Q = 3P$, $Q = P$, et représenter par un dessin la région $\mathcal{P}$.

Calcul.

1° Calculer le nombre x, solution de l'équation

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1{,}257.$$

2° Calculer les nombres y, z définis, en fonction de cette valeur de x, par

$$y = \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{2}, \qquad z = \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{2}.$$

3° *Vérification.* — Calculer alors les valeurs numériques de

$$z^2 - y^2, \qquad 5z^4y + 10z^2y^3 + y^5.$$

Elles doivent être égales respectivement à 1 et 1,257.

Formules : On pourra utiliser les résultats suivants qu'il est inutile de vérifier. A tout nombre u, on peut faire correspondre un angle compris entre — 90° et 90°, tel que

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{e^u - e^{-u}}{2}.$$

Le nombre u s'exprime alors en fonction de φ par la relation

$$u = \mathrm{L}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + 45^\circ\right)\right],$$

et, réciproquement, cette relation entraîne la précédente. En outre,

$$\frac{e^u + e^{-u}}{2} = \frac{1}{\cos\varphi}.$$

L désigne le logarithme népérien, on sait qu'il se déduit du logarithme décimal par la relation

$$\mathrm{L}x = \frac{1}{\mathrm{M}}.\log x, \qquad \mathrm{M} = 0,434294.$$

Le calcul peut alors se faire de la façon suivante : on calcule l'angle φ correspondant à la valeur $u = x$ demandée et on en déduit cette valeur de x. On calcule ensuite φ' correspondant à $u = \frac{x}{5}$ et on en déduit y et z.

Épure.

La ligne de terre est le petit axe de la feuille.

Un tétraèdre SABC repose sur le plan horizontal de projection par sa face ABC; l'arête AB est parallèle à la ligne de terre et son éloignement est 1cm,5; le point A est à 12cm à gauche du grand axe de la feuille, le point B, à 10cm,5 à droite de ce grand axe; le point C a pour éloignement 15cm et il est placé à 4cm,5 à droite du grand axe; le sommet S, de cote 12cm et d'éloignement 3cm, a ses projections à 4cm,5 à gauche du grand axe.

On demande de représenter le solide commun au tétraèdre et à la sphère décrite sur l'arête SC comme diamètre.

Physique.

2544. — Un aimant permanent, mobile autour d'un axe horizontal dont la direction fait l'angle φ avec le plan du méridien magnétique, est soumis à l'action du champ magnétique terrestre d'intensité F et d'inclinaison I, en même temps qu'à celle de son poids P. Le centre de gravité est à distance a de l'axe de suspension dans une direction qui fait l'angle α avec le plan passant par cet axe et par la direction du moment magnétique de l'aimant.

1° En désignant par i l'angle que fait ce dernier plan avec l'horizon, calculer les moments par rapport à l'axe de suspension du poids de l'aimant et du couple exercé par le champ magnétique terrestre. Montrer que ce dernier moment ne fait intervenir le moment magnétique de l'aimant que par sa projection μ sur un plan perpendiculaire à l'axe de suspension.

2° Écrire l'équation d'équilibre entre les deux actions et en déduire la tangente de l'angle i qui correspond à cet équilibre.

3° Chercher à quelle condition cet angle i reste invariable quand on fait varier l'angle φ par rotation de l'aimant et de son support autour d'un axe vertical, et comment se dirige l'axe magnétique de l'aimant quand cette condition est remplie sans que l'angle I soit droit.

4° Plus généralement, étudier la manière dont varie la cotangente de l'angle i en fonction de φ pendant cette rotation, et discuter les différents cas qui peuvent se présenter, en particulier ceux pour lesquels la position d'équilibre est indéterminée.

5° Montrer pourquoi, lorsque l'action de la pesanteur n'est pas négligeable devant l'action magnétique, il n'est pas possible de déduire l'inclinaison I de l'étude expérimentale de la variation de i avec φ.

Peut on en déduire la déclinaison?

6° Comment doit-on procéder pour en déduire I quand l'action de la pesanteur est négligeable?

Pour simplifier, on désignera par A la quantité $\frac{Pa}{\mu F}$.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

Coulommiers. — Imprimerie PAUL BRODARD.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PREMIÈRE PARTIE

ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET BOURSES DE LICENCE

Concours spécial de 1919.

2394. — *On considère les fonctions de x*

$$y = (x+a)\,\mathrm{L}\frac{x+2}{x+4}$$

(a est un nombre donné et L *désigne le logarithme de base e).*

1° *Dans quels intervalles la fonction* $\frac{y}{x+a}$ *est-elle développable en série entière soit par rapport à la variable x, soit par rapport à la variable* $\frac{1}{x}$?

Écrire les développements correspondants de y.

2° *Tracer, suivant la valeur de a, les différentes formes des courbes* (C) *représentant, en coordonnées rectangulaires, les variations des fonctions y.*

Une courbe (C) *coupe* Oy *en un point. Lorsque a varie, déterminer le lieu du centre du cercle osculateur à cette courbe, en ce point.*

3° *Calculer les primitives d'une des fonctions y.*

Démontrer que pour $a=3$, *l'aire limitée par la courbe* (C) *correspondante, par la droite d'équation* $y+2=0$, *par l'axe des y, et par la droite d'équation* $x-x_0=0\,(x_0>0)$ *a une limite finie quand x_0 croît indéfiniment. Calculer cette limite.*

4° *On considère plus généralement une fonction de la forme*

$$z = f(x)\,\mathrm{L}\frac{x+2}{x+4};$$

$f(x)$ est un polynome qui s'écrit, développé, $f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$.

On demande :

a. De calculer les primitives de z;

b. En appelant $\Phi(x)$ l'une de ces primitives, de chercher s'il existe un polynome $\varphi(x)$ tel que la fonction $\Phi(x)-\varphi(x)$ *tende vers zéro quand x croît indéfiniment.*

1° La fonction $\frac{y}{x+a} = \mathrm{L}\frac{x+2}{x+4}$ n'est pas définie dans l'intervalle $(-4, -2)$, elle est bien définie dans tout autre intervalle. Au voisinage de 0, elle s'écrit

$$\mathrm{L}\frac{2}{4} + \mathrm{L}\frac{1+\frac{x}{2}}{1+\frac{x}{4}} \qquad \text{ou} \qquad -\mathrm{L}2 + \mathrm{L}\left(1+\frac{x}{2}\right) - \mathrm{L}\left(1+\frac{x}{4}\right).$$

$L\left(1+\frac{x}{2}\right)$ est développable en série entière pour $\left|\frac{x}{2}\right|<1$, c'est-à-dire dans l'intervalle $(-2, +2)$; l'autre logarithme est développable dans l'intervalle $(-4, +4)$ et nous avons

$$L\left(1+\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2^2}+\frac{1}{3}\frac{x^3}{2^3}-\ldots,$$

$$L\left(1+\frac{x}{4}\right)=\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{4^2}+\frac{1}{3}\frac{x^3}{4^3}-\ldots;$$

par suite,

$$(1)\qquad \frac{y}{x+a}=-L2+x\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)-\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}\right)+\frac{x^3}{3}\left(\frac{1}{2^3}-\frac{1}{4^3}\right)-\ldots,$$

ou

$$\frac{y}{x+a}=-L2+\frac{x}{4}-\frac{3x^2}{32}+\ldots.$$

Pour les grandes valeurs de x, la fonction $\frac{y}{x+a}$ s'écrit $L\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{4}{x}}=L\left(1+\frac{2}{x}\right)-L\left(1+\frac{4}{x}\right)$.

Le premier logarithme est développable par rapport aux puissances croissantes de $\frac{1}{x}$, pour $|x|>2$; le second, pour $|x|>4$; et nous avons

$$L\left(1+\frac{2}{x}\right)=\frac{2}{x}-\frac{1}{2}\frac{2^2}{x^2}+\frac{1}{3}\frac{2^3}{x^3}-\ldots,$$

$$L\left(1+\frac{4}{x}\right)=\frac{4}{x}-\frac{1}{2}\frac{4^2}{x^2}+\frac{1}{3}\frac{4^3}{x^3}-\ldots.$$

$$(2)\qquad \frac{y}{x+a}=\frac{1}{x}(2-4)-\frac{1}{2x^2}(2^2-4^2)+\frac{1}{3x^3}(2^3-4^3)-\ldots,$$

ou

$$\frac{y}{x+a}=-\frac{2}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{56}{3x^3}+\ldots.$$

Le développement (1) est valable dans l'intervalle $(-2, +2)$; le développement (2) est valable dans les intervalles $(-\infty, -4)$, $(4, +\infty)$.

2° La courbe (C) rencontre l'axe des x au point $x=-a$. Ce point n'existe réellement que quand a n'est pas compris entre 2 et 4. Nous aurons donc à étudier les trois cas $a>4$, $2<a<4$, $a<2$. Mais une remarque facile va nous conduire à simplifier notablement l'étude des courbes (C). Considérons la fonction $L\frac{x+\alpha}{x+\beta}$ et voyons ce qu'il faut pour qu'elle change de signe, quand on change x en $-x$; il faut évidemment et il suffit que $\frac{x+\alpha}{x+\beta}$ soit l'inverse de $\frac{\alpha-x}{\beta-x}$, ou que l'on ait $\frac{\alpha^2-x^2}{\beta^2-x^2}=1$; ceci donne $\alpha^2-\beta^2=0$, et, comme le cas de $\alpha=\beta$ doit évidemment être écarté, il faut $\alpha+\beta=0$.

Ceci posé, nous allons montrer que pour deux valeurs de a équidistantes de 3, les courbes (C) et (C') correspondantes sont symétriques par rapport à la droite $x=-3$. Prenons, en effet, les deux valeurs $3+h$ et $3-h$; nous aurons les équations

$$(C)\qquad y=(x+3+h)\,L\frac{x+2}{x+4},$$

$$(C')\qquad y=(x+3-h)\,L\frac{x+2}{x+4}.$$

portons les axes au point $x = -3$, changeons x en $x' - 3$, les équations deviendront

$$y = (x' + h) \mathrm{L} \frac{x' - 1}{x' + 1},$$

$$y = (x' - h) \mathrm{L} \frac{x' - 1}{x' + 1},$$

et il est visible que si, dans la première nous changeons x' en $-x'$, le premier y devient égal au second. Les deux courbes sont donc symétriques par rapport au nouvel axe des y, c'est-à-dire par rapport à la droite $x = -3$.

Il suffira alors de considérer les cas $a > 4$, $3 < a < 4$ et les deux cas particuliers $a = 4$, $a = 3$.

Premier cas. $a > 4$. La courbe rencontre l'axe des x au point $x = -a$, à gauche de la droite $x = -4$. Pour $x = \pm\infty$, nous avons

$$y = (x + a)\left(-\frac{2}{x} + \frac{6}{x^2} - \ldots\right),$$

$$y = -2 + \frac{6 - 2a}{x} + \ldots;$$

la fonction est égale à -2. Pour x très grand et négatif, $y > -2$, la courbe est au-dessus de l'asymptote; pour x très grand et positif, elle est au-dessous. Pour $x = -4 - \varepsilon$, nous avons

$$y = (a - 4) \mathrm{L} \frac{2}{\varepsilon},$$

y est égal à $+\infty$. Pour $x = -2 + \varepsilon$, nous avons

$$y = (a - 2) \mathrm{L} \frac{\varepsilon}{2},$$

y est égal à $-\infty$. Nous sommes conduits à tracer la courbe de la figure (1). Nous justifierons cette forme en étudiant la dérivée.

Deuxième cas : $3 < a < 4$. La disposition de la courbe par rapport à l'asymptote $y = -2$, est encore la même, mais la courbe ne rencontre plus l'axe des x.

Pour $x = -4 - \varepsilon$, y est égal à $-\infty$; pour $x = -2 + \varepsilon$, y est encore égal à $-\infty$;

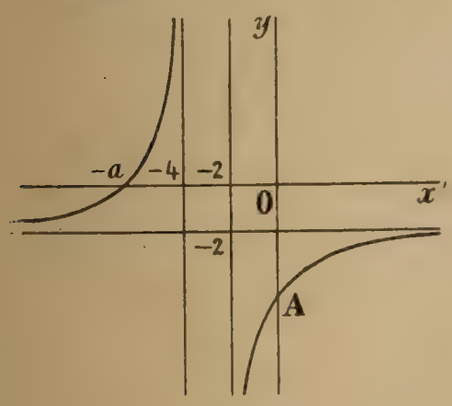


Fig. 1.

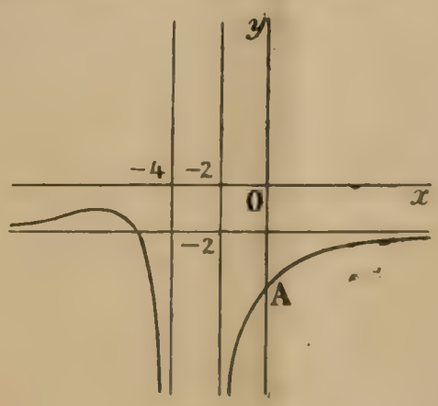


Fig. 2.

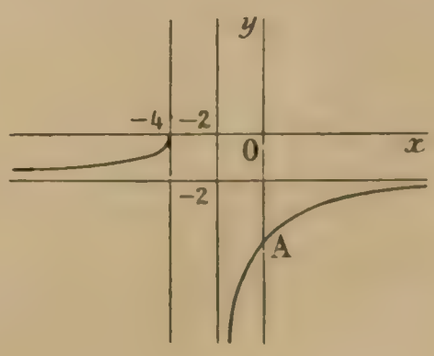


Fig. 3.

nous sommes conduits à la forme de la figure 2. Nous justifierons encore cette forme par la dérivée.

Cas où $a = 4$. Pour $x = -4$, cette fois, y est nul. Les autres remarques ne sont pas altérées. Nous avons la forme de la figure 3. La tangente au point $(-4, 0)$ est parallèle à Oy, car $\frac{y}{x+4}$ devient infini quand x tend vers -4 (*fig.* 3).

Cas où $a = 3$. La courbe est symétrique par rapport à la droite $x = -3$. Le terme en $\frac{1}{x}$ du

développement de y devient nul. La position de la courbe par rapport à chacune des asymptotes $x = -4$, $x = -2$ reste la même (*fig.* 4).

Prenons maintenant la dérivée de y; nous aurons $y' = \mathrm{L}\frac{x+2}{x+4} + \frac{2(x+a)}{(x+2)(x+4)}$. Si nous appelons x la racine de l'équation $y' = 0$, nous avons $a = -\frac{1}{2}\left[2x + (x+2)(x+4)\mathrm{L}\frac{x+2}{x+4}\right]$; étudions cette fonction de x; nous avons

$$\frac{da}{dx} = -2 - (x+3)\mathrm{L}\frac{x+2}{x+4},$$

et

$$-\frac{1}{x+3}\frac{da}{dx} = \frac{2}{x+3} + \mathrm{L}\frac{x+2}{x+4} = z;$$

nous avons de même

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2}{(x+2)(x+4)} - \frac{2}{(x+3)^2}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{2}{(x+3)^2(x+2)(x+4)},$$

quantité toujours positive dans les intervalles acceptables pour x.

Par conséquent la fonction z est représentée par une courbe aisée à construire et que nous figurons ici (*fig.* 5).

La fonction $\frac{da}{dx} = -z(x+3)$ est donc toujours positive et la fonction a est toujours croissante. Or, pour x infini, nous avons

$$a = -x - \frac{x^2+6x+8}{2}\left(-\frac{2}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{56}{3x^3} + \ldots\right).$$

$$a = 3 - \frac{4}{3x} + \ldots;$$

la courbe figurative de la fonction a est asymptote à la droite $a = 3$; au-dessus, à gauche; au-

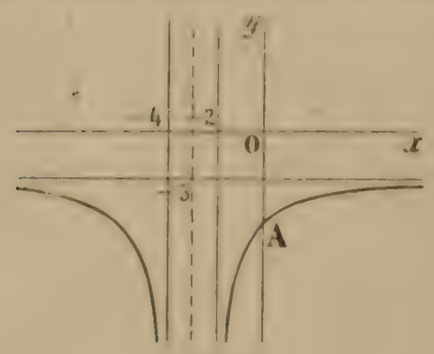


Fig. 4.

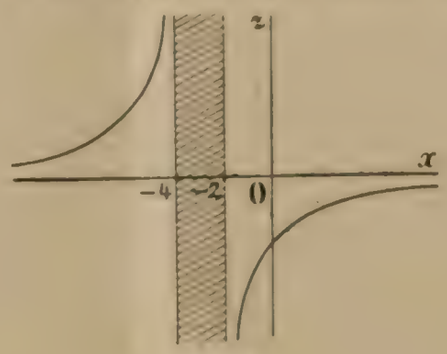


Fig. 5.

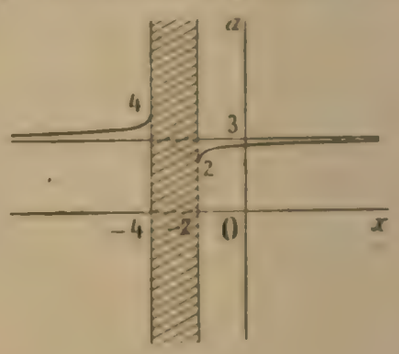


Fig. 6.

dessous, à droite. Pour $x = -4$, elle prend la valeur 4; pour $x = -2$, la valeur 2; en ces points, $\frac{da}{dx}$ est infini, la tangente est verticale. La fonction $a(x)$ est représentée dans la figure 6. Il est facile de vérifier que cette courbe admet pour centre le point $(-3, 3)$.

Cette figure nous montre que si a est compris entre 3 et 4, la fonction y s'annule pour une valeur négative de x, plus petite que -4 (*fig.* 4), et que si a est plus grand que 4, la fonction y ne s'annule pas (*fig.* 1). L'étude des courbes (C) est complètement terminée.

Pour achever la seconde partie, il nous faut maintenant trouver le lieu du centre de courbure de la courbe (C) au point A où elle rencontre Oy, quand a varie. Le point A a pour coordonnées $x = 0$, $y = -a\mathrm{L}2$; d'autre part, le développement de y, au voisinage de $x = 0$, est donné par

$$y = (x+a)\left(-\mathrm{L}2 + \frac{x}{4} - \frac{3x^2}{32}\right).$$

$$y = -a\mathrm{L}2 + \left(\frac{a}{4} - \mathrm{L}2\right)x + \left(\frac{1}{4} - \frac{3a}{32}\right)x^2 + \ldots;$$

nous avons donc $y' = \frac{a - 4L2}{4}$, $y'' = \frac{8 - 3a}{16}$, pour $x = 0$. Les coordonnées du centre de courbure sont

$$X = x - y'\frac{1 + y'^2}{y''}, \qquad Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''};$$

nous avons ainsi

$$X = -\frac{\frac{a - 4L2}{4} + \left(\frac{a - 4L2}{4}\right)^3}{\frac{8 - 3a}{16}} = \frac{16(4L2 - a) + (4L2 - a)^3}{4(8 - 3a)},$$

$$Y = -aL2 + \frac{1 + \left(\frac{a - 4L2}{4}\right)^2}{\frac{8 - 3a}{16}} = -aL2 + \frac{16 + (4L2 - a)^2}{8 - 3a}.$$

Ce sont les équations paramétriques du lieu en fonction du paramètre a. Ce sont les équations d'une courbe unicursale du troisième degré.

3° L'intégrale $\int y\,dx$ ou

$$J = \int L\frac{x + 2}{x + 4}(x + a)\,dx$$

se calcule aisément en intégrant par parties; nous trouvons ainsi

$$J = \left(\frac{x^2}{2} + ax\right)L\frac{x + 2}{x + 4} - \int \frac{x^2 + 2ax}{(x + 2)(x + 4)}\,dx;$$

or,

$$\frac{x^2 + 2ax}{(x + 2)(x + 4)} = 1 + \frac{2(1 - a)}{x + 2} + \frac{4(a - 2)}{x + 4},$$

et

$$J = \left(\frac{x^2}{2} + ax\right)L\frac{x + 2}{x + 4} - x - 2(1 - a)L(x + 2) - 4(a - 2)L(x + 4).$$

Pour $a = 3$, elle s'écrit

$$J = \left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)L\frac{x + 2}{x + 4} - x + 4L\frac{x + 2}{x + 4},$$

et $\int_0^x y\,dx$ a pour valeur

$$\left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)L\frac{x + 2}{x + 4} - x + 4L\frac{x + 2}{x + 4} + 4L2;$$

retranchons-en l'aire négative, limitée par la droite $y = -2$, c'est-à-dire ajoutons lui $2x$, nous aurons finalement à montrer que la fonction

$$\left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)L\frac{x + 2}{x + 4} + x + 4L\frac{x + 2}{x + 4} + 4L2$$

a une limite finie pour x infini. Or, quand x est très grand, $L\frac{x + 2}{x + 4}$ est égal à $-\frac{2}{x} + \frac{6}{x^2} + \ldots$; nous avons donc

$$\left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)\left(-\frac{2}{x} + \frac{6}{x^2} + \ldots\right) + x + \ldots$$

qui se réduit à -3 plus une partie nulle pour x infini. L'aire indiquée a donc pour limite

$$A = 4L2 - 3.$$

4° Soit $F(x)$ une primitive du polynome entier $f(x)$; l'intégrale

$$\int L\frac{x + 2}{x + 4}f(x)\,dx$$

a pour valeur
$$F(x)L\frac{x+2}{x+4}-\int F(x)\frac{2}{(x+2)(x+4)}dx;$$

soit $Q(x)$ le quotient de $2F(x)$ par $(x+2)(x+4)$, et $Ax+B$ le reste; nous aurons

$$\frac{2F(x)}{(x+2)(x+4)}=Q(x)+\frac{Ax+B}{(x+2)(x+4)}.\qquad \frac{Ax+B}{(x+2)(x+4)}=\frac{B-2A}{2(x+2)}+\frac{4A-B}{2(x+4)}.$$

Mais
$$B-2A=2F(-2),\qquad B-4A=2F(-4);$$

nous avons donc
$$\frac{2F(x)}{(x+2)(x+4)}=Q(x)+\frac{F(-2)}{x+2}-\frac{F(-4)}{x+4}.$$

La partie $F(x)L\frac{x+2}{x+4}$, pour x très grand se compose d'un polynome entier et de termes en $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, etc.; la partie $\int Q(x)dx$ est un polynome entier; si $F(-2)=F(-4)$, la dernière partie de l'intégrale est
$$F(-2)L\frac{x+2}{x+4},$$

elle tend vers 0 pour x infini, et il y a bien un polynome entier $\varphi(x)$ tel que l'intégrale diminuée de ce polynome entier reste finie pour x infini; mais si $F(-2)\neq F(-4)$, les termes logarithmiques deviennent infinis sans se détruire, et ces infiniment grands ne sont pas comparables aux termes d'un polynome entier; l'intégrale reste infinie même en supprimant la partie entière et aucun polynome additif ne peut être détruit par les logarithmes.

Bonnes solutions : MM. G. Lach, à Douai; P. Robert, à Saint-Cloud; M., à Guéret.

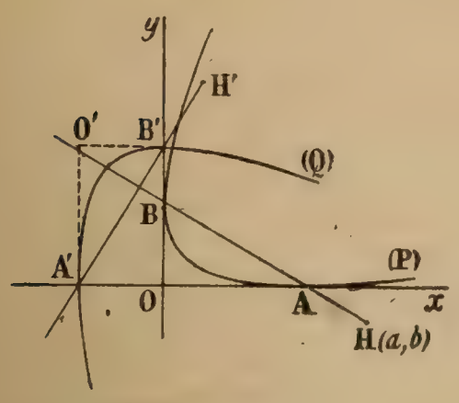
GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

2397. — *Étant donnés deux axes rectangulaires Ox, Oy et un point H (a, b), on mène par le point H une sécante de coefficient angulaire m, qui rencontre les axes aux points A et B, et on considère la parabole P tangente aux axes aux points A et B; on fait tourner autour de l'origine la droite AB de l'angle $+\frac{\pi}{2}$; soit A'B' sa nouvelle position; soient A' et B' les points où elle rencontre les axes; on considère la parabole Q normale aux axes aux points A' et B'.*

1° *Trouver les équations des paraboles P et Q, puis, lorsque m varie, le lieu du point de rencontre de leurs directrices.*

2° *Démontrer que les points d'intersection de ces deux paraboles P et Q appartiennent à un même cercle; trouver son équation, et le lieu de son centre quand m varie.*

3° *Former l'équation de l'hyperbole équilatère qui passe par les points communs aux paraboles P et Q, trouver l'équation du lieu de son centre quand m varie, et, dans le cas particulier où le point H est sur l'axe des y, construire ce lieu en le rapportant à un système de coordonnées polaires.*



1° La droite AB, qui passe au point H, a pour équation

$$y - b = m(x - a),$$

ou

$$y - b - m(x - a) = 0.$$

La parabole (P) a pour équation

$$(y - mx + ma - b)^2 + 2\lambda xy = 0,$$

et il est visible qu'il faut prendre $\lambda = 2m$ pour que les termes du second degré forment un carré parfait. L'équation de la parabole (P) est donc finalement

$$\text{(P)} \qquad (y + mx)^2 + 2(ma - b)(y - mx) + (ma - b)^2 = 0.$$

Pour faire tourner le point H d'un angle égal à $+\frac{\pi}{2}$ autour du point O, il faut multiplier l'affixe. $a + ib$, de ce point par i; elle devient $ai - b$ et les nouvelles coordonnées du point H, qui est devenu H', sont $-b$ et a. La droite HA'B' perpendiculaire à AB a donc pour équation

$$y - a = -\frac{1}{m}(x + b),$$

ou

$$my + x + b - am = 0.$$

Les points A' et B' ont pour coordonnées

$$x = am - b, \qquad y = 0$$

et

$$x = 0, \qquad y = \frac{am - b}{m};$$

les parallèles aux axes, O'A' et O'B', menées par ces points, ont pour équations

$$x - am + b = 0 \qquad \text{et} \qquad y - \frac{am - b}{m} = 0.$$

La parabole (Q), tangente à ces droites aux points A' et B', a pour équation

$$(my + x + b - am)^2 + 2\mu(x - am + b)\left(y - \frac{am - b}{m}\right) = 0$$

et il est visible que la valeur de μ doit être égale à $-2m$ pour que les termes du second degré forment un carré. La parabole (Q) a donc pour équation

$$\text{(Q)} \qquad (x - my)^2 + 2(ma - b)(x + my) - 3(ma - b)^2 = 0.$$

Il reste à trouver les deux directrices de ces paraboles et le lieu de leur point de rencontre. La directrice de la première passe par le point O, point de rencontre de deux tangentes rectangulaires, et est perpendiculaire à la direction asymptotique; elle a pour équation

$$my - x = 0.$$

La directrice de la seconde passe par le point O', pour une raison semblable, et est perpendiculaire à la direction asymptotique de cette parabole; elle a pour équation

$$m(x - ma + b) + y - \frac{ma - b}{m} = 0.$$

Le lieu du point de rencontre de ces deux droites s'obtient en remplaçant m par $\frac{x}{y}$ dans la seconde équation; ceci donne

$$\frac{x}{y}\left(x - a\frac{x}{y} + b\right) + y - \frac{a\frac{x}{y} - b}{\frac{x}{y}} = 0,$$

$$\frac{x}{y^2}(xy - ax + by) + \frac{xy - ax + by}{x} = 0,$$

ou

$$(x^2 + y^2)(xy - ax + by) = 0.$$

Le lieu du point de rencontre des directrices est donc l'hyperbole équilatère

$$xy - ax + by = 0.$$

Cette conique a pour centre le point $x = -b$, $y = a$, c'est-à-dire le point H′ et ses asymptotes sont parallèles aux axes.

Il est à remarquer que les deux directrices passent au point O′. Le lieu que nous venons de trouver est donc le lieu du point O′. Ceci est évident géométriquement : en effet, la directrice est perpendiculaire à la droite qui joint le point O au milieu de AB; or, justement OO′ est cette droite après qu'elle a tourné de l'angle $+\frac{\pi}{2}$ autour de O; OO′ est donc la directrice de la première parabole. Comme la droite A′B′ tourne autour du point fixe H′, les deux séries A′ et B′ sont homographiques, et les droites O′A′, O′B′ décrivent deux faisceaux homographiques qui ont leurs sommets à l'infini sur les axes. Le lieu du point O′ est donc une conique qui passe aux points à l'infini sur les axes, et au point O, qui est visiblement une position du point O′.

2° Les axes des deux paraboles étant rectangulaires, ces deux coniques ont les mêmes directions principales; par conséquent, il passe un cercle par les quatre points de rencontre. Nous obtiendrons d'ailleurs immédiatement l'équation de ce cercle en ajoutant les équations des deux paraboles; nous trouvons ainsi

$$(m^2 + 1)(x^2 + y^2) + 2(ma - b)(y - mx + x + my) - 2(ma - b)^2 = 0.$$

Les équations du centre sont

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0,$$

ou

$$2(m^2 + 1)x + 2(ma - b)(1 - m) = 0,$$
$$2(m^2 + 1)y + 2(ma - b)(1 + m) = 0;$$

en les divisant membre à membre, nous trouvons

$$\frac{x}{y} = \frac{1 - m}{1 + m};$$

puis,

$$m = \frac{y - x}{y + x};$$

en les ajoutant et en simplifiant,

$$(m^2 + 1)(x + y) + 2(ma - b) = 0;$$

remplaçons là dedans m par sa valeur et simplifions; nous aurons

$$(y - x)^2 + (y + x)^2 + 2[a(y - x) - b(y + x)] = 0,$$

et, finalement,

$$x^2 + y^2 - (a + b)x + (a - b)y = 0.$$

Tel est le lieu du centre du cercle; c'est un cercle qui a pour centre le point $\frac{a + b}{2}$, $\frac{b - a}{2}$.

Ce cercle passe à l'origine, au point H et au point H_1 symétrique de H′ par rapport au point O; c'est le cercle décrit sur HH_1 comme diamètre.

3° Dans tout faisceau de conique, il y a une hyperbole équilatère. Il est visible que celle du faisceau actuel s'obtient en retranchant l'équation de la parabole (Q) de celle de la parabole (P). Ce calcul nous donne

$$(m^2 - 1)(x^2 - y^2) + 4mxy + 2(ma - b)(y - mx - x - my) + 4(ma - b)^2 = 0.$$

Les équations du centre sont

$$(m^2-1)x+2my-(ma-b)(1+m)=0, \qquad 2mx-(m^2-1)y+(ma-b)(1-m)=0;$$

elles donnent x et y en fonction de m :

$$x=\frac{(ma-b)(m-1)(m^2+4m+1)}{(m^2+1)^2}, \qquad y=\frac{(ma-b)(m+1)(-m^2+4m-1)}{(m^2+1)^2};$$

ces deux équations paramétriques, qui permettent de construire la courbe, montrent que celle-ci est une quartique unicursale.

Pour avoir l'équation cartésienne, il faut ordonner les équations du centre par rapport à m et éliminer m entre ces deux équations. Nous avons ainsi :

$$m^2(x-a)+m(2y+b-a)+b-x=0, \qquad m^2(y+a)-m(2x+a+b)+b-y=0;$$

puis,

$$[(x-a)(b-y)-(y+a)(b-x)]^2+[(2y+b-a)(b-y)+(2x+a+b)(b-x)]$$
$$\times[(x-a)(2x+a+b)+(y+a)(2y+b-a)]=0.$$

Telle est l'équation cartésienne; il est facile de voir que c'est une quartique bicirculaire. Cette équation se simplifie quand on y fait $a=0$; elle devient alors

$$b^2(x-y)^2-[2(x^2+y^2)-b(x+y)-2b^2][2(x^2+y^2)+b(x+y)]=0;$$

en développant et changeant les signes, nous obtenons

$$4(x^2+y^2)^2-b^2(x+y)^2-b^2(x-y)^2-4b^2(x^2+y^2)-2b^3(x+y)=0,$$
$$2(x^2+y^2)^2-3b^2(x^2+y^2)-b^3(x+y)=0.$$

Sous cette dernière forme, nous voyons que la courbe est symétrique par rapport à la première bissectrice; ceci nous conduit à prendre cette droite pour nouvel axe des x et à faire tourner les axes de 45° autour du point O; les formules de transformation sont

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}, \qquad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}},$$

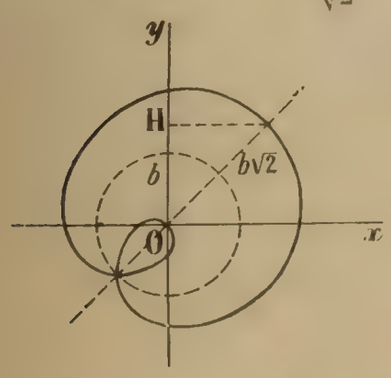
et la nouvelle équation est

$$2(x'^2+y'^2)^2-3b^2(x'^2+y'^2)-b^3\sqrt{2}x'=0.$$

L'axe des x' est un axe de symétrie; les deux points cycliques sont des points doubles; le troisième point double est sur Ox'. Faisons $y'=0$; les abscisses des points de rencontre avec Ox' sont donnés par

$$2x'^4-3b^2x'^2-b^3\sqrt{2}x'=0;$$

ce sont $x'=0$, $x'=\frac{-b}{\sqrt{2}}$, deux fois, et $x'=b\sqrt{2}$. Le point double est donc le point de Ox' qui a pour abscisse $\frac{-b}{\sqrt{2}}$; il faut porter les axes en ce point, c'est-à-dire changer x' en $x'-\frac{b}{\sqrt{2}}$. L'équation devient alors



$$2\left(x'^2+y'^2-bx'\sqrt{2}+\frac{b^2}{2}\right)^2-3b^2\left(x'^2+y'^2-bx'\sqrt{2}+\frac{b^2}{2}\right)$$
$$-b^3\sqrt{2}\left(x'-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)=0;$$

simplifiée, cette équation s'écrit

$$2(x'^2+y'^2)^2-4b\sqrt{2}x'(x'^2+y'^2)-b^2(x'^2+y'^2)+4b^2x'^2=0.$$

Passons alors aux coordonnées polaires; posons

$$x'=\rho\cos\omega, \qquad y'=\rho\sin\omega.$$

et supprimons le facteur commun ρ^2, nous avons

$$2\rho^2 - 4b\sqrt{2}\,\rho\cos\omega + 4b^2\cos^2\omega - b^2 = 0,$$

$$(\rho - b\sqrt{2}\cos\omega)^2 - \frac{b^2}{2} = 0.$$

Nous tirons de là

$$\rho = b\sqrt{2}\cos\omega \pm \frac{b}{\sqrt{2}},$$

et nous voyons que la courbe est un limaçon de Pascal, dans lequel la constante additive est la moitié du diamètre du cercle. La courbe est donc bien connue et se construit aisément.

Bonnes solutions : MM. G. Roy, à Paris ; M. a Guéret ; G. Lach, à Douai ; L. Naucelle, à Charleroi ; M. Roux, au Creusot.
Solutions satisfaisantes : MM. G. R. à Paris ; A. Sade, à Poitiers ; R. Chirol, à Saint-Etienne ; A. Hutinel, à Cannes ; P. Roberti, à Saint-Cloud ; Commandant G. Lifeanu, à Bucarest.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

2430. — *Un cylindre de révolution, de 5cm de rayon, a pour axe la droite horizontale dont les projections sont X et X'. Un hyperboloïde de révolution réglé a pour axe la droite (Y, Y') rencontrant la droite (X, X') au point (o, o'). Une de ses génératrices est la verticale projetée horizontalement au point C de X à 5cm à gauche de la droite oo'.*

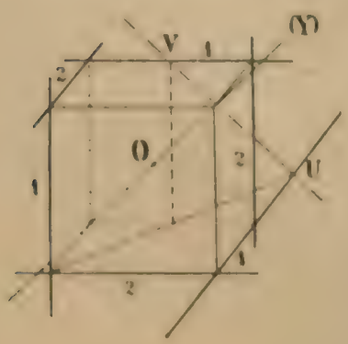
On demande de représenter par ses projections le solide commun au cylindre et à l'hyperboloïde.

Pour la mise en place, on se conformera aux indications du croquis : oo' est dirigé suivant le grand axe de la feuille ; le point o, a 6cm au-dessous du centre ; le point o' a 11cm au-dessus.

(*École polytechnique*, 1920.)

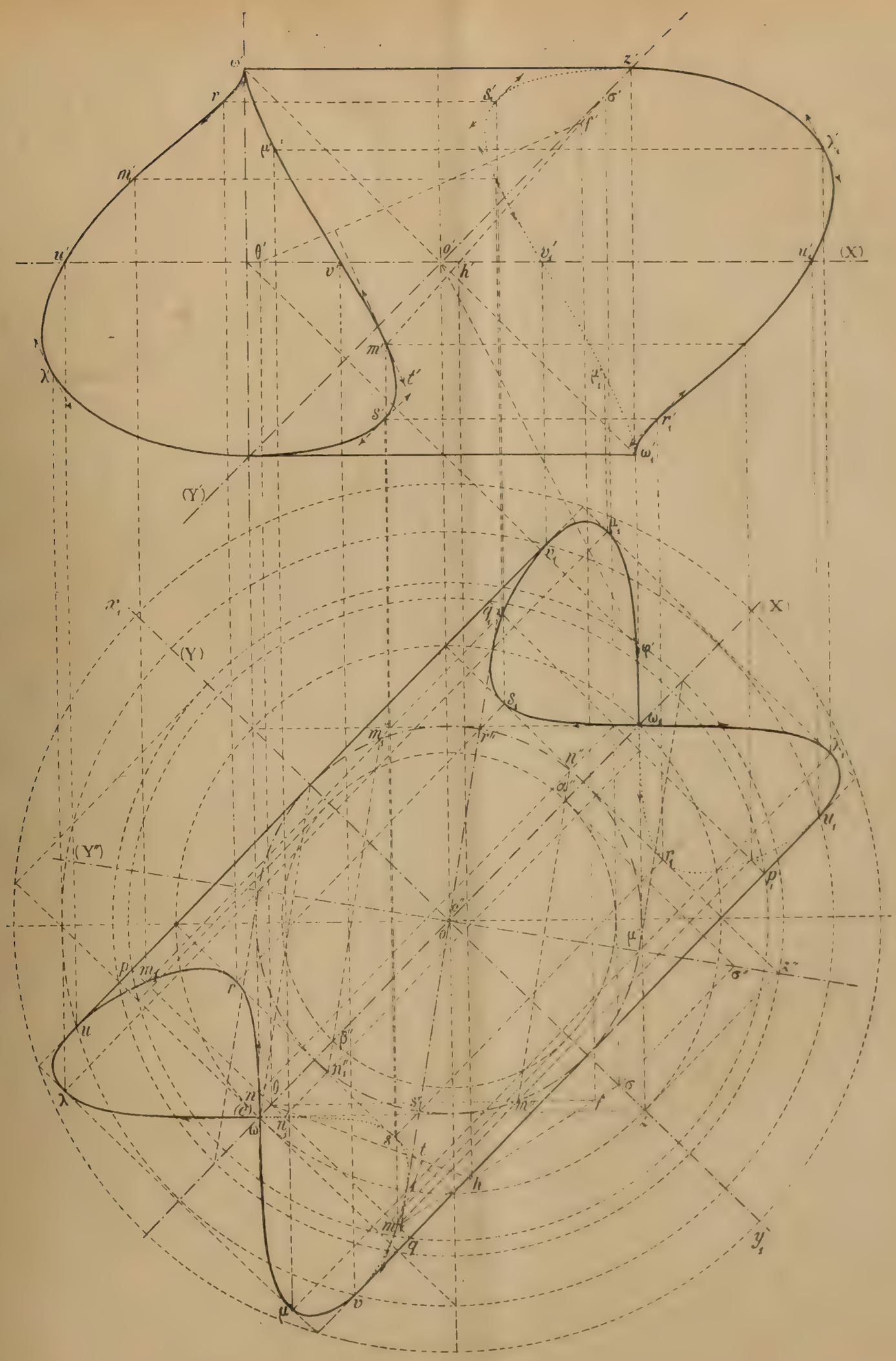
L'hyperboloïde occupe une position très particulière. D'abord il n'a pas de contour apparent horizontal, puisqu'il a une génératrice verticale, et par suite une seconde, symétrique de la première par rapport au centre. Les projections horizontales des génératrices des deux systèmes forment ainsi deux faisceaux de droites concourantes dont les sommets sont les pieds des deux génératrices dont il s'agit, et n'ont pas de véritable enveloppe. Mais, par suite de symétries résultant de la position particulière de l'axe, la surface possède également deux génératrices de bout, d'où absence également de contour apparent vertical, puis deux autres génératrices parallèles à la ligne de terre. Ces droites forment un hexagone gauche, emprunté aux arêtes d'un cube, comme l'indique le croquis ci-contre, et sont alternativement du premier et du second système.

Ce cube permet de construire facilement les diverses génératrices rectilignes. Un plan passant, par exemple, par la génératrice verticale du premier système, rencontre les deux autres droites du même système en des points U et V, déterminant la génératrice UV de l'autre famille. On pourrait donc se dispenser de faire appel aux propriétés générales des surfaces de révolution, et nous aurions déjà une méthode spéciale, qui consisterait à chercher simplement les intersections des droites UV avec le cylindre donné. Nous reviendrons cependant au procédé classique, relatif à deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent.



Construction d'un point quelconque de l'intersection. — Le plan des axes étant oblique, nous commencerons par prendre, comme plan auxiliaire de projection, le plan méridien vertical de l'hyperboloïde, qui est en même temps un plan de section droite du cylindre. La ligne de terre, passant par le centre commun (o, o'), se confondra avec Y en projection horizontale, et nous construirons la nouvelle projection $o''z''$ de l'axe de l'hyperboloïde.

Employons des sphères auxiliaires de centre (o, o'). Nous tracerons dans le plan horizontal un cercle de centre o et de rayon arbitraire ; ce sera le contour apparent d'une pareille sphère, et nous en déduirons immédiatement les plans pq, p_1q_1 des cercles déterminés dans le cylindre. La même sphère rencontrera la première



Échelle : $\frac{2}{3}$.

génératrice verticale (c) de l'hyperboloïde en deux points dont les projections auxiliaires α'' et β'' se construiront à l'aide du cercle déterminé dans la sphère par le plan mené par la génératrice (c) parallèlement à (Y). Par α'' et β'' nous mènerons les perpendiculaires à $o''\varepsilon''$, qui seront les traces des plans des parallèles obtenus dans l'hyperboloïde. Ces droites rencontreront la base du cylindre en des points m'', n'', m''_1, n''_1 que l'on rappellera respectivement en m, n, m_1 et n_1 sur pq. On rappellera enfin sur le plan vertical primitif. Le parallèle p_1q_1 fournit quatre points analogues.

Les constructions peuvent s'interpréter d'une autre manière, comme permettant de déterminer les points de rencontre de l'hyperboloïde avec une génératrice du cylindre, projetée sur la base en un point donné m'. Il suffit de mener par ce point la perpendiculaire à $o''\varepsilon''$ qui donne le point α', d'où l'on déduit la sphère, et les droites pq, p_1q_1, rencontrant en m et m_1 la projection horizontale de la génératrice.

Tangente en un point de la courbe. — La tangente a été construite ici par la méthode du plan normal. D'abord la normale au cylindre rencontre l'axe au point (θ, θ'), centre de la section droite correspondante. Pour l'hyperboloïde, le sommet (τ, τ') du cône des normales est le même que pour le cône asymptote, les deux parallèles étant dans le même plan. On l'obtiendra au moyen de la normale au cône au point projeté en α''; il aura ainsi même cote que ce dernier. L'horizontale $(\theta h, \theta' h')$ et la frontale $(\theta f, \theta' f')$ du plan normal permettent de construire la tangente demandée $(mt, m't')$.

Plans limites. — Chaque plan perpendiculaire à l'axe de l'hyperboloïde nous donne quatre points de la courbe, par l'intersection d'un parallèle et de deux génératrices du cylindre. Les plans utiles sont tous compris entre deux plans tangents au cylindre qui sont deux plans limites. Chacun de ceux-ci contient un cercle bitangent à la courbe aux points où il rencontre la génératrice de contact avec le cylindre. Les tangentes qui en résultent sont donc parallèles au plan vertical auxiliaire. En projection horizontale on obtient les quatre points λ, μ, λ_1, μ_1 les plus éloignés de (Y). En projection verticale, les tangentes en λ', μ', λ'_1, μ'_1 ont la direction des projections des lignes de plus grande pente des plans perpendiculaires à l'axe de l'hyperboloïde. Nous avons construit celle de ces droites qui passe par (o, o') et qui est projetée en $o'\varphi'$.

Points situés sur le cercle de gorge de l'hyperboloïde. — Le rayon de ce cercle est égal à la distance oc du centre à une génératrice; les points de rencontre avec le cylindre sont donc les sommets d'un carré. De plus, les tangentes en ces points (r, r'), (s, s'), (r_1, r'_1), (s_1, s'_1) sont parallèles à l'axe de l'hyperboloïde, puisque les plans tangents aux deux surfaces sont tous parallèles à cette droite.

Points situés sur les contours apparents du cylindre. — Les génératrices de contour apparent horizontal rencontrent l'hyperboloïde en des points (u, u'), (v, v'), (u_1, u'_1), (v_1, v'_1) que nous avons donné le moyen de construire. Quant à ceux qui appartiennent au contour apparent vertical, ce sont les points les plus hauts et les plus bas, qui s'obtiennent indirectement. Il suffit de remarquer que les deux génératrices de bout de l'hyperboloïde sont tangentes au cylindre, et fournissent les points (ω, ω') et (ω_1, ω'_1). De même, les deux génératrices parallèles à la première ligne de terre donnent deux autres points ayant mêmes projections horizontales que les précédents.

Points doubles. — On vient de remarquer que ω et ω_1 sont deux points doubles en projection horizontale. Les tangentes de l'espace sont les génératrices de l'hyperboloïde qui touchent le cylindre. On peut s'assurer qu'en ω et ω_1 la courbe traverse ses tangentes, et présente ainsi deux points de double inflexion. D'ailleurs la normale à l'hyperboloïde en (ω, ω') étant parallèle à la ligne de terre, le théorème de Meusnier nous révèle, pour la courbe, un plan osculateur de profil. Le point ω' est un rebroussement de première espèce, à tangente verticale, et il en est de même de ω'_1.

Il n'est pas inutile de présenter ici une observation générale, au point de vue des points doubles en projection. On se contente ordinairement du principe de la droite des points doubles, provenant de l'intersection de deux plans diamétraux, et cette droite n'existe pas toujours si les deux plans diamétraux sont singuliers. Quoiqu'elle existe ici, et se confonde avec la trace $\omega\omega_1$ du plan des deux génératrices verticales de l'hyperboloïde, le cylindre ne présentant rien de particulier, nous ferons remarquer que, lorsqu'une des surfaces est une quadrique admettant une génératrice perpendiculaire à un plan de projection, il vaut mieux étudier directement cette droite. En général, elle rencontre l'autre surface en deux points au moins, qui admettent même projection. S'il y a une seconde génératrice parallèle à distance finie, il en résulte un nouveau point double.

Il faut cependant réserver le cas où l'un des points de rencontre avec la seconde surface est rejeté à l'infini. Le lecteur peut essayer, par exemple, de remplacer le cylindre actuel par un cône de révolution contenant la verticale de ω. La cubique obtenue en projection horizontale admettra ω comme point double, mais ω_1 ne sera qu'un point simple.

Symétries. — Le centre (o, o'), commun à l'hyperboloïde et au cylindre, est un centre de symétrie pour la

courbe. De plus, l'axe du cylindre, étant aussi un axe pour l'hyperboloïde, est un axe de la courbe, dans l'espace et en projection horizontale. Il en est de même de l'axe de l'hyperboloïde.

Ponctuation. — On découvre sans difficulté les arcs de la courbe qui sont cachés sur le cylindre. L'hyperboloïde, dépourvu de contours apparents, n'intervient pas.

REMARQUE. — Par une coïncidence curieuse, la droite $r''s''$ du plan auxiliaire est tangente à la projection horizontale de la courbe, en deux points situés sur les lignes de rappel $\lambda\mu_1$ et $\mu\nu_1$. On constate plusieurs faits du même genre.

J. L.

M. MENNESSIER, à Évreux, a envoyé une épure très soignée, mais avec une erreur dans les données, commise d'ailleurs par un certain nombre de candidats.

SUJETS DE CONCOURS

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

(Cours spéciaux.)

Concours de 1921.

Algèbre, analyse et trigonométrie.

I. — Soit l'équation $x^4 - 7x + 1 = 0$. Trouver combien elle a de racines réelles, et les calculer avec trois décimales exactes (par défaut).

II. — **2545.** Intégrer l'équation différentielle

$$(x+1)^3 \frac{d^4y}{dx^4} + (x+1)\frac{d^2y}{dx^2} + 2a\frac{dy}{dx} = x^2 - 1,$$

où a est un paramètre, par le changement de variable $x + 1 = e^t$ (t est la nouvelle variable).

On traitera complètement le cas général où a est quelconque, et, ensuite, les cas particuliers.

(*Durée : 4 h.*)

Géométrie et mécanique.

I. — **2546.** Un conoïde réglé droit est engendré par une droite qui reste constamment parallèle au plan xOy et qui s'appuie d'une part sur l'axe Oz, d'autre part sur le cercle défini par les équations

$$y^2 + z^2 = 1, \quad x = 1.$$

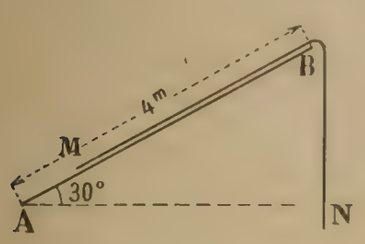
a) On demande son équation.

On coupe le conoïde par un cylindre dont les génératrices sont parallèles à Oz et qui a pour directrice le cercle $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$.

b) On demande d'écrire l'équation de la projection de l'intersection des deux surfaces sur le plan xOz et de construire la courbe représentée par cette équation.

Distinguer les portions de cette courbe qui correspondent à des points réels ou imaginaires de l'intersection.

II. — Un guide fixe rectiligne AB est placé dans un plan vertical; il est incliné de 30° sur l'horizontale. La longueur AB est égale à 4^m.



Un câble sans raideur, inextensible et pesant 4^{kg} par mètre courant, est placé de telle façon qu'un de ses brins se trouve sur le guide, l'autre pendant verticalement à partir du point B, suivant la ligne MBN. En plus de son propre poids, ce câble est soumis à une force appliquée au point M, agissant dans la direction de B vers A et proportionnellement à la distance MA. Quand $MA = 20^{cm}$, cette force est égale à 1^{kg}.

La longueur du câble est égale à 6^m. Prenant comme inconnue la longueur $AM = x$, comptée positivement de A vers M :

a) On demande la valeur de x quand le câble est en équilibre.

b. On tire le câble jusqu'à ce que x soit égal à 1^m et on le lâche sans vitesse. Le câble se met en mouvement. Dans quel sens? Le point M se rapproche-t-il de A ou s'en éloigne-t-il?

Trouver la loi de ce mouvement, tant que le point M reste entre A et B.

c. Suivant le résultat trouvé précédemment, le point M arrivera en A ou en B. On demande la vitesse du point M au moment où il passe à celui de ces deux points qui résulte du paragraphe *b* ci-dessus.

Calculer cette vitesse à $0^m,01$ près.

On prendra $g = 10^m$ sec., sec. *Durée : 4 h.*)

Épure de géométrie descriptive.

2547. — Le petit axe de la feuille étant pris pour ligne de terre xy, on considère deux droites de front Δ et D dont les projections horizontales sont respectivement à 80 et 50^{mm} au-dessous de xy. Leurs projections verticales passent par le point O' situé sur le grand axe de la feuille, à 70^{mm} au-dessus de xy; la projection verticale de D est perpendiculaire à xy; celle de Δ passe par le point projeté sur la ligne de terre à 40^{mm} à gauche du grand axe de la feuille.

On considère l'hyperboloïde H engendré par la rotation de la droite D autour de la droite Δ et on demande :

1° de représenter le solide supposé plein et opaque limité par la surface de H, par le plan horizontal de projection, et par le plan perpendiculaire à Δ coupant Δ à 50^{mm} de o' (au-dessus de o');

2° de déterminer l'ombre portée par ce solide sur le plan horizontal de projection, quand on l'éclaire par des rayons lumineux parallèles, venant de gauche et d'en haut, et projetés suivant des droites à 45 degrés sur la ligne de terre (lumière habituelle dite à 45 degrés).

Les parties vues de cette ombre portée seront couvertes de hachures légères (au crayon, en traits bleus fins). *Durée : 3 h.*)

DEUXIÈME PARTIE

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

(Cours préparatoires).

Concours de 1919.

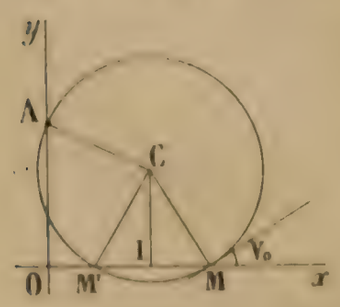
2370. — *On considère, dans un plan, tous les cercles passant par un point fixe* (A) *et coupant une droite donnée* (Δ) *sous un angle constant* V_0.

Déterminer, analytiquement et géométriquement :

1° *le lieu des centres des cercles mobiles;*

2° *l'enveloppe de ces cercles.*

1° Prenons pour axe des x la droite (Δ) et, pour axe des y, la perpendiculaire abaissée du point A sur la droite (Δ). Appelons a l'ordonnée du point A et α, β, les coordonnées du centre. L'équation du cercle est



$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \alpha^2 + (a-\beta)^2, \qquad x^2+y^2-2\alpha x - 2\beta y + 2a\beta - a^2 = 0;$$

ce cercle coupe l'axe des x aux points M et M' ayant pour abscisses les racines de l'équation

$$x^2 - 2\alpha x + 2a\beta - a^2 = 0.$$

Au point M$(x, 0)$, le coefficient angulaire de la tangente est donné par

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{x-\alpha}{y-\beta} = \frac{x-\alpha}{\beta};$$

nous avons donc $\qquad x - \alpha = \beta \operatorname{tg} V_0;$

d'autre part $\qquad (x-\alpha)^2 = \alpha^2 - 2a\beta + a^2,$

et le lieu du centre est l'hyperbole

$$\beta^2 \operatorname{tg}^2 V_0 = \alpha^2 - 2a\beta + a^2.$$

Cette équation peut s'écrire $\beta^2(1+\operatorname{tg}^2 V_0) = \alpha^2 + (\beta - a)^2$;
nous voyons que cette hyperbole a pour foyer le point A et pour directrice la droite (Δ), $\beta = 0$.

Cela est d'ailleurs évident géométriquement, car $CI = CM \cos V_0$ et

$$\frac{CM \text{ ou } CA}{CI} = \frac{1}{\cos V_0} = C^{te} > 1.$$

2° L'équation de l'hyperbole s'écrit

$$\alpha^2 + (\beta - a)^2 = \frac{\beta^2}{\cos^2 V_0}$$

et donne

$$\alpha = \frac{\beta \cos t}{\cos V_0}, \qquad \beta - a = \frac{\beta \sin t}{\cos V_0};$$

par suite,

$$\beta = \frac{a \cos V_0}{\cos V_0 - \sin t}, \qquad \alpha = \frac{a \cos t}{\cos V_0 - \sin t}.$$

L'équation du cercle devient alors

$$(x^2 + y^2 - a^2)(\cos V_0 - \sin t) - 2ax \cos t - 2a \cos V_0 (y - a) = 0$$
$$(x^2 + y^2 - a^2) \sin t + 2ax \cos t = \cos V_0 (x^2 + y^2 - 2ay + a^2).$$

L'enveloppe, quand t varie, est immédiate; c'est

$$(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2x^2 = \cos^2 V_0 [x^2 + (y - a)^2];$$

ou

$$(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2x^2 = (x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2y^2;$$

le premier membre se décompose en un cercle de rayon nul, le cercle $x^2 + (y - a)^2$, qui est aussi dans le second membre et un autre facteur. La véritable enveloppe est donc le cercle

$$x^2 + (y + a)^2 = \cos^2 V_0 [x^2 + (y - a)^2].$$

C'est le cercle directeur de l'hyperbole ayant son centre au second foyer, comme cela est évident géométriquement : quand un cercle passe par un point fixe, l'enveloppe de ce cercle est l'homothétique dans le rapport 2, par rapport au point fixe de la podaire du lieu des centres ayant pour pôle ce point.

Une autre solution géométrique s'obtient en effectuant une inversion ayant pour centre le point fixe A.

Solutions de MM. G. Lach, à Douai; A. Tenot, à Angers; M. Roux, au Creuzot; A. Hutinel, à Cannes; Mennessier, à Évreux; L. Gauthier, à Craponne; Ch. Pacé, enseigne de vaisseau; P. Bernard, à Paris.

ÉCOLE CENTRALE

Concours de 1920.

2417. — *Les axes, Ox, Oy, étant rectangulaires, on considère la courbe C ayant pour équation en coordonnées polaires, d'origine O, d'axe polaire Ox,*

$$\rho = a\sqrt{\sin 2\theta},$$

a étant une longueur donnée.

1° *Tracer cette courbe, déterminer les tangentes parallèles aux axes Ox et Oy, et les tangentes parallèles aux bissectrices de ces axes.*

2° *On prend sur la courbe C un point variable M, défini par l'angle θ. Trouver l'équation cartésienne, par rapport aux axes Ox et Oy, de la perpendiculaire à OM menée par M, et les coordonnées, x et y, du point où cette perpendiculaire touche son enveloppe H. Donner l'équation de cette enveloppe en coordonnées*

cartésiennes, et son équation en coordonnées polaires. Tracer dans une même figure l'ensemble des courbes C *et* H.

N. B. — Les deux parties du problème sont indépendantes.

On reconnaît aisément que la courbe est symétrique par rapport au pôle (changement de θ en $\theta+\pi$), qu'elle est symétrique également par rapport à la première bissectrice (changement de θ en $\frac{\pi}{2}-\theta$); il suffit pour étudier sa forme de faire varier θ de 0 à $\frac{\pi}{4}$: ρ croît constamment depuis 0 jusqu'à un maximum égal à a. Pour calculer tg V, on écrira

$$\rho^2 = a^2 \sin 2\theta, \qquad \text{d'où :} \qquad 2\rho\rho' = 2a^2 \cos 2\theta,$$

et

$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{\rho^2}{\rho\rho'} = \operatorname{tg} 2\theta \qquad (V = 2\theta).$$

La courbe part du pôle, tangentiellement à l'axe polaire, et vient rencontrer la première bissectrice, qui est un axe de symétrie, normalement $\left(\theta = \frac{\pi}{4},\ V = \frac{\pi}{2}\right)$ en un point A, tel que $OA = a$, puis revient au pôle, tangentiellement à Oy. On a ainsi une première boucle, correspondant aux valeurs de θ comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$; on en déduit la seconde boucle, symétrique de la première par rapport au pôle $\left(\text{valeurs de } \theta \text{ comprises entre } \pi \text{ et } \frac{3\pi}{2}\right)$.

Enfin pour les valeurs de θ comprises entre $\frac{\pi}{2}$ et π, ou entre $\frac{3\pi}{2}$ et 2π, $\sin 2\theta$ est négatif et ρ imaginaire. Si l'on pose $\theta = \frac{\pi}{4} + \theta'$, d'où

$$\sin 2\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta'\right) = \cos 2\theta',$$

on obtient l'équation $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta'}$, qui est l'équation en coordonnées polaires de la lemniscate de Bernoulli.

Pour déterminer les points où la tangente a une direction donnée, calculons le coefficient angulaire de la tangente en un point.

On a

$$x = \rho \cos\theta, \qquad y = \rho \sin\theta,$$

d'où, en prenant les dérivées par rapport à θ,

$$x' = \rho' \cos\theta - \rho \sin\theta, \qquad y' = \rho' \sin\theta + \rho \cos\theta,$$

$$m = \frac{y'}{x'} = \frac{\rho' \sin\theta + \rho\cos\theta}{\rho' \cos\theta - \rho \sin\theta} = \frac{\rho\rho' \sin\theta + \rho^2 \cos\theta}{\rho\rho' \cos\theta - \rho^2 \sin\theta} = \frac{\cos 2\theta . \sin\theta + \sin 2\theta . \cos\theta}{\cos 2\theta . \cos\theta - \sin 2\theta . \sin\theta} = \frac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta} = \operatorname{tg} 3\theta.$$

1° *Tangentes parallèles à* Ox : $m = 0$, $3\theta = k\pi$, $\theta = \frac{k\pi}{3}$, correspondant à l'origine (pour $\theta = 0$ et pour $\theta = \pi$), au point le plus haut de la courbe pour $\theta = \frac{\pi}{3}$ et au point le plus bas pour $\theta = \frac{4\pi}{3}$.

2° *Tangentes parallèles à* Oy : $m = \infty$, $3\theta = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{6}$, correspondant à l'origine $\left(\text{pour } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ et } \theta = \frac{3\pi}{2}\right)$, au point le plus à droite pour $\theta = \frac{\pi}{6}$ et au point le plus à gauche pour $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

3° *Tangentes parallèles à la première bissectrice* : $m = 1$,

$$3\theta = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad \theta = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \quad \left(\theta = \frac{\pi}{12},\ \theta = \frac{5\pi}{12},\ \theta = \frac{13\pi}{12},\ \theta = \frac{17\pi}{12}\right).$$

Pour ces quatre points deux à deux symétriques par rapport à la première et par rapport à la seconde bissectrice, la distance à l'origine est $\rho = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

4° *Tangentes parallèles à la seconde bissectrice* : $m = -1$, $3\theta = k\pi + \frac{3\pi}{4}$, $\theta = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$; on trouve le point A pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ et le point A′ symétrique de A par rapport au pôle pour $\theta = \frac{5\pi}{4}$.

L'équation cartésienne de la perpendiculaire à OM menée par le point M s'obtient immédiatement en appliquant l'équation de la droite sous la forme $x\cos\alpha + y\sin\alpha - h = 0$. C'est l'équation

$$x\cos\theta + y\sin\theta - a\sqrt{\sin 2\theta} = 0. \tag{1}$$

Le point M′ où cette droite touche son enveloppe est son point de rencontre avec la droite dont on obtient l'équation en dérivant l'équation (1) par rapport au paramètre θ, savoir :

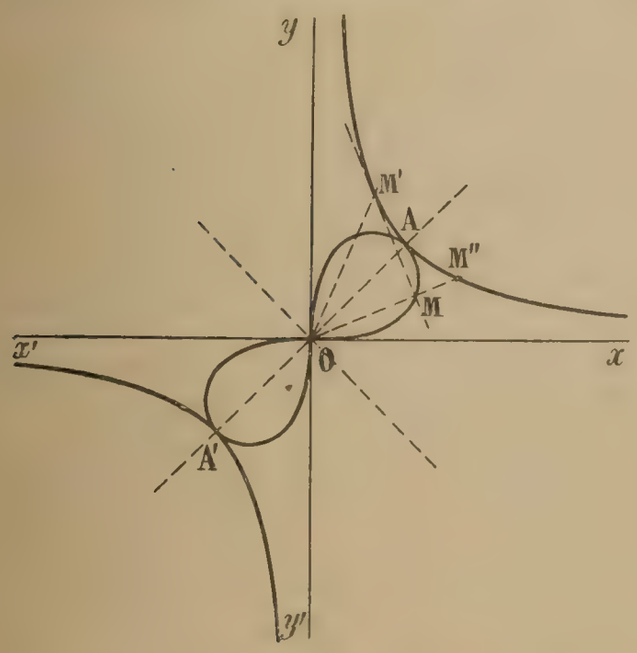
$$-x\sin\theta + y\cos\theta - a\frac{\cos 2\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}} = 0; \tag{2}$$

cette droite n'est autre que la parallèle à OM menée à une distance de l'origine telle que la valeur algébrique du vecteur MM′, évaluée suivant la direction $\theta + \frac{\pi}{2}$, soit égale à $a.\frac{\cos 2\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}$. Les coordonnées du point M′ sont

$$x = a\sqrt{\sin 2\theta}\cos\theta - a\frac{\cos 2\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}\sin\theta = a\frac{\sin\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}} = \frac{a}{\sqrt{\sin 2\theta}}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right),$$

$$y = a\sqrt{\sin 2\theta}\sin\theta + a\frac{\cos 2\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}\cos\theta = a\frac{\cos\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}} = \frac{a}{\sqrt{\sin 2\theta}}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).$$

C'est le point dont les coordonnées polaires seraient $\omega = \frac{\pi}{2} - \theta$, et $\rho = \frac{a}{\sqrt{\sin 2\theta}}$; on voit ainsi que la direction OM′ est symétrique de OM par rapport à la première bissectrice et que le produit $\overline{OM}.\overline{OM'}$ est égal à a^2. L'enveloppe demandée est donc la courbe obtenue en prenant l'inverse de la lemniscate, puis la symétrique de cette courbe inverse par rapport à la première bissectrice; en raison de la symétrie de la figure, elle coïncide avec la courbe inverse.



Reste à obtenir l'équation de cette courbe. En coordonnées cartésiennes, il suffit de multiplier membre à membre les expressions des coordonnées de M′. On obtient

$$xy = \frac{a^2.\sin\theta.\cos\theta}{\sin 2\theta} = \frac{a^2}{2}.$$

C'est l'équation d'une hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes et ayant pour sommets réels les points A et A′. En coordonnées polaires, on aurait à éliminer θ entre les deux équations $\omega = \frac{\pi}{2} - \theta$, $\rho = \frac{a}{\sqrt{\sin 2\theta}}$, ce qui donne $\rho = \frac{a}{\sqrt{\sin 2\omega}}$, ou, en revenant aux coordonnées cartésiennes, $2xy = a^2$.

P. L.

Bonnes solutions : MM. Amblard Jean, lycée de Grenoble; F. Baillard, instituteur à Clery, Côte-d'Or; A. Busser, à Alger; Raymond Chirol, Saint-Étienne; C. Delvoye; Emile Duval, école normale de Rennes; G. Gerondeau, Toury (Eure-et-Loir); G. Hermellin; A. Hutinel, à Cannes; D.-V. Ionesco, à Bucarest; G. Lach, à Douai; Georges Leroy, école d'arts et métiers, de Lille; G. R., à Paris.

2418. — I. — *Soient* Ox *et* Oy *deux axes de coordonnées rectangulaires, dont l'un,* Oy, *est vertical et a son sens positif contraire à celui de la pesanteur. Une barre rectiligne* OM, *homogène, indéformable, d'épaisseur négligeable, de longueur donnée* l, *et de poids donné* P, *est assujettie à tourner librement autour du point fixe* O, *origine des coordonnées, en restant dans le plan vertical* xOy. *Un point* S *de ce plan, de coordonnées positives données,* α *et* β, *attire l'extrémité* M *de la barre proportionnellement à la distance* MS; *l'attraction à l'unité de distance a pour valeur* $\frac{P}{2k}$, k *étant une longueur donnée. On demande de calculer les coordonnées du point* M *pour chacune des positions d'équilibre de la barre* OM.

II. — *Soient,* Ox, Oy, Oz, *trois axes de coordonnées rectangulaires, dont l'un,* Oz, *est vertical et a son sens positif contraire à celui de la pesanteur. La même barre que précédemment peut tourner librement, dans tout l'espace, autour de l'origine fixe* O, *et son extrémité* M *est attirée proportionnellement à la distance par trois points* A, B, C, *donnés respectivement sur* Ox, Oy, Oz; *pour chacun d'eux, l'attraction à l'unité de distance a pour valeur* $\frac{P}{2k}$, k *étant une longueur donnée* $(\overline{OA} = a > 0,\quad \overline{OB} = b > 0,\quad \overline{OC} = c > 0)$.

On demande de calculer les coordonnées du point M *pour chacune des positions d'équilibre de la barre* OM, *et, pour chacune de ces positions, les composantes suivant les axes* Ox, Oy, Oz *de la réaction* R *du point fixe* O.

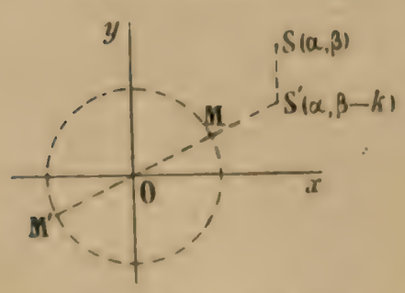
I. — La condition d'équilibre est que la somme des moments par rapport au point O des forces qui agissent sur la barre soit égale à 0.

Soient x et y les coordonnées du point M; le poids P a pour point d'application le point $\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$; ses composantes sont 0 et $-P$ et son moment par rapport au point O est $-\frac{x}{2}P$.

La force $F = \frac{P}{2k}MS$ a pour point d'application le point (x, y); ses composantes sont $\frac{P}{2k}(\alpha - x)$ et $\frac{P}{2k}(\beta - y)$ et son moment par rapport au point O est $\frac{P}{2k}[x(\beta - y) - y(\alpha - x)] = \frac{P}{2k}(\beta x - \alpha y)$.

L'équation d'équilibre est donc $-\frac{Px}{2} + \frac{P}{2k}(\beta x - \alpha y) = 0$, c'est-à-dire $(\beta - k)x - \alpha y = 0$.

Le point M doit être situé à l'intersection du cercle de rayon l décrit de O comme centre, avec la droite qui joint l'origine au point S′ de coordonnées $x = \alpha$, $y = \beta - k$, obtenu en faisant subir au point S une translation parallèle à Oy, $SS' = -k$. On obtient deux positions d'équilibre, M et M′, dont les coordonnées sont données par les deux équations



$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta - k} = \pm \frac{l}{\sqrt{\alpha^2 + (\beta - k)^2}}.$$

II. — Soient x, y, z les coordonnées du point M, reliées par la relation $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$. En écrivant les six équations universelles d'équilibre, nous pourrons au moyen des équations de moments déterminer les positions d'équilibre : les trois équations de projections nous fourniront les composantes X, Y, Z de la réaction R du point O.

Le poids P a pour point d'application le milieu de OM $\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}\right)$. Les composantes sont 0, 0, $-P$; ses moments par rapport aux trois axes sont $-\frac{Py}{2}$, $\frac{Px}{2}$ et 0.

La force $F_1 = \frac{P}{2k}MA$ peut être considérée comme appliquée au point $A(a, 0, 0)$; ses composantes sont $\frac{P}{2k}(a - x)$, $-\frac{P}{2k}y$, $-\frac{P}{2k}z$, et ses moments, 0, $a\frac{P}{2k}z$ et $-a\frac{P}{2k}y$.

La force $F_2 = \frac{P}{2k}MB$ peut être considérée comme appliquée au point $B(0, b, 0)$; ses composantes sont $-\frac{P}{2k}x$, $\frac{P}{2k}(b-y)$, $-\frac{P}{2k}z$ et ses moments, $-b\frac{P}{2k}z$, 0 et $b\frac{P}{2k}x$.

La force $F_3 = \frac{P}{2k}.MC$ peut être considérée comme appliquée au point $C(0, 0, c)$; ses composantes sont $-\frac{P}{2k}x$, $-\frac{P}{2k}y$, $\frac{P}{2k}(c-z)$ et ses moments, $c\frac{P}{2k}y$, $-c\frac{P}{2k}x$ et 0.

Écrivons d'abord les trois équations de moments :

$$-P\frac{y}{2} - b\frac{P}{2k}z + c\frac{P}{2k}y = 0, \qquad P\frac{x}{2} + a\frac{P}{2k}z - c\frac{P}{2k}x = 0, \qquad -a\frac{P}{2k}y + b\frac{P}{2k}x = 0.$$

Elles se réduisent à deux, savoir : $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c-k}$;

ce sont les équations de la droite qui joint l'origine au point de coordonnées a, b, $c-k$; on en déduit les coordonnées du point M pour chacune des positions d'équilibre (il y en a deux) :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c-k} = \pm\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2+(c-k)^2}}.$$

Écrivons maintenant les équations de projections :

$$X + \frac{P}{2k}(a-x) - \frac{P}{2k}x - \frac{P}{2k}x = 0, \qquad Y - \frac{P}{2k}y + \frac{P}{2k}(b-y) - \frac{P}{2k}y = 0,$$

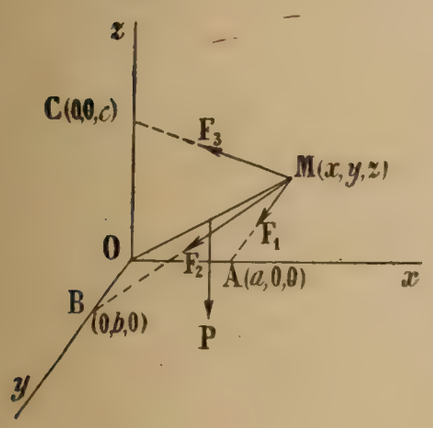
$$Z - P - \frac{P}{2k}z - \frac{P}{2k}z + \frac{P}{2k}(c-z) = 0,$$

et nous obtiendrons

$$X = \frac{P}{2k}(3x-a), \qquad Y = \frac{P}{2k}(3y-b), \qquad Z = P + \frac{P}{2k}(3z-c).$$

Remarque. — Les trois forces F_1, F_2, F_3 auraient pu être remplacées par leur résultante appliquée au point M et égale à

$$\frac{P}{2k}[(MA)+(MB)+(MC)] = \frac{P}{2k}[3(MO)+(OA)+(OB)+(OC)]$$
$$= \frac{P}{2\frac{k}{3}}\left[(MO) + \frac{(OA)+(OB)+(OC)}{3}\right].$$



Soit S le centre des moyennes distances des trois points A, B, C; S a pour coordonnées $\frac{a}{3}$, $\frac{b}{3}$, $\frac{c}{3}$, et $(OS) = \frac{1}{3}[(OA)+(OB)+(OC)]$.

La résultante des trois forces F_1, F_2 et F_3 est une force appliquée au point M et égale à $\frac{P}{2\frac{k}{3}}[(MO)+(OS)] = \frac{P}{2.\frac{k}{3}}(MS)$.

On est ramené aux conditions du paragraphe précédent (k étant remplacé par $\frac{k}{3}$; donnant au point S une translation $\overline{SS'} = -\frac{k}{3}$ parallèle à Oz, on aura le point S′ de coordonnées $\frac{a}{3}$, $\frac{b}{3}$, $\frac{c-k}{3}$; les positions d'équilibre seront fournies par l'intersection de la droite OS′ avec la sphère de rayon l décrite de l'origine comme centre.

Enfin, la réaction R sera définie par l'équipollence

$$(R) + (P) + \frac{P}{2k}.3(MS) = 0.$$

On retrouve ainsi les résultats obtenus directement. P. L.

Solutions : MM. Amblard Jean, lycée de Grenoble; C. Delvoye; Emile Duval, école normale de Rennes; Chirol Raymond, à Saint-Etienne; A. Hutinel, à Cannes; G. Hermellin; G. Lach, à Douai.

2419. — *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{(3\sin^2 x + 4\sin x + 1)\sqrt{\sin x}}.$$

Posons $\sqrt{\sin x} = t$, d'où $\sin x = t^2$ et $\cos x . dx = 2tdt$, l'intégrale devient

$$\int_0^1 \frac{2tdt}{(3t^4 + 4t^2 + 1)t} = 2\int_0^1 \frac{dt}{3t^4 + 4t^2 + 1}.$$

Le trinome $3t^4 + 4t^2 + 1$ se décompose en $(t^2 + 1)(3t^2 + 1)$.

Posons

$$\frac{2}{3t^4 + 4t^2 + 1} = \frac{A}{t^2 + 1} + \frac{B}{3t^2 + 1},$$

d'où

$$2 = A(3t^2 + 1) + B(t^2 + 1)$$

et par suite, $A = -1$, $B = 3$. L'intégrale demandée équivaut à

$$\int_0^1 \frac{3dt}{3t^2 + 1} - \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 1}.$$

La seconde a pour valeur $(\operatorname{arc\,tg} t)_0^1 = \frac{\pi}{4}$; pour calculer la première, nous poserons $u = t\sqrt{3}$; nous sommes ramenés à

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}du}{1 + u^2} = \sqrt{3}\,(\operatorname{arc\,tg} u)_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}\sqrt{3} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

La valeur de l'intégrale est donc

$$I = \pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4}\right) = 1{,}028.$$

P. L.

Solutions de MM. Ambiard Jean, lycée de Grenoble; A. Busser, Alger; Raymond Chirol, Saint-Etienne; C. Delvoye; Emile Duval, école normale de Rennes; G. Hermellin; A. Hutinel, à Cannes; D. V. Ionescu, faculté de Bucarest; G. Lagh, à Douai; Georges Leroy, école nationale d'Arts et Métiers de Lille; M. Roux, instituteur au Creusot.

2420. — *Dans un problème de physique, l'inconnue x est la plus petite racine de l'équation*

$$g\left(t - \frac{x}{v}\right)^2 = 2x,$$

g, t et v étant des quantités positives données.

On demande de calculer cette racine en fonction des données, et de la développer en série ordonnée suivant les puissances entières, positives et croissantes de t. Calculer le terme général de cette série, et trouver la condition pour que cette série soit convergente.

En prenant $x_0 = \frac{1}{2}gt^2$ comme valeur approchée de x, trouver le signe de la différence $x - x_0$, et une limite supérieure de la valeur absolue de cette différence.

L'équation proposée peut s'écrire

$$x^2 - 2\left(vt + \frac{v^2}{g}\right)x + v^2t^2 = 0,$$

d'où l'on déduit, pour la plus petite racine,

$$x = vt + \frac{v^2}{g} - \frac{v^2}{g}\sqrt{1 + \frac{2g}{v}t}.$$

Pour les valeurs de t inférieures en valeur absolue à $\frac{v}{2g}$, on a

$$\left(1+\frac{2g}{v}t\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2g}{v}t-\frac{1}{2.4}\frac{2^2g^2}{v^2}t^2+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots2n}\frac{2^ng^n}{v^n}t^n+\ldots,$$

et, par suite,

$$\left(1+\frac{2g}{v}t\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{g}{v}t-\frac{1}{1.2}\frac{g^2}{v^2}t^2+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{1.2.3\ldots n}\frac{g^n}{v^n}t^n+\ldots.$$

On en déduit le développement en série de x :

$$x=\frac{1}{1.2}gt^2-\frac{1.3}{1.2.3}\frac{g^2}{v}t^3+\ldots+(-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{1.2.3\ldots n}\frac{g^{n-1}}{v^{n-2}}t^n+\ldots$$

Le terme général de la série est

$$u_n=(-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{1.2.3\ldots n}\frac{g^{n-1}}{v^{n-2}}t^n.$$

Le rapport $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{2n-1}{n+1}\frac{g}{v}|t|$ a pour limite, quand n augmente indéfiniment, $\frac{2g}{v}|t|$; donc l'intervalle de convergence est, comme on devait s'y attendre, l'intervalle de $-\frac{v}{2g}$ à $+\frac{v}{2g}$.

D'après l'énoncé, t est supposé positif; nous avons affaire à une série alternée; elle est absolument convergente pour $t<\frac{v}{2g}$. Pour $t=\frac{v}{2g}$, le terme général devient

$$u_n=(-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots2n.}\cdot\frac{v^2}{g};$$

on constate que la valeur absolue de u_n va en décroissant, car $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{2n-1}{2(n+1)}<1$, et que, de plus, u_n tend vers 0 quand n augmente indéfiniment, car

$$|u_n|=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{1}{2n}\cdot\frac{v^2}{g}<\frac{1}{2n}\cdot\frac{v^2}{g}.$$

La série est donc encore convergente pour $t=\frac{v}{2g}$.

Si l'on prend, comme valeur approchée de x, $x_0=\frac{1}{2}gt^2$, l'erreur commise, $x-x_0$, sera de même signe que le premier terme négligé, donc négative, et inférieure en valeur absolue à ce terme :

$$|x-x_0|<\frac{g^2}{2v}t^3.$$

Cela résulte de ce que, pour toute valeur de $t\leqslant\frac{v}{2g}$, les valeurs absolues des termes vont en décroissant, puisque

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{2n-1}{n+1}\frac{g}{v}t\leqslant\frac{2n-1}{2n+2}<1.$$

P. L.

Solutions : MM. Émile Duval, école normale de Rennes; G. Hermellin; A. Hutinel, à Cannes; G. Lach, à Douai; M. Roux, instituteur au Creusot.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX (1920)

ÉCOLE CENTRALE (*Fin*).

11054. — Contours apparents d'un tore à axe de front.

— **055.** — Point brillant d'un tore, en projection horizontale, pour une direction quelconque des rayons lumineux.

— **056.** — Une sphère est coupée par un plan suivant un petit cercle; un cylindre à génératrices de front s'appuie sur ce cercle. Intersection du cylindre avec la sphère; faire l'épure.

— **057.** — On donne une sphère et deux cônes circonscrits ayant leurs sommets dans le plan de front du centre; intersection de ces deux cônes. Déduire de la figure, en projection verticale, un théorème de géométrie plane.

— **058.** — On donne un ellipsoïde à axe vertical et un point sur l'axe; on considère le cône circonscrit à l'ellipsoïde ayant ce point pour sommet. On prend un autre point dans le plan de front de l'axe; c'est le sommet d'un second cône circonscrit à l'ellipsoïde. Intersection de ces deux cônes.

— **059.** — On considère un paraboloïde d'axe vertical et la sphère inscrite le long d'un parallèle donné, puis le cylindre circonscrit à cette sphère, de génératrices parallèles à la ligne de terre. Intersection du cylindre et du paraboloïde.

— **060.** — Section plane d'un ellipsoïde de révolution à axe vertical. Axes de la section; sommets. Sommet du cône circonscrit à l'ellipsoïde le long de la section.

— **061.** — Section d'un paraboloïde à axe vertical par un plan donné par ses traces. Sommet du cône circonscrit au paraboloïde le long de la section.

— **062.** — On donne un paraboloïde de révolution à axe vertical et un point (a, a') sur l'axe. Axes de la section déterminée dans la surface par le plan mené par la ligne de terre et le point (a, a').

— **063.** — Une surface de révolution (à axe vertical) est engendrée par une courbe située dans un plan donné et se projetant horizontalement suivant un cercle. Section de cette surface par un plan.

— **064.** — Section, par un plan vertical, d'un ellipsoïde de révolution à axe de front.

— **065.** — Intersection d'un plan quelconque et d'un ellipsoïde de révolution à axe de front.

— **066.** — Une courbe quelconque (C, C') engendre en tournant autour d'un axe de front (A, A') une surface de révolution. Mener d'un point (s, s') le cône circonscrit à cette surface. Trace sur le plan horizontal.

— **067.** — On donne un tore à axe vertical; on définit le plan tangent en un point (a, a') de sa surface par une horizontale et une frontale. Section du tore par ce plan; point courant et tangente, points sur le contour apparent horizontal; points situés dans le plan de profil de l'axe; points pour lesquels la tangente passe par (a, a'); point double.

— **068.** — Section d'un tore à axe vertical par un plan donné par ses traces.

— **069.** — Intersection d'une droite avec un ellipsoïde de révolution à axe vertical.

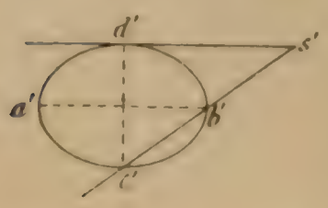
— **070.** — Intersection d'un tore à axe vertical avec une droite donnée par ses projections.

— **071.** — On donne deux cônes de révolution de même sommet, les axes étant quelconques. Trouver leur intersection.

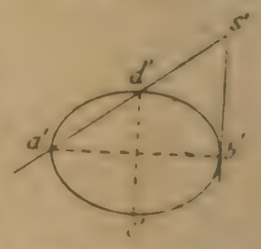
— **072.** — On donne dans un même plan de front les axes $(sa, s'a')$ et $(tb, t'b')$ de deux cônes de révolution de sommets (s, s'), (t, t') et d'angles donnés. Contours apparents et intersection.

— **073.** — Un ellipsoïde aplati a son axe vertical; un cône de révolution a son axe dans le plan de front qui contient l'axe de l'ellipsoïde. Intersection; sphères limites et tangentes aux points limites.

— **074.** — On considère un ellipsoïde de révolution à axe vertical et un cône de révolution, dont l'axe (quelconque) rencontre l'axe en (ω, ω'). Intersection des deux surfaces.



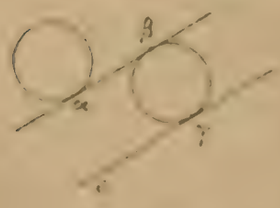
— **075.** — On considère un ellipsoïde de révolution aplati à axe vertical; un cône de révolution de sommet (s, s') est défini par $(cb, c'b')$ et $(ds, d's')$ qui sont les deux génératrices de contour apparent vertical. Intersections des deux surfaces.



— **076.** — Même question en prenant pour contour apparent vertical du cône les droites $a'd'$ et $b's'$.

— **077.** — On donne les projections d'une sphère; soit (s, s') le point le plus haut. On mène par ce point une parallèle à la ligne de terre. C'est l'axe d'un cône de révolution dont on donne l'angle au sommet et qui a (s, s') pour sommet. Intersection des deux surfaces.

— **078.** — Une surface de révolution à axe vertical a pour méridienne une courbe donnée. Intersection avec une sphère donnée.



— **079.** — Intersection d'un tore d'axe vertical avec une sphère.

— **080.** — On donne un tore d'axe vertical et un cylindre de révolution dont le contour apparent vertical est xy, cy (les génératrices sont de front). Intersection, point et tangente, points remarquables.

— **081.** — On donne deux droites quelconques et deux points de même cote sur ces deux droites; les deux droites sont deux génératrices de même système d'un hyperboloïde de révolution. Construire l'axe de cet hyperboloïde, sachant que les deux points appartiennent à un même parallèle.

11082. — On donne un hyperboloïde de révolution à axe vertical déterminé par son cône asymptote et les deux projections d'un point de la surface. Construire le plan tangent en ce point.

— **083.** — Soient deux droites de front; contours apparents de l'hyperboloïde engendré par l'une de ces droites, en tournant autour de l'autre.

— **084.** — On donne un hyperboloïde de révolution par son axe, vertical, et une génératrice (D, D'). Mener par (D, D') un plan P coupant la surface suivant une seconde génératrice (Δ, Δ') faisant avec (D, D') un angle donné.

— **085.** — Mêmes données. Mener par (D, D') un plan P coupant la surface suivant une seconde génératrice perpendiculaire à (D, D').

— **086.** — Plans tangents coupant un hyperboloïde de révolution, donné par son axe vertical (oz, $o'z'$) et une génératrice de front (A, A'), suivant des droites formant un angle donné. Enveloppe de ces plans. Quand on en a un, comment obtenir les autres?

— **087.** — Mener, à un hyperboloïde de révolution à une nappe (d'axe vertical), un plan tangent parallèle à une droite donnée, tel que le point de contact soit dans le plan de profil qui contient l'axe.

— **088.** — Mener, à un hyperboloïde de révolution à une nappe (d'axe vertical), les plans tangents parallèles au second plan bissecteur.

— **089.** — On donne une surface gauche de révolution par son axe vertical et une génératrice quelconque (A, A'); mener par cette génératrice un plan tangent faisant un angle α avec un plan donné.

— **090.** — Une surface gauche de révolution à axe vertical est donnée par une génératrice quelconque (D, D') intersection avec le plan mené par (D, D') et faisant un angle donné avec le plan vertical de projection.

— **091.** — Intersection d'une surface gauche de révolution avec une droite. Différents cas.

— **092.** — Intersection d'une surface gauche de révolution à axe vertical avec un plan défini par la ligne de terre et un point.

— **093.** — On donne une verticale et une droite quelconque; centre de la surface engendrée par la rotation de la seconde droite autour de la première. Section par le plan défini par la ligne de terre et le centre ainsi trouvé.

— **094.** — Un hyperboloïde de révolution, à axe de front, est défini par une génératrice de front; contours apparents; section par un plan de bout.

— **095.** — Un hyperboloïde dont l'axe est parallèle à la ligne de terre est défini par une génératrice de front. Section par un plan quelconque.

— **096.** — On donne une droite verticale et une droite quelconque; cette droite en tournant autour de la première engendre un hyperboloïde. Faire passer par la génératrice donnée un plan tangent à l'hyperboloïde, faisant un angle donné avec le plan horizontal; point de contact. Comment trouver les normales à l'hyperboloïde qui sont dans ce plan?

— **097.** — Section d'une surface gauche de révolution par un plan de bout; points de la section où la normale à l'hyperboloïde est située dans le plan de section donné.

— **098.** — On donne un hyperboloïde de révolution à une nappe, à axe vertical, et un plan qui le coupe suivant une ellipse; normale à la surface contenue dans ce plan.

— **099.** — On considère un hyperboloïde de révolution à une nappe, à axe vertical et un point sur l'axe. Mener de ce point une normale à l'hyperboloïde rencontrant une droite donnée. On considère une de ces normales; trouver le second point d'intersection.

— **100.** — Mener par un point des plans tangents à un hyperboloïde de révolution défini par son axe (vertical) et une génératrice (quelconque), avec point de contact sur une génératrice donnée, sur un parallèle donné ou sur un méridien donné. Contours apparents du cône de sommet (s, s') circonscrit à l'hyperboloïde. Trace de ce cône sur le plan du cercle de gorge.

— **101.** — Une droite (D, D') tourne autour d'un axe (Z, Z'). Courbe de contact du cône circonscrit à la surface engendrée, dont le sommet est en un point donné.

— **102.** — Un hyperboloïde de révolution à une nappe est donné par son axe, vertical, et une génératrice quelconque. Il est éclairé par des rayons lumineux de front. Trouver l'ombre.

— **103.** — On donne une verticale et une droite (D, D'); cette droite, en tournant autour de la verticale, engendre un hyperboloïde qui est éclairé par un point lumineux donné (s, s'). Trouver un point de la courbe d'ombre propre et sa tangente. Points à l'infini.

— **104.** — On considère un hyperboloïde de révolution à axe vertical et une génératrice quelconque (G, G'), puis le cône circonscrit de sommet (s, s'). Intersection des deux surfaces; trouver le plan de la section; trouver le point de la courbe d'intersection situé sur la génératrice (G, G'); tangente en ce point; trouver le point de la courbe situé dans le plan de profil de l'axe.

— **105.** — On donne deux hyperboloïdes de révolution à une nappe; les couper par un plan passant par un point donné et tel que les angles des asymptotes des deux coniques d'intersection soient égaux.

— **106.** — On donne un cylindre par la direction de ses génératrices et par sa base, qui est une ellipse dans le plan horizontal. On donne un hyperboloïde de révolution par son axe, vertical, et une génératrice quelconque. Intersection.

— **107.** — Un hyperboloïde de révolution est donné par son axe vertical et une génératrice. Intersection avec une sphère donnée; point et tangente.

— **108.** — L'horizontale (D, D') tourne autour de l'axe horizontal (ωa, $\omega' a'$); elle engendre un premier hyperboloïde; la frontale (Δ, Δ') tourne autour de l'axe de front (ωb, $\omega' b'$); elle engendre un second hyperboloïde. Trouver un point de l'intersection des deux surfaces et la tangente en ce point.

11109. — Asymptotes de l'intersection de deux hyperboloïdes de révolution à une nappe.

— **110.** — On donne un hyperboloïde de révolution à une nappe défini par son axe vertical et une génératrice. Inscrire dans la surface une sphère de rayon donné.

— **111.** — On donne un quadrilatère gauche; un hyperboloïde passe par les quatre côtés de ce quadrilatère. Quel est le lieu des centres?

— **112.** — Surface engendrée par une droite Δ qui s'appuie sur trois droites données non deux à deux dans un même plan. Plan polaire d'un point (s, s') par rapport à cette surface.

— **113.** — Deux droites A et B, qui ne se rencontrent pas, sont deux génératrices d'un même hyperboloïde de révolution; lieu des centres de ces hyperboloïdes.

— **114.** — Plan tangent en un point à un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal.

— **115.** — Un paraboloïde hyperbolique est déterminé par une verticale et une droite de bout, le plan directeur de l'autre système est le premier bissecteur. Construire une génératrice quelconque de ce système et le plan tangent en un point.

— **116.** — On donne deux droites quelconques par leurs projections et on considère le paraboloïde qui passe par ces deux droites et a un plan directeur horizontal. Axe, sommet, plans principaux; contour apparent horizontal; construire une parabole connaissant deux tangentes et leurs points de contact.

— **117.** — Trouver, sur un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal, une génératrice qui fasse, avec une génératrice donnée du système horizontal, un angle donné.

— **118.** — On a un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal dont une génératrice (de l'autre système) est une droite de front. Trouver les génératrices de la surface qui font un angle donné avec la génératrice de front.

— **119.** — On donne un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal. Trouver un point de la génératrice horizontale (H, H) tel que la seconde génératrice qui passe par ce point soit perpendiculaire à (H, H).

— **120.** — Un paraboloïde hyperbolique est défini par une droite quelconque, une frontale et le plan horizontal comme plan directeur. Trouver sur une génératrice un point tel que le plan tangent en ce point coupe le paraboloïde suivant deux génératrices rectangulaires.

— **121.** — Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point sur les génératrices horizontales d'un paraboloïde hyperbolique défini par un plan directeur horizontal et deux génératrices dont l'une est verticale. Construire un point du lieu et la tangente en ce point.

— **122.** — Cylindre à génératrices de front circonscrit à un paraboloïde hyperbolique, à plan directeur horizontal. Courbe de contact.

— **123.** — Un paraboloïde hyperbolique est déterminé par deux droites et le plan horizontal comme plan directeur. Ombres de ce paraboloïde, la direction des rayons lumineux étant de front.

— **124.** — Un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal est défini par deux génératrices dont les projections verticales sont parallèles. Courbe de contact avec un cylindre circonscrit dont les génératrices sont parallèles à une direction donnée (δ, δ').

— **125.** — Section par un plan PxQ d'un paraboloïde hyperbolique à plan directeur horizontal, défini par deux génératrices, l'une verticale, l'autre de front; ou par deux génératrices, l'une quelconque et l'autre verticale; ou par deux génératrices quelconques. Nature de la section, asymptotes, axes, point courant et sa tangente.

— **126.** — Un paraboloïde hyperbolique est défini par deux droites et un plan directeur horizontal. Section par un plan de bout; point courant et sa tangente, asymptotes.

— **127.** — Section par un plan quelconque d'un paraboloïde hyperbolique défini par une génératrice verticale, une génératrice quelconque et un plan directeur parallèle au second bissecteur.

— **128.** — Un paraboloïde hyperbolique est défini par deux droites et un plan directeur horizontal. Déterminer l'axe du paraboloïde. Section faite dans le paraboloïde par le plan vertical mené par l'axe. Construire un point de la section et la tangente en ce point; sommet de la parabole. Même problème pour la section par un plan vertical dont la trace sur le plan horizontal est parallèle à la projection horizontale de l'axe.

— **129.** — On donne un paraboloïde hyperbolique (défini par deux droites et un plan directeur horizontal) et un point (p, p'). Faire passer par ce point un plan vertical coupant la surface suivant une parabole. Trouver le sommet de cette parabole; point et tangente.

— **130.** — Mener par une droite un plan qui coupe un paraboloïde hyperbolique suivant une hyperbole équilatère.

— **131.** — Construire une horizontale qui rencontre deux droites données sous des angles égaux.

— **132.** — Intersection d'un paraboloïde hyperbolique avec une droite verticale.

— **133.** — Un paraboloïde hyperbolique est défini par deux génératrices et un plan directeur horizontal; intersection avec un cylindre ayant pour base un cercle dans le plan horizontal.

— **134.** — On donne un paraboloïde hyperbolique par deux génératrices et un plan directeur horizontal. Un cône a pour sommet un point (s, s') sur l'une des génératrices données, et pour base un cercle dans le plan horizontal. Intersection des deux surfaces. (*Fin.*)

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

Coulommiers. — Imp. Paul BRODARD.

TABLE DES MATIÈRES

ANNÉES 1919-1920 ET 1920-1921

ALGÈBRE ET ANALYSE

Numéros des questions. Pages.

2235 Sommer la suite $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$. Limite quand n augmente indéfiniment. . . . 213

2250 Combien de termes doit-on prendre dans la série qui a pour terme général $\frac{1}{n^3}$ si l'on veut calculer la valeur de la série à 0,0001 près. . 273, 372

2295 Calcul du nombre de termes non nuls d'un déterminant où il y a des éléments nuls. 324

2398 A) Soient y_0 et y_1 les valeurs que prend

$$y = \frac{1 + ix}{1 + i\,\mathrm{tg}A + ix(1 + i\,\mathrm{tg}B)}$$

pour $x_0 = 0$ et $x_1 = \infty$. Calculer le module et l'argument de $\frac{y - y_0}{y - y_1}$.

B) Identités trigonométriques. 547

2223 Étude de la fonction $x^2 \mathrm{L}\frac{1}{x} + \frac{1}{x}$. Aire. 187

2237 Étude de la fonction $y = \frac{(1 + x)^2 - \mathrm{L}x}{x}$. Relation entre $y^{(n)}$ et $y^{(n-1)}$. Calcul de $y^{(n)}$. Variations; aire 240

2252 Variations de la fonction $x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x}\right)$ . . . 276

2296 Étudier les variations de la fonction $y = \frac{\omega}{x + 4}$, sachant que $\sin\omega = \sqrt{\frac{4x}{15x + 60}}\left(0 < \omega < \frac{\pi}{2}\right)$. Déterminer a de façon que $x^2y - ax$ ait une limite pour x infini. 325

2363 Étude des fonctions $x^2\mathrm{L}(1 + x) - x$, $\frac{\mathrm{L}(1 + x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^2}$, $x^2\mathrm{L}\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x + \frac{1}{2}$. . . 503

2367 Variations de la fonction $\frac{x + 1}{x\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$. Calcul d'un volume 524

2368 Déterminer une série entière dont la somme vérifie l'équation différentielle $y'' = ax^2y$. . . 526

2394 Étude des fonctions $y = (x + a)\mathrm{L}\frac{x + 2}{x + 4}$. Développement en série de $\frac{y}{x + a}$ suivant les puissances de x ou de $\frac{1}{x}$. Forme des courbes correspondantes. Aires. Primitive de $f(x)\mathrm{L}\frac{x + 2}{x + 4}$, $f(x)$ étant un polynome 561

Numéros des questions. Pages.

2420 Développer en série entière par rapport aux puissances de t la plus petite racine x de l'équation $g\left(t - \frac{x}{v}\right)^2 = 2x$. Calculer le terme général de la série et trouver la condition pour que la série soit convergente. 580

2191 Exercice sur un tore circonscrit à une sphère. . 29

2152 Condition pour que les racines de

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

satisfassent à la condition $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$. 43

2219 Si $a > b$, l'équation

$$(x^2 - k^2)(ax + k\sqrt{a^2 - b^2})^2 - b^4x^2 = 0$$

n'a jamais que deux racines réelles. 140

2161 Calculer $\int_a^b (x^2 - a^2)\sqrt{\frac{x - a}{b - x}}\,dx$ $(a < b)$. . . . 17

2222 Calculer $\int_0^\infty \frac{x\mathrm{L}x}{(x^2 + 1)^2}dx$ et

$$\int_0^\infty \frac{x^2 + 3x + 3}{(x^2 + 1)^3}e^{-x}\sin x\,dx.$$ 107

2251 Calculer $f(z) = \int_0^\pi \frac{dx}{1 + z\cos^2 x}$. Développer suivant les puissances croissantes de z 274

2266 Étude de l'intégrale $y = \int_0^\alpha e^{m\alpha}\sin\alpha\,d\alpha$. Calculer $\frac{\partial y}{\partial m}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial m\,\partial\alpha}$. Calculer $\frac{dy}{dx}$, en posant $x = \int_0^y e^{m\alpha}\cos\alpha\,d\alpha$. Équation différentielle entre x, y, $\frac{dy}{dx}$ 308

2347 Condition pour que l'intégrale d'une fonction rationnelle soit rationnelle 480

2419 Calculer l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{(3\sin^2 x + 4\sin x + 1)\sqrt{\sin x}}$$ 580

2194 Moment d'inertie de l'aire de la courbe $\rho = 2a(1 + \cos\omega)$ par rapport au pôle. 72

2217 Intégrer les équations différentielles

$y + y'' + y^{\mathrm{IV}} = 0$, $y + y' + y'' - y''' + y^{\mathrm{IV}} - y^{\mathrm{V}} = 0$. 83

2221 Intégrer

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 11y = e^{3x}(\sin\sqrt{2x + x^2 + 1}).$$

Courbe intégrale qui passe par O et est tan

Numéros des questions. Pages.

gente en ce point à la bissectrice $y - x = 0$. Aire 84

2162 Intégrer $xy' + y = 2x + 2 - \frac{1}{x}$. Lieu des minima des courbes intégrales 93

2236 Ramener l'équation différentielle

$$f(x)y'' + \frac{f'(x)}{2}y' + y + g(x) = 0$$

à une équation linéaire à coefficients constants. Étude d'un cas particulier : $f(x) = 4x$, $g(x) = 0$. 238

TRIGONOMÉTRIE

2276 Sur le côté AC d'un triangle ABC on construit en dehors du triangle un triangle ACD tel que CD soit perpendiculaire à BC et égal à BC. Variation de AD quand A varie, b et c restant fixes. Déterminer A de façon que $AD = m$ 263

2326 Par un point A de la bissectrice d'un angle on mène une sécante rencontrant les côtés de l'angle en B et C. Variation de $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$. Déterminer la sécante de façon que

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{k^2} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 386$$

2340 Triangle isocèle ABC (AC = BC), $A = B = 2x$; on donne la longueur l de la bissectrice AD et $BD.DC = m^2$. Calculer $\cos x$. Discuter 408

2343 Dans un parallélogramme ABCD on donne l'angle A, le périmètre $2p$ et le rapport des diagonales $\frac{AC}{BD} = k$. Calculer les côtés, la surface, le sinus de l'angle des diagonales. 458

2359 ABC triangle équilatéral, D point de BC, $\widehat{ADB} = x$. Calculer en fonction de x les distances de A aux centres des cercles inscrits aux triangles ADB, ADC, puis étudier les variations de la somme et du produit de ces longueurs. Déterminer x de façon que la somme des rayons des cercles inscrits égale une longueur donnée k. 479

CALCUL NUMÉRIQUE

2196 Calculer avec trois décimales les racines de l'équation $\log x + \frac{2}{3 + 18x} + 0{,}63436 = 0$ . . . 75

2246 A et B points de l'hyperbole $xy = 1$, $\widehat{xOA} = \frac{\pi}{8}$, $\widehat{yOB} = \frac{\pi}{8}$. Calculer l'aire du triangle mixtiligne OAB, du segment limité par AB et l'arc AB, la longueur de la corde AB. 231

2277 Calculer au moyen de la règle à calcul les onze premiers termes de la série

$$u_n = \frac{\sqrt{26\,300}}{(20n + 235)\sqrt{20n + 32}},$$

et les plus petits angles positifs ayant pour tangentes les onze premiers termes de la série

$$u_n = \sqrt{\frac{20n + 22}{263}} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 265$$

2253 Exercices sur l'équation

$$x^5 + 4x^4 - 6x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Calcul d'une racine. 282

Numéros des questions Pages

2282 Triangle isocèle de côtés a, a, b; angle au sommet α grades. Calculer

$$A = 1 - \frac{bL\frac{a}{b} + r\frac{b}{a}}{r + a - b} \quad (r = 606{,}5 - 0{,}695\,b)$$

pour les valeurs de α : 10^g, 15^g, 20^g; $2p = 20^m$. 341

2289 Déterminer α pour que l'équation

$$x^3 + 6x^2 - (\alpha - 12)x - (2\alpha - \sin\alpha - 8) = 0$$

ait une racine double. 360

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A DEUX DIMENSIONS

2212 M, point d'un cercle de centre O, MP perpendiculaire sur un diamètre fixe AB, N milieu de OM. Les lieux des centres de gravité G, G' des triangles OMP, ONP sont des ellipses. La médiane issue de M est normale à l'ellipse lieu de G. Lieu du point de concours des normales à ces ellipses en G et G'. 94

2215 Rendre rationnelle l'équation $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}$. Construire la courbe. 167

2220 La tangente en un point B du cercle

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

rencontre en M la droite $x = R$ et en N l'axe Oy. Lieu de l'orthocentre du triangle OMN. Enveloppe de la hauteur issue de N. Calcul d'une aire 189

2227 Exercices divers sur des droites formant des triangles isocèles. Lieux, enveloppes. Calcul d'une aire et d'un volume 214

2259 Construire la courbe

$$x^2 = 1 + a\cos t, \qquad y^2 = 1 + a\sin t.$$

Tangentes parallèles aux axes 254

2274 Construire la courbe

$$x = \frac{t^2 + 3t - 2}{2(t^2 - 3t + 2)}, \qquad y = \frac{t^2 - t + 2}{t^2 + t - 2} \cdot \quad . \quad . \quad 260$$

2288 Lieu d'un centre de gravité; variations d'une aire. 358

2308 Étant donnée la courbe

$$y^3(m+1)^3 - m(m+1)^3y^2x - m^2(m+1)^2ax^2 + 2a^2(m+1)y - a^3,$$

m étant variable, enveloppe de l'asymptote et lieu du point où la courbe rencontre l'asymptote. 404

2316 Conditions pour que l'équation

$$(b - at)(1 + t^2) - 1 = 0$$

ait une racine double. Interprétation géométrique, a et b étant les coordonnées d'un point. Calcul d'un arc 423

2350 Cercle fixe (ω), centre O, rayon R; A et B points fixes de Ox. Un point M décrit (ω); on considère le cercle (γ) circonscrit au triangle MAB. Soit M' le second point de rencontre de (ω) et (γ). Lieu du centre du cercle (γ') orthogonal à (γ) qui passe en M et M'. M décrivant (ω), calculer la valeur moyenne de $\frac{R}{\rho}$, ρ étant le rayon de (γ') 446

2341 Cercle de centre O et de rayon R, A point de ce cercle (— R, 0), M' point variable du cercle, B projection de M sur Oy. Lieu du point de rencontre de AB et de la parallèle à Oy menée par M. Tangentes à ce lieu parallèles aux axes et passant par A 455

Numéros des questions. Pages.

2393 Étude des courbes (c), $y = x\frac{(a-\mu)^2}{(x-\mu)^2}$, a fixe, μ variable. On fait correspondre à chaque courbe (c), la conique $\frac{1}{y} = px + q$ qui n'a aucun point commun à distante finie avec (c). Lieux des foyers et sommets de ces coniques. Transformation homographique des courbes (c). 493

2370 Cercles passant par un point fixe et coupant une droite donnée sous un angle constant. Lieu des centres; enveloppe 574

2417 Tracer la courbe $\rho = a\sqrt{\sin 2\theta}$. Tangentes remarquables. Enveloppe de la droite menée par un point M de cette courbe perpendiculairement à OM. 575

2144 ρ étant le rayon de courbure et α l'angle de la tangente avec Ox, déterminer les courbes telles que $\rho\cos\alpha = k$, $\rho\cos^2\alpha = k$, $\rho\cos^3\alpha = k$, $\frac{\rho}{\cos\alpha} = k$ 19

2153 Courbe (C) dans laquelle $x = a(1-\cos\alpha)$, α angle de la tangente avec Ox. Démontrer $\frac{dy}{d\alpha} = \frac{a\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$. Construire la courbe; rayon de courbure, centre de courbure, arc 21

2214 La normale en M à une courbe C rencontre Ox en N, et sur la tangente en M on porte MP = MN. Déterminer la courbe de façon que le lieu de P soit une droite donnée Δ. Cas particulier $(Ox, \Delta) = 45°$. 61

2218 Une droite variable passant par le centre d'un cercle fixe rencontre celui-ci au point A et la courbe C au point M. Déterminer C de façon que la tangente au cercle au point A et la tangente en M à la courbe C se coupent sur une droite donnée Δ 87

2216 Déterminer la fonction p de φ de manière que la droite $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$ enveloppe une courbe telle que l'on ait $\frac{\overline{MN}}{\overline{PO}} = 1 - n$, MN étant la normale limitée à Ox, P la projection de O sur la tangente en M. Pour une certaine valeur de n, le rayon de courbure est fonction linéaire de p 145

2238 Déterminer une courbe telle que l'aire limitée par Ox, Oy, la courbe C et l'ordonnée MP, soit égale à l'aire du triangle formé par MP, Ox et la tangente en M. Le rapport des moments d'inertie de ces deux aires par rapport à Oy est le même pour tout point M d'une courbe C. 161

2242 Déterminer une courbe C telle que si l'on porte sur l'ordonnée PM la longueur MQ égale à une fonction $f(x)$, la tangente en M soit parallèle à OQ. Cas particulier $f(x) = a$, $f(x) = ax$. . 182

2233 Déterminer une courbe C telle que

$$N - R = 4a\cos^2\theta,$$

N normale limitée à Ox, R rayon de courbure, θ angle de la tangente avec Ox. Quelle courbe faut-il faire rouler sur Ox pour qu'un de ses points décrive C? 203

2154 D'un point M de la normale en A à une parabole on mène les deux autres normales MB et MC. Exercices sur le triangle A'B'C' formé par les tangentes en A, B, C 44

2142 Enveloppe de la perpendiculaire élevée au milieu du rayon de courbure d'une parabole. 60

2195 Exercices sur une parabole $y^2 - 2px = 0$ et sur une hyperbole équilatère rencontrant la parabole en trois points O, M, P et ayant Ox, Oy comme directions asymptotiques 73

2229 Déterminer sur une hyperbole équilatère un point M tel qu'il existe un cercle C tangent en M à la courbe, passant par le centre de l'hyperbole et par un point donné A de l'hyperbole. Enveloppe du cercle C. Exercices 109

2230 Exercices sur une ellipse 131

2211 Exercices sur une parabole. Lieu du point de Frégier. 141

2224 La polaire d'un point M par rapport à l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ rencontre les axes en P et Q, et la perpendiculaire abaissée de M sur PQ en P' et Q'. Enveloppes de PQ et P'Q' si M décrit la conique $y^2 = 2px + q$. 168

2231 Soient P et Q les projections d'un point M d'une ellipse sur les axes. Enveloppe de l'hyperbole équilatère ayant pour centre P (ou Q), et M pour un des sommets réels. Lieu du second point de rencontre des deux hyperboles qui passent par M. Enveloppe de l'hyperbole équilatère ayant son centre en M et son sommet réel en P (ou Q) 191

2243 Exercices sur deux paraboles dont les axes sont rectangulaires. Angles des tangentes communes avec une direction fixe. Cas où les tangentes communes sont confondues. 225

2241 Le lieu du point de concours de deux normales rectangulaires à une ellipse et le lieu du point de concours des normales aux extrémités de deux rayons vecteurs centraux et rectangulaires sont deux courbes fermées qui ont la même aire 242

2258 Étude de la correspondance entre les points $m(z = x + yi)$, $M(Z = X + Yi)$, définie par $z^2 + Z^2 = 1$. Le point m décrivant une courbe (c), le point M décrit une courbe (C). 249

2240 Coniques qui ont un foyer donné, une excentricité donnée et dont la directrice passe par un point fixe. Les asymptotes passent par des points fixes 286

2267 Paraboles ayant pour sommet commun l'origine et pour foyers un point F sur Ox et un point F' sur Oy. Lieu des sommets d'un angle droit dont les côtés sont tangents l'un à une parabole, l'autre à l'autre. 312

2302 Exercices sur deux ellipses (ou hyperboles) homothétiques et concentriques. Calcul des aires de deux triangles 347

2303 $A_0A_1A_2 \ldots A_n \ldots$, ligne brisée inscrite dans l'hyperbole $xy = 1$, les côtés tangents à $xy = \lambda^2$; A_0 est au point (1,1). Calculer les coordonnées du point A_n, et la longueur l_n du côté $A_{n-1}A_n$. Étude de la série $\Sigma\frac{1}{l_n}$. 350

2324 Coniques tangentes à Ox au point O et ayant pour directrice une droite donnée. Lieu des foyers 383

2215 Une tangente variable à une ellipse rencontre les tangentes aux sommets du grand axe en H, H' et les tangentes aux sommets du petit axe en K, K'. Étude des cercles qui ont pour diamètres HH' et KK'. Lieu de leurs points de rencontre D, D'. Lieu du point P qui divise DD' dans le rapport m. Enveloppe des courbes trouvées. . 420

2355 Le pôle normal d'une corde focale d'une ellipse est situé sur la parallèle au grand axe menée par le milieu de cette corde 465

Numéros des questions. Pages.

2354 Lorsque deux coniques l'une fixe, inscrite dans un triangle, l'autre variable, circonscrite au même triangle sont tangentes en M, la corde commune associée à la tangente en M passe par un point fixe 466

2372 M point variable d'une ellipse de foyers F et F'. Lieu de l'orthocentre du triangle MFF'. Lieu du point de rencontre du cercle MFF' avec la parallèle au grand axe menée par le centre de ce cercle 467

2373 M point d'une parabole, C centre de courbure, P point de Frégier. Lieux du point R qui forme avec M, C, P une division harmonique. 469

2357 A chaque point F de la droite $x - a = 0$ on fait correspondre la parabole P ayant pour foyer F, pour axe OF et tangente à Ox. Lieu du sommet. Lieu du pied de la directrice sur l'axe. Enveloppe de la directrice 475

2364 Le centre d'une hyperbole équilatère et le pôle d'une corde AB sont conjugués par rapport au cercle de diamètre AB 507

2397 Exercices sur deux paraboles dont l'une est tangente aux deux axes et l'autre normale à ces axes. Cercle et hyperbole équilatère passant par les points de rencontre. 566

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A TROIS DIMENSIONS

2141 Étude de la surface $\varphi(p, q, r) = 0$, cette condition exprimant que l'équation

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

a une racine égale au carré d'une autre. . . . 4

2192 Étude d'un conoïde à directrice circulaire. Ligne de striction; paramètre de distribution. Exercice de dynamique et de statique 30

2199 Exercices sur la courbe

$$x = \frac{t}{1 + t^6}, \quad y = \frac{t^2}{1 + t^6}, \quad z = \frac{t^3}{1 + t^6}.$$

Projections sur les plans de coordonnées. Quadriques passant par la courbe 119

2207 Étant donné un cercle O, étudier les droites Δ telles que leur trace sur un plan P qui leur est perpendiculaire soit foyer de la projection de O sur ce plan. 122

2234 Surface engendrée par un cercle de rayon constant, s'appuyant sur les bissectrices de l'angle xOy, de manière que son plan soit parallèle au plan yOz. Représentation paramétrique. Contours apparents. Lignes asymptotiques 155

2239 Lieu des points de contact des plans tangents parallèles à un plan donné aux sphères tangentes à deux sphères données 180

2281 Courbe C, intersection d'un cylindre qui a pour section droite une spirale logarithmique avec un cône de révolution. Surface engendrée par un cercle dont le centre décrit C, dont le plan est normal à C, et qui est tangent à Oz. Calcul d'un volume 335

2297 D droite variable tournant autour du point (a, b, c) dans le plan $z = c$; D' conjuguée de D par rapport à $x^2 + y^2 + z^2 = k^2$; Δ perpendiculaire commune à D et D' qui rencontre ces droites en M et M'. Lieux de Δ, de M et de M'. Cas où la surface est une sphère. 373

2336 D'un point M de la droite D $(x - a = 0,\ z - y = 0)$ on abaisse MI perpendiculaire sur Oz, et on considère le cercle de centre I, de rayon IM dans le plan MOz. Surface Σ engendrée par ce cercle. Déterminer tous les cercles de cette surface. 444

2348 On donne une courbe gauche, calculer les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale. Calculer l'arc et le rayon de courbure. 506

2365 Courbe (A) située sur le conoïde (C) $z = a\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, et dont la projection sur le plan des xy est $\rho^2 = b^2 \sin 2\theta$. Le plan tangent à (C) en un point de (A) est osculateur à (A). Exprimer les coordonnées d'un point de (A) en fonction rationnelle d'un paramètre. Équation tangentielle de (C). (C) est sa propre polaire réciproque par rapport à une infinité de quadriques . . . 513

MÉCANIQUE

2140 Dans un triangle OAM de sommet fixe O, on a $OA = a$, $AM = b$, $(Ox, OA) = \theta$, $(Ox, AM) = 2\theta$. Lieu de M quand θ varie. Si θ est proportionnel au temps, hodographe et lieux des extrémités des vecteurs vitesse et accélération. Si l'accélération de M passe par O, construire l'hodographe pour $a = b$. 6

2245 Mouvement d'un point sur un cône de révolution. 228

2253 Lieu du centre de gravité G de l'arc M_0M d'une courbe, M_0 étant fixe et M variable. Déterminer la vitesse et l'accélération du point G en grandeur et direction 277

2294 Mouvement d'un mobile décrivant la courbe $(x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,\ x^2 + y^2 - x = 0)$ de manière que le vecteur accélération rencontre Oz. Vitesse, accélération 322

2304 Une droite et une circonférence tournent chacune d'un mouvement uniforme autour d'un point fixe O commun aux deux lignes. Lieu du point de rencontre; vitesse et accélération 394

2330 A tout point $S(\rho_1, \omega_1)$ de la droite D,

$$\rho = \frac{5a}{3\cos\omega - 4\sin\omega},$$

correspond le point $M(\rho, \omega)$ tel que $\rho = \rho_1$, $\omega = 2\omega_1$. Lieu de M quand S décrit D. Si S décrit D d'un mouvement uniforme, la vitesse aréolaire de M est constante 432

2398 Étudier la courbe $x = \frac{1}{2}\mathrm{L}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$. Rayon de courbure. On suppose que α varie suivant la loi $\alpha = \mathrm{arc\,tg}\, e^t$; vitesse et accélération du point (x, y) 547

2225 Exercices sur la droite $x = z + 2t$, $y = tz + 2t^2$. Surface engendrée quand t varie. Exercices de dynamique 111

2366 Mouvement d'un point soumis à l'action d'une force parallèle au plan des xy et dont l'extrémité est située sur la courbe $x = 2\cos z$, $y = 2\sin z$. Cas particulier : Étudier la trajectoire, calculer la vitesse, les accélérations. . . 537

2232 Déterminer une courbe C dans un plan vertical telle qu'une barre s'appuyant sur la courbe (en lui étant tangente) et sur une verticale du plan de la courbe soit en équilibre, quel que soit le point de contact. 219

2275 Équilibre d'un point assujetti à rester sur la courbe $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$, $z = \frac{a\theta}{2}$ et

Numéros des questions. Pages.

soumis à l'action de la force $X = y$, $Y = x$, $Z = -a$. Cas où il y a frottement 262
2309 Équilibre d'un triangle équilatéral dont un sommet est attaché à l'extrémité d'un fil et dont un autre sommet glisse sur une droite fixe. 405
2342 Équilibre d'une porte. 457
2358 Équilibre d'une poulie avec et sans frottement . 477
2413 Équilibre d'une barre qui a une extrémité fixe et dont l'autre est attirée par un ou plusieurs centres fixes proportionnellement à la distance. 578

ÉPURES

2254 Intersection d'une sphère et d'un cône de révolution dont l'axe est dans le plan de front du centre de la sphère (École Polytechnique, 1914). 63
2278 Sphère entaillée par un cône de révolution (École Centrale, 1914) 96
2298 Intersection d'un tore ayant pour axe la ligne de terre et d'un paraboloïde hyperbolique qui a pour directrices une verticale et une ligne de bout rencontrant la ligne de terre et pour plan directeur le second bissecteur (École Polytechnique, 1919) 136
2283 Intersection d'une sphère et d'un paraboloïde de révolution (École des Mines de Saint-Étienne, 1914) 193
2312 Intersection d'un ellipsoïde de révolution à axe vertical et d'un cylindre dont la base est un cercle horizontal (École Centrale, 1919) 315
2317 Intersection d'un cône de révolution et d'un hyperboloïde de révolution à une nappe dont les axes sont dans un même plan de front (École Polytechnique, concours spécial de 1919). 375
2333 Intersection d'une surface gauche de révolution à axe vertical et d'un cône de révolution (École Centrale, 1916). 483
2430 Intersection d'un cylindre de révolution à axe horizontal et d'un hyperboloïde de révolution réglé dont une génératrice est horizontale (École Polytechnique, 1920). 570

PHYSIQUE

2247 Détermination de coefficients de dilatation. . . 163
2248 Calcul de l'effort qui s'exerce sur un piston. . . 163
2256 Exercices sur la vaporisation de l'eau. Calculs d'un volume, d'une température et d'une pression 207
2265 Exercice d'optique 233
2271 Exercices sur un condensateur à lame d'air. . . 244
2279 Déviation d'un rayon monochromatique qui pénètre dans une sphère homogène transparente, après p réflexions 266
2261 Exercices sur deux lentilles 298
2284 Exercice d'optique 338
2313 Exercices sur un rayon de lumière monochromatique qui traverse une lame de verre . . . 361
2300 Exercice de capillarité 397
2328 Exercice d'optique sur une lentille 410
2334 Exercice sur un pendule 434
2346 Exercice d'optique sur un miroir sphérique et une lentille. 459
2306 Exercice de capillarité 472
2318 Exercice d'optique sur un prisme 520
2322 Étude de la déviation d'un rayon qui tombe sur un cylindre de verre 542
2361 Calculer une valeur approchée de l'équivalent mécanique de la chaleur au moyen d'un dispositif donné. 550

CHIMIE

2249 Déterminer la nature de deux gaz et calculer deux volumes 164
2257 Exercices sur les réactions d'un mélange solide de sulfate, d'hyposulfite et de sulfite neutre de sodium. 209
2280 Analyse d'un gaz. 267
2285 Calculer le titre d'une solution de potasse. . . . 340
2314 Réactions à formuler et volumes à calculer . . . 362
2301 Analyse d'une solution de potasse 399
2329 Réactions à formuler. 410
2335 Calcul de la pression d'un mélange gazeux. . . 435
2346 Analyse d'un gaz. 461
2307 Décrire une réaction; indiquer la nature et le volume d'un gaz 474
2323 Trouver la composition qualitative et quantitative d'un mélange contenant de l'oxyde azotique. . 543
2362 Étude d'un composé gazeux contenant du phosphore et du fluor. 551

NOTES

Sur la somme des puissances semblables des n premiers nombres entiers, par M. Dontot. 1, 25
Note sur les déterminants, par M. E. Pouget. 177
Résolution de l'équation du troisième degré, par M. P. Maurice 129, 153
Sur l'équation du troisième degré, par M. A. Lévy . . 297
Enveloppe des droites obtenues en faisant tourner d'un angle constant les tangentes à une courbe plane autour de leurs points de contact, par M. Jean Mourret. 105
Sur le folium double, par M. Gino Loria. 201
Sur les développements de cônes et de cylindre, par M. Chénevier 489
Sur les hélices cylindriques, par M. Anzemberger. 393, 417, 441
Sections planes et sphériques du tore, par M. A. Sainte-Laguë 57, 81
Sur la ligne de striction d'une surface réglée, par M. H. Girard. 344
Sur les moments de vecteurs, par M. Rech. 369

EXAMENS ET CONCOURS

Agrégation des Sciences Mathématiques.

1919 . . . . . 116, 513.
1919 (concours spécial). 210.
1920 . . . . . 380.
1920 (concours spécial). 429.

Certificats de Mathématiques générales.

Rennes (1912) . . . . 21.
Clermont (1912) . . . . 31, 145.
Grenoble (1912) . . . . 84.
Nancy (1912) . . . . 71, 161.
Rennes (1913) . . . . 80, 506.

ÉCOLES

École Normale Supérieure et Bourses de Licence.

1914 . . . . . 233, 249, 254, 298, 300.
1917 . . . . . 331.
1918 . . . . . 355.
1919 . . . . . 234.
1919 (concours spécial). 184, 493, 561.
1920 . . . . . 303.

École Polytechnique.

1914 . . . . . 63, 207, 273, 274, 276, 277, 282.
1916 . . . . . 41, 542, 543.
1917 . . . . . 69, 444.
1918 . . . . . 91, 446.
1919 . . . . . 13, 136, 321, 324, 325, 373, 397, 399.
1919 (concours spécial). 39, 375, 420, 423, 520.
1920 . . . . . 258, 570.
1921 . . . . . 521.

École Nationale Supérieure des Mines.

1914 . . . . . 163, 182, 225, 228, 231.
1919 . . . . . 15, 347, 350, 394, 472, 474.
1920 . . . . . 283.
1921 . . . . . 544.

École Centrale.

1914 . . . . . 96, 260, 262, 263, 265, 266, 267.
1915 . . . . . 32, 383, 386, 409, 410.
1916 . . . . . 54, 431, 434, 435, 483.
1917 . . . . . 102, 475, 477, 479, 550.
1918 . . . . . 173.
1919 . . . . . 23, 315, 361, 362, 404, 405, 408.
1919 (concours spécial). 78, 455, 457, 458, 459, 461.
1920 . . . . . 245, 575, 578, 580.
1921 . . . . . 533.

École des Ponts et Chaussées.

Cours spéciaux.

1913 . . . . . 29.
1920 . . . . . 402.
1921 . . . . . 573.

Cours préparatoires.

1913 . . . . . 72, 73, 75.
1914 . . . . . 358, 360.
1919 . . . . . 128, 524, 526, 574.
1920 . . . . . 415.

École des Mines de Saint-Étienne.

1913 . . . . . 119.
1914 . . . . . 193, 334, 338, 340, 341.
1917 . . . . . 343.
1918 . . . . . 366.
1919 . . . . . 198, 547.
1919 (concours spécial). 222.
1920 . . . . . 317.

École Navale.

1914 . . . . . 244, 307, 312.
1916 . . . . . 268.
1917 . . . . . 270.
1918 . . . . . 293.
1919 . . . . . 151.
1920 . . . . . 390.
1921 . . . . . 558.

Institut Electrotechnique de Grenoble.

1920 . . . . . 416.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

École Polytechnique.

1919 . . . . . 10, 36, 65, 88, 114, 139, 165.
1920 . . . . . 328, 352, 378, 401, 427, 451.

École Nationale Supérieure des Mines

1920 . . . . . 302, 327.

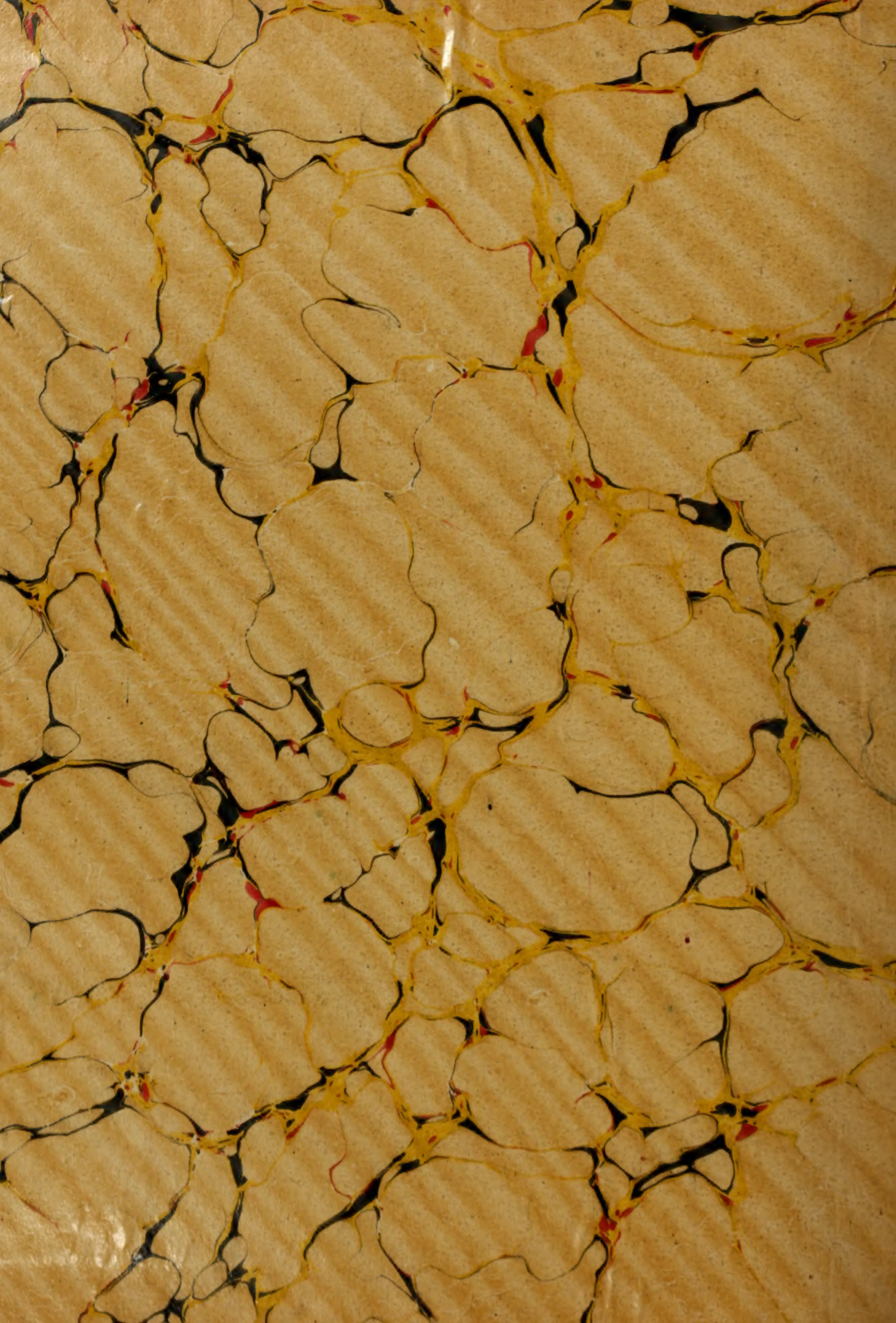
École Centrale.

1914 . . . . . 172, 196, 220, 363, 388, 411.
1919 . . . . . 49, 76, 99, 125, 149.
1920 . . . . . 436, 462, 485, 508, 528, 553, 582.

NOMS DES AUTEURS

A., 71, 72.
ABRAMESCO, 403, 488.
ANZEMBERGER, 393, 417, 441.
BARISIEN (E.-N.), 140, 243, 416, 440.
BERNARD (Paul), 350.
BOUCHARY (Jean), 399.
BOULIGAND, 302, 327.
BOUTHILLIER (Yves), 363, 411, 436.
BOUVAIST (R.), 92, 104.
CHÉNEVIER, 489.
DÉAUX (R.), 475.
DION (Émile), 76.
DONTOT (R.), 1, 25.
DURAND, 436.
E. (G.), 307.
F. (G.), 182.
FORISSIER (Auguste), 273.
G. (H.), 358, 368.
GÉNEVET, 502.
GÉRARD, 49, 172, 436.
GIRARD (H.), 345.
GOUET (H.), 75.
GUIBERT (A. O.), 507.
GUILLERME (Charles), 320.
H. (E.), 80, 104, 307, 454, 464, 475, 488, 502, 512.
HAAG (J.), 213.
HARMÉGNIES (R.), 111, 237.
HÉLE (Marcelle et Georges), 553.
JAPHET (Henri), 242.
JOLLY (M.), 96, 114, 162.
KRAUSS (E.), 108.
L. (J.), 65, 98, 139, 196, 317, 377, 485, 573.
L. (P.), 262, 263, 265, 266, 385, 388, 405, 459, 478, 480, 577, 579, 580, 581.
LABAT (Paul), 474.
LACH (G.), 30, 114, 172, 219, 240, 440, 451, 468, 488, 541.
LATIL (Henri), 96.
LÉVY (A.), 297.
LOGEARD (E.), 543.
LONG (L.), 520.
LORIA (Gino), 201.
M., 352, 475, 550.
MACÉ DE LÉPINAY (A.), 187.
MALLOIZEL, 126, 365.
MALRAIT (André), 245, 277.
MANEN (R.), 320.
MAURICE (P.), 129, 153, 338, 342.
MAZET, 502.
MENNESSIER (H. L.), 407, 427, 434, 457.
MOURRET (Jean), 105.
NAUCELLE (L.), 21, 22, 83, 88, 149, 193, 219.
DE NERVO (Robert), 10.
P. (G.), 119, 464.
PACÉ (A.), 435, 458, 477.
PAUC, 207.
POUGET (Edouard), 177.
R. (C.), 80, 254.
R. (Ch.), 248.
R. (G.), 111.
RECH, 369.
RÉME (E.), 44, 49.
ROUSSEAU (A.), 30.
ROUSSELET (F. A.), 125.
ROUYER (L.), 524.
ROUX (A.), 220.
ROUX (M.), 61, 191, 409.
SAINTE-LAGUË (A.), 57, 81.
SIMON (L.), 48, 168, 227, 257, 276.
SINGIER (Gaston), 397.
SUEUR (Lucien), 372.
THIRINGER (L.), 6.
TONGAS (Jean), 144.
TOPIN, 73, 362.
TRESSE, 77, 100, 365, 486.
TROIN (L.), 214.
VALIRON, 486.
VASSEUR (Marcel), 454.
VASSEUR (P.), 465, 466.
VAULOT, 358.
VIVIER (Pierre), 292.

Coulommiers. — Imprimerie Paul BRODARD.



QA
1
R486
année 30-
31

Revue de mathématiques
spéciales

Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCK

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY